UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

7330
1

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. HERMITE, *président*.

BERTRAND.

DARBOUX.

TISSERAND.

J. TANNERY.

PHILIPPON, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

16959 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XV. — ANNÉE 1891.

(TOME XXV DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179859
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

QA
1
B8
v.26

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

5

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GOURSAT. — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, rédigées par *C. Bourlet*. 1 vol. in-8°, 354 p. Paris, Hermann, 1891.

Ce Volume, qui, primitivement, ne devait contenir que les matières inscrites au programme de l'agrégation des Sciences mathématiques pour 1890, est, grâce aux développements que M. Goursat y a ajoutés, un traité complet sur l'*intégration* des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Les neuf premiers Chapitres répondent, exactement, au programme de l'agrégation, les trois derniers sont un exposé bref et très clair de la partie la plus essentielle des recherches que M. Lie a faites sur l'intégration de ces équations.

Ce qu'il faut surtout admirer dans cet Ouvrage, c'est la *simplicité* et la clarté de l'exposition. Les démonstrations sont présentées sous une forme très élémentaire, et, pour ne pas fatiguer le lecteur, celles qui étaient trop longues ont été coupées en plusieurs parties de façon à permettre à l'esprit de se reposer.

Les nombreuses citations dont le livre est rempli montrent que tous les renseignements ont été pris aux sources mêmes et ne proviennent pas d'intermédiaires, ce qui est, malheureusement, un cas fréquent ailleurs. Ceci ne veut pas dire que l'auteur se soit

astreint à reproduire *textuellement* les démonstrations des divers Mémoires cités; plus d'une a été retouchée, mais cette retouche, sans changer la marche de l'exposition, lui a fait gagner beaucoup en simplicité. Nous ne parlerons pas ici de l'ordre choisi pour l'exposition; cet ordre était subordonné aux exigences du programme de l'Agrégation, dont nous n'avons pas à faire la critique.

Le premier Chapitre contient les théorèmes généraux sur l'existence des intégrales. La méthode choisie est celle de Mme de Kowalewski, méthode dont M. Goursat a su donner une exposition aussi rapide que claire. Sous la complication nécessaire des notations, on voit ressortir clairement les deux points essentiels : 1° les coefficients du développement de l'intégrale, si elle existe, sont fournies par l'équation même, jointe aux conditions initiales; 2° la convergence du développement ainsi calculé se démontre en le comparant à un développement convergent connu, par un artifice qui a été imaginé par Cauchy et qui se retrouve dans toutes les démonstrations analogues. Le Chapitre se termine par des généralités sur les intégrales et par une démonstration rigoureuse de l'existence des fonctions implicites. Le second Chapitre est celui qui a dû coûter le plus de travail à l'auteur. Il contient l'intégration des équations linéaires. Après avoir exposé la théorie classique de l'intégration d'une seule équation linéaire, M. Goursat expose celle des systèmes complets et jacobiens. Pour la première fois peut-être, la méthode de Mayer se trouve exposée d'une façon vraiment lumineuse. Le Mémoire de l'illustre inventeur n'est pas sans quelques obscurités, que n'ont pas complètement dissipées, à ce qu'il nous semble, les divers auteurs qui en ont repris l'exposition. Les conditions précises ([1]) dans lesquelles la méthode de Mayer doit être appliquée et la manière pratique de faire cette application sont parfaitement indiquées.

Une exposition brève de la méthode de Jacobi, qui souvent est plus pratique que celle de Mayer, termine ce Chapitre.

Le troisième Chapitre, qui contient les équations aux différen-

---

([1]) M. Collet (*Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble*, t. I, p. 1) a donné d'intéressants exemples où la méthode de M. Mayer serait en défaut; si nous ne nous trompons, ces exemples ne font que confirmer les conditions précisées par M. Goursat, auxquelles ne satisfont pas les exemples de M. Collet.

tielles totales, n'a été, probablement, introduit dans ce Cours qu'à cause du programme de l'agrégation, car son utilité ne se fait pas sentir dans l'Ouvrage. D'ailleurs, M. Goursat s'est contenté d'y montrer l'identité de la question avec celle de l'intégration des systèmes complets et en a profité pour indiquer brièvement la méthode proprement dite de Mayer.

Les cinq Chapitres qui suivent contiennent l'exposé rationnel des méthodes d'intégration connues pour les équations de forme quelconque.

L'ordre suivi est l'ordre historique, et c'est le meilleur, car c'est celui qui gradue le mieux les difficultés.

D'abord, la méthode de l'*intégrale complète* de Lagrange et Charpit présentée sous une forme telle qu'elle devient une excellente préparation à la méthode de Jacobi et Mayer. Ensuite, avec le Chapitre V, nous entrons dans la théorie des caractéristiques de Cauchy. Pour amener naturellement la notion des caractéristiques, la méthode même de Cauchy pour trois variables est d'abord exposée et ce n'est qu'une fois que le lecteur a été familiarisé avec cette notion, pour le cas de trois variables, que le problème plus général est attaqué. L'auteur montre ensuite comment on peut tirer la notion des caractéristiques de l'intégrale complète de Lagrange, ce qui est très important pour la détermination d'une intégrale satisfaisant à des conditions données, lorsqu'on connaît une intégrale complète de l'équation.

Avant d'aborder la théorie générale de Jacobi et Mayer pour les systèmes d'équations du premier ordre, M. Goursat expose les propriétés des expressions (f, φ) et $[f, \varphi]$, ainsi que la méthode classique de Jacobi pour une seule équation tirée des *Vorlesungen über Dynamik*. Au fond, cette méthode, comme il le prouve d'ailleurs, est identique à la méthode des caractéristiques.

La méthode de Jacobi, perfectionnée par M. Mayer, pour un système d'équations du premier ordre, est développée dans le Chapitre VII avec tout le soin que mérite une méthode aussi importante. Jacobi et Mayer supposaient que, par un artifice bien connu, on eût fait disparaître la fonction inconnue elle-même des équations. M. Goursat remarque à la fin du Chapitre que la méthode peut s'appliquer même quand la fonction inconnue figure explicitement dans les équations. Il refait rapidement la

théorie dans ce cas et montre que cela revient à remplacer dans la théorie de Jacobi les expressions (,) par les expressions [,].

Enfin, le Chapitre VIII clôt la série des méthodes *pratiques* d'intégration avec la méthode de M. Sophus Lie. Cette méthode, qui est la plus parfaite, est pour ainsi dire une synthèse des méthodes précédentes. Elle est exposée, d'abord, d'une manière indirecte (due à M. Mayer), puis, directement, par quelques indications rapides. Cette exposition n'a pour but que de rattacher la méthode de M. Lie aux méthodes précédentes, car son étude complète sera faite plus loin, à un point de vue plus général.

Le Chapitre suivant est une étude spéciale des équations à trois variables au point de vue géométrique. Cette étude est d'une utilité incontestable pour l'intégration des équations qui ont une origine géométrique connue.

Les considérations sur les cônes (N) engendrés par les normales aux surfaces intégrales qui passent par un point donné, les cônes (Y) supplémentaires des cônes (N), les courbes (C) qui sont le lieu des points de contact des surfaces intégrales qui touchent un plan donné, les courbes *intégrales* et les propriétés géométriques qui caractérisent les courbes caractéristiques, permettent souvent de prévoir certains résultats et même quelquefois d'effectuer, complètement et sans calcul, l'intégration d'une équation du premier ordre. D'autre part, la notion des *développables* caractéristiques inséparables des courbes caractéristiques, ainsi que les notions dualistiques, préparent le lecteur à la méthode générale de M. Lie et à la théorie des transformations de contact. Enfin, le Chapitre contient une étude géométrique assez complète de l'intégrale singulière dans le cas de trois variables et de ses propriétés essentielles.

Ici se termine la partie du Livre qui répondait au programme de l'agrégation. La fin est uniquement composée de l'exposé des travaux de M. S. Lie.

M. Goursat expose d'abord la théorie générale de Lie. La notion d'intégrale est élargie. Pour cela, il résout de la manière la plus générale l'identité

$$dz - p_1\,dx - \ldots - p_n\,dx_n = 0,$$

et définit ainsi les multiplicités M_n d'éléments. L'intégrale d'un

système d'équations

$$F_1(z, x_i, p_k) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_q(z, x_i, p_k) = 0$$

est alors, par définition, la multiplicité M_n qui vérifie ces équations. La théorie de l'intégration est refaite tout entière avec cette définition générale de l'intégrale et la notion de caractéristiques est étendue à un *système* d'équations. Cette belle théorie est un des rares exemples d'une théorie mathématique parfaite à laquelle il n'y a plus rien à ajouter (¹).

Le court exposé de la théorie des transformations de contact, qui termine le volume, comble les quelques lacunes qui restaient encore dans cette étude. L'auteur définit d'abord les transformations de contact, donne leur détermination et quelques exemples parfaitement choisis. Citons parmi ceux-ci le bel exemple de la transformation de Lie qui transforme, dans les surfaces, les lignes asymptotiques en lignes de courbure. Il donne, ensuite, les propriétés élémentaires des transformations de contact et, immédiatement, leur application à l'étude des équations du premier ordre. On voit ainsi comment l'intégration de ces équations n'est qu'une application directe de la théorie des transformations. On obtient ainsi les solutions de plusieurs problèmes importants : le passage d'une intégrale complète à une autre, la démonstration de l'impossibilité de l'existence d'un invariant dans les équations du premier ordre, impossibilité qui résulte de ce fait qu'on peut toujours trouver une transformation de contact qui transforme deux équations données l'une dans l'autre.

Vient enfin une exposition sommaire des propriétés principales des *groupes* de transformations. Ces propriétés trouvent une application très importante dans la théorie de l'intégration des équations du premier ordre, en particulier, dans la solution de ce problème intéressant : *Quel avantage peut-on tirer, au point de vue de l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, de la connaissance d'un certain nombre d'intégrales, dont aucune n'est suffisamment générale*

(¹) M. Lie a montré, en effet, que la méthode de Jacobi et Mayer était la plus simple possible, c'est-à-dire qu'il ne peut pas exister une méthode conduisant à des opérations plus simples.

pour pouvoir fournir à elle seule l'intégrale générale? Ces deux derniers Chapitres seront d'une grande utilité pour ceux qui voudraient étudier les théories de M. Lie et en particulier son bel Ouvrage : *Theorie der Transformationsgruppen;* ce sera une excellente préparation à cette étude.

Pour clore ce compte rendu détaillé du Livre de M. Goursat, ajoutons qu'il est rempli d'Exercices, les uns traités, les autres à faire. Il a été écrit pour les étudiants; mais, par la quantité des faits qu'il contient et la perfection de l'exposition, il intéressera à coup sûr tous les géomètres : des Livres de cette nature, résumant l'état de la Science sur un point particulier, sont éminemment désirables.

PUISEUX (P.). — Leçons de Cinématique, Mécanismes, Hydrostatique, Hydrodynamique, professées à la Sorbonne, rédigées par *P. Bourguignon* et *H. Le Barbier*. 1 vol. in-8°; VIII-340 p. Paris, G. Carré, 1890.

Le Cours de Mécanique rationnelle professé à la Sorbonne dans la chaire magistrale roule uniquement sur la Statique et la Dynamique. Pour suivre ce Cours, les élèves ont besoin de quelques notions de Cinématique pure; d'un autre côté, le programme de la licence ès sciences mathématiques comporte divers articles relatifs aux mécanismes les plus simples et aux premiers principes de l'Hydraulique. C'est dans les conférences dirigées par M. Pierre Puiseux que les élèves de la Sorbonne acquièrent ces diverses connaissances; le Livre que nous annonçons est sorti de cet enseignement, dont les nécessités expliquent la diversité des matières traitées.

Les Leçons de M. Puiseux sont très bien adaptées aux besoins des lecteurs auxquels elles s'adressent : l'auteur a eu le talent de se borner à ce qui est essentiel et a su résister au désir bien naturel de développer outre mesure des théories géométriques dont l'intérêt, qui n'est pas douteux, n'apparaît pas toujours à des jeunes gens pressés d'acquérir leurs grades et particulièrement attirés, à ce moment de leur vie scientifique, par les admirables développements que comporte le Cours de Mécanique rationnelle. L'exposition est habituellement claire et élégante : elle est à la

fois géométrique et analytique ; ce double mode d'exposition n'est nullement fatigant pour le lecteur, lorsqu'on sait n'en pas abuser, et les avantages qu'il offre pour les élèves sont indiscutables.

La Cinématique pure tient naturellement la plus grosse place (sept Chapitres, 254 pages).

L'auteur, après avoir donné quelques notions indispensables sur la théorie des segments de droite, des projections et des moments, traite de la vitesse et de l'accélération d'un point; nous signalerons dans ce Chapitre l'application qui le termine, relative à la recherche de l'accélération centrale d'un mobile décrivant une conique. Le Chapitre suivant se rapporte aux mouvements relatifs pour ce qui concerne la vitesse. Il pourrait sembler plus logique de réunir ensemble tout ce qui concerne ces mouvements, mais il convient de reconnaître que cette étude, pour être complète, suppose l'étude antérieure du mouvement d'un corps solide, dont on n'a pas besoin pour le cas des vitesses et que, inversement, il est parfois commode de se servir de la loi de composition des vitesses pour l'étude du mouvement d'un corps solide. Cette deuxième étude comprend trois Chapitres relatifs aux cas où un plan du corps solide glisse sur un plan fixe, où ce corps admet un point fixe, où enfin il est animé d'un mouvement hélicoïdal : des applications bien choisies suffisent pour faire pressentir au lecteur la richesse géométrique de cette théorie.

Enfin, le dernier Chapitre est consacré au développement du théorème de Coriolis sur la composition des accélérations et à ses conséquences les plus importantes.

Le Chapitre relatif aux mécanismes se rapporte principalement aux divers organes qui permettent de transformer les uns dans les autres les mouvements circulaires et les mouvements rectilignes : manivelles, treuils, poulies, engrenages, joints, inverseurs, etc. Il se termine par l'étude de la vis d'Archimède.

Enfin, les soixante dernières pages du Livre traitent de l'Hydrostatique et de l'Hydrodynamique. On y trouvera les équations fondamentales et les applications les plus immédiates. J. T.

GOMES TEIXEIRA. — CURSO DE ANALYSE INFINITESIMAL. CALCULO DIFFERENTIAL. 2e édition, 1 vol. in-8°, 359 p. Porto, 1890.

La seconde édition du premier volume du *Cours d'Analyse* de M. Gomes Teixeira vient de paraître. La première édition, dont il a été rendu compte dans le t. XII du *Bulletin* (p. 64), ne remonte qu'à trois ans : c'est dire que le public a fait un bon accueil, d'ailleurs mérité, au Livre du savant Directeur de l'Académie Polytechnique de Porto.

FRENET. — RECUEIL D'EXERCICES SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL. — 5e édition augmentée d'un appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales, par M. *H. Laurent*. 1 vol. in-8°, 536 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891.

Nous signalons avec plaisir la cinquième édition de l'excellent Recueil d'exercices de M. Frenet, bien connu de tous les étudiants en Mathématiques. Quelques parties du programme *actuel* de la licence n'étaient pas représentées dans ce Recueil; M. Laurent a comblé cette lacune, en introduisant un Appendice, contenant une quarantaine d'exercices, qui augmentera encore la valeur du Livre. J. T.

1B Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SOPHUS LIE, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig. — THEORIE DER TRANSFORMATIONSGRUPPEN. Zweiter Abschnitt. *Unter Mitwirkung von Prof.* DR. FRIEDRICH ENGEL. Leipzig, Teubner, 1890.

Dans ce second volume de son grand Ouvrage sur les groupes de transformations, M. Sophus Lie développe sa belle théorie des transformations de contact et des groupes de transformations de contact. M. Lie a divisé son exposition en cinq Parties. Les deux premières sont entièrement indépendantes des théories contenues dans le premier Volume. L'auteur y met en lumière les liens étroits qui unissent les transformations de contact et les équations aux dérivées partielles du premier ordre, et qui en ont fait, depuis les découvertes de M. Lie, deux sujets d'étude désormais inséparables. Une partie des résultats qui y sont contenus sont aujourd'hui devenus presque classiques, surtout après la publication des belles leçons de M. Goursat sur la théorie des équations aux dérivées partielles. On les retrouvera exposés par M. Sophus Lie avec une simplicité et une élégance magistrales.

Nous n'aurons, dans notre analyse, qu'à suivre la marche adoptée par l'auteur, en nous efforçant seulement de marquer la suite des idées et de donner un aperçu des méthodes si originales et si fécondes de l'illustre savant norwégien.

I. La première Partie du Volume est consacrée à la définition des transformations de contact, à l'exposition de leurs propriétés fondamentales et à la détermination de la forme générale de ces transformations. A cette étude viennent se joindre, comme un point d'appui et un complément indispensables, des aperçus profonds et originaux sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Chapitre I. — L'auteur commence par s'occuper des transformations de contact du plan. On sait que M. Lie appelle *élément linéaire d'un plan* l'ensemble d'un point et d'une droite passant

par ce point; les coordonnées de cet élément sont les coordonnées cartésiennes x, y du point et le coefficient angulaire y' de la droite. Toute transformation en x, y, y' peut être considérée comme une transformation des éléments linéaires du plan. On est conduit à de telles transformations en remarquant que toute transformation ponctuelle

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y)$$

donne naissance à une transformation des éléments linéaires; car toutes les courbes qui ont au point (x, y) une tangente de coefficient angulaire y' se transforment en courbes ayant au point (x_1, y_1) la même tangente; de sorte que le coefficient angulaire y'_1 de cette nouvelle tangente est donné par une relation de la forme

$$(2) \qquad y'_1 = P(x, y, y').$$

L'ensemble des équations (1) et (2) définit donc une transformation des éléments linéaires du plan, que M. Lie nomme la *transformation prolongée* (erweiterte) correspondant à la transformation ponctuelle (1). Cette transformation jouit, entre autres, de cette propriété qu'elle change toute famille d'éléments (x, y, y'), satisfaisant à la relation

$$(3) \qquad dy - y'\,dx = 0,$$

en une famille d'éléments (x_1, y_1, y'_1) satisfaisant à la relation analogue $dy_1 - y'_1\,dx_1 = 0$; en d'autres termes, elle laisse invariante l'équation de Pfaff (3).

Mais les transformations ponctuelles prolongées ne sont pas seules à jouir de cette propriété, et M. Lie appelle *transformation de contact du plan* toute transformation des éléments linéaires du plan qui laisse invariante l'équation de Pfaff

$$dy - y'\,dx = 0.$$

Une telle transformation devant vérifier une identité de la forme

$$dy - y'\,dx = \rho(x, y, y')(dy_1 - y'_1\,dx_1),$$

les variables x, y, x_1, y_1 y sont liées par une ou deux relations. Si elles sont liées par deux relations, la transformation est une

transformation ponctuelle prolongée; si elles sont liées par une seule relation

$$(4) \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$

c'est une transformation de contact proprement dite, et elle est définie par le système formé de l'équation (4) et des équations

$$(5) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x} + y'\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + y'_1\frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = 0.$$

On peut d'ailleurs prendre pour Ω une fonction quelconque, sous certaines conditions de résolubilité que M. Lie étudie. Ajoutons que les transformations de contact forment visiblement un groupe et sont, deux à deux, inverses l'une de l'autre.

La définition des transformations de contact prend une forme géométrique par l'introduction des multiplicités d'éléments M_1. M. Sophus Lie nomme ainsi l'ensemble des éléments définis par un système de deux équations en x, y, y' qui satisfait à l'équation de Pfaff (3) : c'est, soit l'ensemble de tous les éléments linéaires d'une courbe (points et tangentes), soit l'ensemble de tous les éléments linéaires qui ont un point commun. Ceci posé, les transformations de contact sont les transformations des éléments linéaires qui changent toute multiplicité M_1 en une multiplicité M_1. Parmi elles, les transformations ponctuelles prolongées sont les seules qui changent tout point en point.

Quant à la transformation de contact proprement dite définie par les équations (4) et (5), elle change tout point de coordonnées $x = a$, $y = b$ en une courbe qui a pour équation

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0.$$

Par suite, elle transforme toute courbe lieu de points (a, b) dans l'enveloppe des courbes

$$\Omega(a, b, x_1, y_1) = 0$$

correspondantes; et inversement toute courbe enveloppe d'une famille de courbes

$$\Omega(x, y, a_1, b_1) = 0$$

dans le lieu des points (a_1, b_1) correspondants. C'est bien ce qui se produit par exemple dans la transformation par polaires réci-

proques qui a pour conique directrice la parabole $2y - x^2 = 0$, et qui n'est autre que la transformation de contact définie par l'équation $y + y_1 - xx_1 = 0$.

M. Lie donne encore une autre interprétation de l'équation de Pfaff (3); elle exprime que les deux éléments infiniment voisins (x, y, y') et $(x + dx, y + dy, y' + dy')$ sont unis, c'est-à-dire que la distance du point de l'un à la droite de l'autre est du second ordre par rapport à la distance des deux points. On peut donc définir une transformation de contact comme une transformation d'éléments qui change toujours des éléments unis en éléments unis.

Revenant ensuite à la forme analytique des transformations de contact, M. Sophus Lie montre que, pour que les équations

$$(6) \qquad x_1 = X(x, y, y'), \qquad y_1 = Y(x, y, y'), \qquad y'_1 = P(x, y, y')$$

définissent une transformation de contact, il faut que le crochet de Poisson $[X, Y]$ soit identiquement nul. Cette condition étant remplie, la fonction P est définie sans ambiguïté.

Les notions précédentes permettent d'énoncer le problème de l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, d'une manière saisissante et qui a l'avantage d'expliquer immédiatement nombre de particularités. Intégrer l'équation $W(x, y, y') = 0$, c'est, pour M. Lie, trouver toutes les multiplicités M_1 dont les éléments satisfont à cette équation. Le problème de l'intégration revient alors à la recherche d'une transformation de contact qui ramène l'équation donnée à la forme $W(x_1, y_1) = 0$. M. Lie montre que, inversement, si l'on connaît une transformation de contact (6), on peut intégrer immédiatement toute équation de la forme $Y - \Omega(X) = 0$; on obtient l'intégrale générale en éliminant y' entre les relations

$$Y - \Omega(X) = 0, \qquad X = a.$$

Les équations du second ordre donnent également lieu à des remarques importantes. Il résulte d'une correspondance, étudiée par M. Lie, entre les transformations de contact et les familles de courbes à deux paramètres, que l'on peut toujours, par une transformation de contact, passer d'une équation différentielle du second ordre à une autre. Ces équations n'ont donc pas de propriété

qui soit invariante par toutes les transformations du contact du plan.

Chapitre II. — Nous passons rapidement sur ce Chapitre : l'auteur y précise la notion de systèmes d'équations équivalents; il y définit ensuite ce que l'on doit entendre par un système d'équations qui admet une transformation, et par une équation de Pfaff invariante par une transformation ; il termine en établissant, sur les équations de Pfaff, quelques théorèmes simples qui jouent, dans la suite, un rôle fondamental.

Chapitre III. — Ce Chapitre contient l'étude des transformations de contact de l'espace.

Un élément de surface est l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point; il a pour coordonnées les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point et les coefficients de direction p, q du plan $[Z - z = p(X - x) + q(Y - y)]$. M. Lie appelle *transformation de contact de l'espace* une transformation des éléments de surface qui laisse invariante l'équation de Pfaff

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0. \tag{7}$$

On y est conduit en considérant la transformation prolongée qui correspond à une transformation ponctuelle en x, y, z.

Une transformation ponctuelle prolongée est une transformation de contact dans laquelle les variables x, y, z, x_1, y_1, z_1 sont liées par trois relations. Deux autres cas peuvent se présenter, suivant qu'elles sont liées par une ou deux relations : d'où deux catégories de transformations de contact de l'espace proprement dites.

Une transformation de la première espèce est définie par un système d'équations de la forme

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} + p\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y} + q\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0.$$

A cette catégorie appartiennent les transformations par polaires réciproques.

Une transformation de la seconde espèce s'obtient en éliminant les indéterminées λ_1 et λ_2 entre des équations de la forme

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} + p\left(\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{dz} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} + q\left(\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} + p_1\left(\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}\right) = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} + q_1\left(\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_3 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}\right) = 0.$$

Telle est, par exemple, la transformation d'Ampère $x_1 = -p$, $y_1 = y$, $z_1 = xp - z$, qui provient des deux relations

$$z + z_1 + xx_1 = 0, \qquad y - y_1 = 0.$$

La définition des transformations de contact est, ici encore, susceptible de prendre une forme géométrique, si l'on introduit la notion de multiplicités d'éléments. M. Lie nomme ainsi l'ensemble des éléments dont les coordonnées vérifient un système d'équations satisfaisant à l'équation de Pfaff (7); si, en particulier, la multiplicité comprend ∞^2 éléments, c'est une multiplicité M_2. Une multiplicité M_2 se compose : soit des éléments d'une surface (points et plans tangents), soit de ceux d'une courbe (points et plans tangents), soit de ceux d'un point (point et plans passant par le point); la surface, la courbe, le point apparaissent donc comme trois genres d'une même figure géométrique : la multiplicité d'éléments M_2. Une transformation de contact est alors une transformation d'éléments qui change toute multiplicité M_2 en une autre. Parmi les transformations de contact, les seules qui transforment tout point en point sont les transformations ponctuelles prolongées.

La transformation de contact définie par la relation unique $\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$, change le point $x = a$, $y = b$, $z = c$, en une surface qui a pour équation

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0. \tag{8}$$

Quant à la transformée d'une courbe ou d'une surface, elle est définie soit comme enveloppe des surfaces (8) qui correspondent

aux points de la courbe ou de la surface donnée, soit comme lieu des points $a_1 b_1 c_1$ qui correspondent aux surfaces

$$\Omega(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0,$$

dont la courbe ou la surface donnée est l'enveloppe.

Les transformations de contact définies par deux relations donnent lieu à des considérations de même nature.

Ajoutons que, grâce à une définition analogue à celle du plan, on peut définir la transformation de contact de l'espace comme changeant toujours des éléments unis en éléments unis.

Passant ensuite aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, M. Lie énonce ainsi le problème de l'intégration : *Intégrer l'équation* $\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, *c'est trouver tous les systèmes d'équations*

$$\Phi_1(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \Phi_2(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \Phi_3(x, y, z, p, q) = 0$$

qui comprennent l'équation $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$, *et qui satisfont à l'équation de Pfaff* $dz - p\,dx - q\,dy = 0$; *ou, sous une forme plus géométrique, c'est trouver toutes les multiplicités* M_2 *formées d'éléments de l'équation* $\Phi = 0$. M. Lie justifie cette belle définition par quelques remarques qui mettent bien en lumière les avantages qu'elle présente sur la définition classique de Lagrange.

Le Chapitre se termine par des considérations géométriques très intéressantes sur les transformations de contact qui changent toute ligne asymptotique d'une surface en une ligne asymptotique de la surface transformée, ou toute ligne de courbure en ligne de courbure.

Chapitre IV. — Nous arrivons maintenant au cas général, celui où l'on considère $2n + 1$ variables $z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$. La théorie de M. Sophus Lie repose sur la solution du problème général suivant : *Trouver tous les systèmes d'équations qui satisfont à l'équation de Pfaff*

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0. \tag{9}$$

Les résultats obtenus au Chapitre II conduisent facilement à une forme canonique remarquable des systèmes cherchés.

Ceux de ces systèmes qui se composent de $n+1$ équations distinctes

$$(10)\qquad \Phi_1(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_{n+1} = 0$$

ont une importance toute spéciale. Ils sont caractérisés par cette propriété que tous les crochets $[\Phi_i, \Phi_k]$ s'annulent en vertu des équations (10). L'intérêt qui s'attache à ces systèmes tient à la définition nouvelle que donne M. Lie de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Phi\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Intégrer cette équation, c'est, d'après l'illustre savant, trouver tous les systèmes d'équations de la forme (10) qui satisfont à l'équation de Pfaff (9) et comprennent l'équation

$$(11)\qquad \Phi(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

M. Lie considère encore des systèmes de la forme

$$\Phi_1(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = a_1, \qquad \Phi_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad \Phi_{n+1} = a_{n+1}.$$

Pour qu'un tel système satisfasse à l'équation (9) pour toutes les valeurs des constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_{n+1}$, il faut et il suffit que tous les crochets $[\Phi_i \Phi_k]$ soient nuls identiquement, c'est-à-dire que les fonctions $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n+1}$ forment un système de fonctions en involution. On peut encore dire que c'est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une identité de la forme

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = \lambda_1\, d\Phi_1 + \ldots + \lambda_{n+1}\, d\Phi_{n+1};$$

si elle est remplie, les fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ sont fournies sans ambiguïté par des équations du premier degré.

On en conclut encore que, pour que le système

$$X_1(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = a_1, \qquad \ldots, \qquad X_n(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = a_n$$

satisfasse à l'équation de Pfaff $p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n = 0$, quelles que soient les constantes $a_1, \ldots, a_n$, c'est-à-dire pour qu'on ait une identité de la forme

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n = P_1\, dX_1 + \ldots + P_n\, dX_n,$$

il faut et il suffit que les fonctions $X_1, \ldots, X_n$ soient, par rapport

aux variables $p_1, \ldots, p_n$, homogènes et de degré zéro, et que, de plus, tous les crochets $(X_i X_k)$ soient nuls identiquement. S'il en est ainsi, les fonctions $P_1, \ldots, P_n$ sont fournies par des équations linéaires, et sont homogènes et du premier degré par rapport à $p_1, \ldots, p_n$.

Les systèmes précédents s'introduisent également dans la théorie des équations aux dérivées partielles. M. Sophus Lie définit en effet une intégrale complète de l'équation (11) comme étant représentée par un système d'équations de la forme

$$\Phi = 0, \qquad \Phi_1 = a_1, \qquad \ldots \qquad \Phi_n = a_n,$$

qui satisfait à l'équation de Pfaff (9), $a_1 \ldots, a_n$ étant des constantes arbitraires. Si donc on suppose que l'équation donnée contient elle-même une constante arbitraire, c'est-à-dire soit de la forme $U(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = a$, trouver une intégrale complète revient à trouver n fonctions $U_1, \ldots, U_n$ qui vérifient une identité de la forme

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = \lambda\, dU + \lambda_1\, dU_1 + \ldots + \lambda_n\, dU_n,$$

c'est-à-dire qui forment avec la fonction U un système en involution.

Quant au problème du passage d'une intégrale complète à toutes les autres, il revient à la résolution par rapport aux fonctions $V_1, \ldots, V_n$ de l'équation

$$\lambda\, dU + \lambda_1\, dU_1 + \ldots + \lambda_n\, dU_n = \mu\, dU + \mu_1\, dV_1 + \ldots + \mu_n\, dV_n.$$

M. Lie complète enfin les considérations qui précèdent en introduisant la notion essentielle de multiplicité d'éléments.

Un élément est un système de valeurs de $z, x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$. Une multiplicité d'éléments est définie par un système d'équations (entre les coordonnées, $z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$ de l'un quelconque de ses éléments) satisfaisant à l'équation de Pfaff (9). Si ce système se compose de $n+1$ équations distinctes, il définit une multiplicité M_n d'éléments.

M. Sophus Lie dit encore que l'équation de Pfaff (9) exprime que l'élément $(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n)$ et l'élément infiniment voisin $(z + dz, x_1 + dx_1, \ldots, p_n + dp_n)$ sont unis. Une multiplicité est alors une famille d'éléments dans laquelle chaque élément est uni à tout élément infiniment voisin de la famille.

Dans un grand nombre de questions, il est avantageux d'introduire, pour définir un élément, ses coordonnées homogènes $y_1, \ldots, y_{n+1}$; $q_1, \ldots, q_{n+1}$: il suffit pour cela de poser

$$x_1 = y_1, \quad \ldots, \quad x_n = y_n, \quad z = y_{n+1},$$
$$p_1 = -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \quad \ldots, \quad p_n = -\frac{q_n}{q_{n+1}}.$$

L'équation de Pfaff (9) est alors remplacée par l'équation homogène

$$q_1\,dy_1 + \ldots + q_n\,dy_n + q_{n+1}\,dy_{n+1} = 0.$$

Avec ce nouveau mode de langage, on peut dire que, intégrer l'équation $F(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0$, c'est trouver toutes les multiplicités M_n de cette équation; trouver une intégrale complète, c'est ranger les ∞^{2n} éléments de l'équation $F = 0$ en un faisceau de ∞^n multiplicités M_n, de telle sorte que l'ensemble des éléments de toutes ces multiplicités coïncide avec l'ensemble des éléments de l'équation. On pourra naturellement, dans la résolution de ces deux problèmes, représenter un élément par ses coordonnées homogènes, c'est-à-dire remplacer l'équation donnée par l'équation $F\left(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, \frac{q_n}{q_{n+1}}\right) = 0$, homogène en $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$.

Chapitre V. — Ce Chapitre contient la définition des transformations de contact, et la détermination des relations analytiques qui les caractérisent.

On dit que la transformation

$$(12) \qquad \begin{cases} z' = Z(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n), \\ x'_i = X_i(z, x, p) \\ p'_i = P_i(z, x, p), \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

est une transformation de contact de l'espace à $n+1$ dimensions $(z, x_1, \ldots, x_n)$, si elle laisse invariante l'équation de Pfaff

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0.$$

Il résulte immédiatement de là que ces transformations forment un groupe et sont deux à deux inverses l'une de l'autre.

Pour que les équations (12) définissent une transformation de

contact il faut et il suffit que l'on ait une identité de la forme

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = \frac{1}{\rho}(dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n).$$

M. Lie en déduit qu'il faut et il suffit que les fonctions Z, $X_1, \ldots, X_n$; $P_1, \ldots, P_n$ soient liées par des relations identiques de la forme

$$(Z, X_i) = (X_i, X_k) = (P_i, X_k) = 0 \qquad (i \neq k).$$
$$(P_i, X_i) = \rho, \qquad (P_i, Z) = \rho P_i.$$

De là vient cette propriété fondamentale que, par la transformation de contact (12), le crochet $[\Phi, \Psi]_{z,x,p}$ de deux fonctions quelconques de $z, x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$ se change, au facteur ρ près, dans le crochet $[\Phi, \Psi]_{z',x',p'}$ des fonctions transformées.

On peut, dans les conditions trouvées, se débarrasser de la fonction inconnue ρ. M. Lie montre en effet que, si $Z, X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions indépendantes en involution, on peut déterminer sans ambiguïté n fonctions $P_1, \ldots, P_n$ telles que les équations (12) définissent encore une transformation de contact; ces fonctions sont d'ailleurs fournies par des équations du premier degré.

M. Sophus Lie passe ensuite aux transformations de contact dans lesquelles les variables $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$ sont transformées entre elles; il montre qu'elles doivent être de la forme

$$(13) \quad z' = Az + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où A est une constante, et où les fonctions Ω, $X_1, \ldots, X_n$; $P_1, \ldots, P_n$ sont liées par les relations identiques

$$(14) \quad \begin{cases} (Az + \Omega, X_i) = 0, \qquad (P_i, Az + \Omega) = AP_i, \\ (X_i X_k) = (P_i P_k) = (P_i X_k) = 0 \qquad (i \neq k), \\ (P_i X_i) = A. \end{cases}$$

Il en résulte que ces transformations en x, p forment encore un groupe.

Étudiant la réciproque, M. Lie prouve que, si l'on connaît n fonctions $X_1, \ldots, X_n$ des variables $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$ liées par les relations $(X_i X_k) = 0$, on peut toujours déterminer des fonctions Ω, $P_1, \ldots, P_n$ des mêmes variables telles que les équa-

tions

$$z' = z - \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p)$$

définissent une transformation de contact; la fonction Ω s'obtient par une quadrature, et les fonctions $P_1, \ldots, P_n$ sont fournies ensuite par un système d'équations du premier degré.

Un autre théorème est le suivant : *Si les fonctions* $X_1, \ldots, X_n$; $P_1, \ldots, P_n$ *sont liées par les relations identiques*

$$(X_i X_k) = (P_i P_k) = (P_i X_k) = 0, \qquad (P_i X_i) = A,$$

on peut, par une quadrature, déterminer une fonction Ω *telle que les équations* (13) *définissent encore une transformation de contact.*

Si l'on suppose enfin que la fonction Ω se réduise à une constante, les premières des relations (14) montrent que les fonctions X doivent être homogènes par rapport aux p et de degré zéro, et les fonctions P homogènes de degré un. En considérant en particulier la transformation de contact

$$z' = z, \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p),$$

on est conduit à considérer seulement la transformation

$$x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p).$$

M. Lie l'appelle une transformation de contact homogène. Elle peut être définie par cette propriété qu'elle laisse invariante l'expression de Pfaff $p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n$; elle est caractérisée par ce fait que les X y sont homogènes et de degré zéro par rapport aux p, les P homogènes et du premier degré, et que l'on a les relations identiques

$$(X_i X_k) = (P_i P_k) = (P_i X_k) = 0, \qquad (P_i X_i) = 1.$$

Réciproquement, si les fonctions $X_1, \ldots, X_n$ sont homogènes et de degré zéro, et sont de plus en involution, les fonctions correspondantes $P_1, \ldots, P_n$ sont données par des équations du premier degré.

Les transformations de contact homogènes ont deux propriétés fondamentales : 1° elles laissent invariante l'expression

$$p_1 \frac{\partial U}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial U}{\partial p_n},$$

où U est une fonction quelconque de $x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$; et de là résulte qu'elles forment un groupe; 2° elles laissent invariant le crochet (UV) de deux fonctions quelconques de $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$.

Ce qui fait leur importance, c'est qu'à toute transformation homogène aux $2n+2$ variables $y_1, \ldots, y_{n+1}; q_1, \ldots, q_{n+1}$ correspond une transformation de contact de l'espace à $n+1$ dimensions; il suffit, pour passer de la première à la seconde, d'y faire le changement de variables

$$x_1 = y_1, \quad \ldots, \quad x_n = y_n, \quad z = y_{n+1},$$

$$p_1 = -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \quad \ldots, \quad p_n = -\frac{q_n}{q_{n+1}};$$

cela tient à ce que ce changement de variables change le crochet $(UV)_{y,q}$ en $-\frac{1}{q_{n+1}}[U, V]_{z,x,p}$. On verra par la suite quelles simplifications et quelle symétrie l'introduction de ces transformations homogènes apporte dans les calculs.

Chapitre VI. — Dans ce Chapitre, M. Sophus Lie détermine la forme générale des transformations de contact. Voici les principaux résultats obtenus par le grand géomètre.

Toute transformation de contact homogène est définie par le système obtenu en éliminant les indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ entre des équations de la forme

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_q(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) = 0,$$

$$-p_i + \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0, \qquad p'_i + \frac{\partial W}{\partial x'_i} = 0.$$

où

$$W = \lambda_1 \Omega_1 + \ldots + \lambda_q \Omega_q.$$

Réciproquement toute élimination des λ entre des équations de cette forme fournit une transformation de contact homogène, pourvu toutefois qu'un certain déterminant que M. Lie apprend à former ne s'annule pas en vertu des équations $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_q = 0$.

De même on obtient toutes les transformations de contact en $z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$ en éliminant des indéterminées λ entre

des équations de la forme

$$\Omega_1(z, x_1, \ldots, x_n; z', x'_1, \ldots, x'_n) = 0, \qquad \ldots \qquad \Omega_q(z, x, z', x') = 0.$$

$$p_i = -\frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z}}, \qquad p'_i = -\frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x'_i} + \ldots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x'_i}}{\lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial z'} + \ldots - \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial z'}}.$$

Enfin, pour les transformations en x, p, l'élimination doit se faire entre les équations de la forme

$$z' - \Lambda z - W(x, x') = 0, \qquad \Omega_1(x, x') = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_q(x, x') = 0.$$

$$p_i = \frac{-\lambda \dfrac{\partial W}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x_i}}{\lambda \Lambda},$$

$$-p'_i = \frac{-\lambda \dfrac{\partial W}{\partial x'_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial x'_i} + \ldots + \lambda_q \dfrac{\partial \Omega_q}{\partial x'_i}}{\lambda}.$$

M. Lie montre ensuite que les transformations de contact sont les seules transformations en z, x, p qui changent tout système de $n+1$ équations, satisfaisant à l'équation de Pfaff (9), en un système jouissant de la même propriété.

Il est à remarquer toutefois que si le premier système contient k relations indépendantes entre z, $x_1, \ldots, x_n$ seuls, le second ne contiendra pas en général le même nombre de relations entre z', $x'_1, \ldots, x'_n$ seuls. Il y a exception pour les systèmes qui ne contiennent qu'une relation entre z, $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire qui sont de la forme

$$z - F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

M. Sophus Lie démontre en effet qu'ils se changent toujours en systèmes de la même forme, à moins que F ne satisfasse à une certaine équation aux dérivées partielles, qui est du second ordre pour une transformation de contact proprement dite, et s'abaisse au premier pour une transformation ponctuelle prolongée.

Le Chapitre se termine par de belles considérations géométriques qui fournissent, en particulier, l'explication des derniers résultats.

Chapitre VII. — Ce dernier Chapitre est consacré aux équa-

tions aux dérivées partielles. M. Lie y démontre la célèbre identité

$$((uv)w) + ((vw)u) + ((wu)v) = 0,$$

en suivant la marche même indiquée par Jacobi. Il en déduit immédiatement le théorème de Poisson, d'après lequel, si v et w sont deux intégrales de l'équation linéaire $(uf) = 0$, (v, w) en est encore une intégrale.

M. Sophus Lie termine en exposant, avec la généralité qu'elle comporte, la méthode de Jacobi pour l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$u(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = a. \tag{15}$$

On sait que la méthode est fondée sur cette remarque que si $u_1, \ldots, u_r$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$ en involution, les équations

$$(u_1 f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (u_r f) = 0$$

forment un système complet; et que, d'autre part, trouver une intégrale complète de l'équation (15) revient à déterminer n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ qui forment avec u un système de $n+1$ fonctions en involution. On y arrive alors naturellement en cherchant successivement une intégrale d'une suite de systèmes complets.

II. La deuxième Partie contient la solution du problème suivant :

Étant donnés deux systèmes de m fonctions de $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, reconnaître s'il existe des transformations de contact qui changent les fonctions du premier système respectivement en celles du second, et s'il en existe, les trouver.

Cela revient au fond à rechercher quelles sont les propriétés d'un système de m fonctions qui sont invariantes par toute transformation de contact. La théorie des groupes de fonctions sert de base à cette étude.

Chapitre VIII. — M. Sophus Lie ne considère d'abord que des transformations de contact de la forme

$$z' = z + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p), \tag{16}$$

et des fonctions des seules variables $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Si on considère un système $u_1, \ldots, u_r$ de r de ces fonctions, le crochet $(u_i u_k)$ de deux quelconques de ces fonctions est invariant par toute transformation (16) : ces crochets doivent donc jouer ici un rôle essentiel. M. Lie dit en particulier que les r fonctions indépendantes $u_1, \ldots, u_r$ définissent un groupe, si tous les crochets $(u_i u_k)$ s'expriment au moyen de ces fonctions, c'est-à-dire, si l'on a des identités de la forme

$$(17) \qquad (u_i u_k) = w_{ik}(u_1, \ldots, u_r) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Le groupe est formé de l'ensemble de toutes les fonctions des x, p qui s'expriment au moyen de $u_1, \ldots, u_r$. Nous dirons que ce groupe est d'ordre r (r-gliedrig). Un groupe de fonctions peut contenir des sous-groupes.

M. Lie remarque ensuite que, pour que $u_1, \ldots, u_r$ définissent un groupe, il faut et il suffit que les équations linéaires

$$(u_1 f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (u_r f) = 0$$

forment un système complet. Un tel système complet a cette propriété caractéristique que, si ψ et χ en sont deux intégrales, $(\psi\chi)$ est une nouvelle intégrale. L'ensemble de ses intégrales constitue donc un nouveau groupe, qui n'est autre que le groupe de toutes les fonctions qui sont en involution avec chacune des fonctions du premier groupe. M. Lie le nomme le *groupe polaire* de ce premier groupe. Un groupe et son groupe polaire sont réciproques.

M. Sophus Lie nomme fonction distinguée (*ausgezeichnete*) du groupe toute fonction du groupe qui est en involution avec chaque fonction du groupe, c'est-à-dire toute fonction commune au groupe et à son groupe polaire. Le nombre des fonctions distinguées du groupe $u_1, \ldots, u_r$ se déduit facilement de l'ordre du déterminant principal du déterminant des fonctions w_{ik} qui figurent dans les relations (17); on peut donc toujours l'obtenir par de simples différentiations.

Chapitre IX. — Il est consacré à la démonstration de ce théorème remarquable :

Pour qu'on puisse, par une transformation de contact, passer d'un groupe à un autre, il faut et il suffit : 1° *que les deux*

groupes soient du même ordre; 2° qu'ils contiennent le même nombre de fonctions distinguées distinctes. On dit dans ce cas que les deux groupes appartiennent au même type.

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes, M. Lie commence par mettre chacun des deux groupes donnés sous une forme canonique, c'est-à-dire par déterminer r fonctions distinctes du groupe

$$(18) \qquad P_1, \ldots, P_m, X_1, \ldots, X_{m+q}, \quad (r = 2m + q),$$

qui soient liées par les relations canoniques

$$(19) \qquad (P_i X_k) = (X_i X_k) = (P_i P_k) = 0, \qquad (P_i X_i) = 1.$$

Cette réduction s'opère par l'emploi alternatif des deux théorèmes suivants :

1° *Si u_1 n'est pas une fonction distinguée du groupe, il existe toujours dans le groupe une fonction u_2, telle que l'on ait $(u_1 u_2) = 1$; 2° les deux équations $(u_1 f) = 0$, $(u_2 f) = 0$, où f est fonction seulement des u, définissent un sous-groupe d'ordre $r - 2$ du groupe proposé, dont toutes les fonctions sont en involution avec u_1 et u_2.*

Le premier groupe étant mis sous la forme (18), on peut déterminer d'autres fonctions $P_{m+1}, \ldots, P_n, X_{m+q+1}, \ldots, X_n$, telles que l'on ait toujours les relations (19). On a ensuite par une quadrature une fonction $\Omega(x, p)$ telle que les équations

$$z' = z + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p)$$

définissent une transformation de contact.

Le second groupe pourra se mettre sous une forme analogue, et donnera naissance aux fonctions $O(y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n)$, $Y_i(y, q)$, $Q_i(y, q)$.

Alors les équations

$$\zeta + O(y, q) = z + \Omega(x, p), \qquad Y_i(y, q) = X_i(x, p), \qquad Q_i(y, q) = P_i(x, p)$$

définissent une transformation de contact répondant à la question.

Chapitre X. — Les résultats précédents conduisent immédiatement à la solution du problème général énoncé plus haut dans le cas où les fonctions données ne dépendent que des variables $x_1, \ldots,$

$x_n, p_1, \ldots, p_n$. Le critérium cherché est le suivant : *Si les fonctions données $u_1, \ldots, u_r$; $v_1, \ldots, v_s$ forment deux groupes, il faut et il suffit, pour qu'on puisse passer du premier système au second par une transformation de contact : 1° que les deux systèmes contiennent le même nombre de fonctions; 2° que les $(u_i u_k)$ s'expriment au moyen des u par les mêmes relations qui fournissent les $(v_i v_k)$ en fonction des v.* Le cas où les fonctions ne forment pas deux groupes se ramène au précédent par une série de différentiations et d'éliminations.

Chapitre XI. — M. Lie y fait l'étude des groupes homogènes de fonctions. Un groupe de fonctions en $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ est dit homogène s'il contient r fonctions homogènes en $p_1, \ldots, p_n$, r étant l'ordre de ce groupe. Pour qu'un groupe soit homogène, il faut et il suffit que, dès qu'il contient une fonction F, il contienne la fonction $p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}$. Un groupe homogène d'ordre r contient exactement $r - 1$ fonctions homogènes de degré zéro indépendantes, à moins que toutes ses fonctions soient homogènes de degré zéro; dans ce dernier cas, deux fonctions quelconques du groupe sont en involution.

Le groupe polaire d'un groupe homogène est un groupe homogène. Les fonctions distinguées d'un groupe homogène forment un sous-groupe homogène; enfin, on peut toujours, par la formation de déterminants, déterminer combien le groupe contient de fonctions distinguées indépendantes homogènes et de degré zéro.

Chapitre XII. — Il contient la détermination des formes canoniques des groupes de fonctions homogènes, et l'application au problème général précédemment posé. Par une méthode de réduction analogue à celle du Chapitre IX, M. Sophus Lie montre que tout groupe homogène est réductible à l'une des deux formes

$$\text{(I)} \qquad P_1, \ \ldots, \ P_m, \quad X_1, \ \ldots, \ X_{m+q},$$

$$\text{(II)} \qquad P_1, \ \ldots, \ P_{m+q}, \quad X_1, \ \ldots, \ X_m,$$

où les fonctions P sont homogènes de degré un, les fonctions X homogènes de degré zéro, et où l'on a toujours les relations canoniques (19). La forme (I) convient au cas où les fonctions distinguées sont toutes d'ordre zéro, la forme (II) à l'autre cas.

Il en résulte que, pour qu'on puisse, par une transformation de contact homogène, passer d'un groupe de fonctions homogènes à un autre, il faut et il suffit que les deux groupes soient du même ordre, aient le même nombre de fonctions distinguées indépendantes, et le même nombre de fonctions distinguées indépendantes d'ordre zéro.

De ce théorème, M. Lie déduit la condition pour qu'on puisse, par une transformation de contact homogène, changer un système de fonctions de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ en un autre. Si les deux systèmes définissent deux groupes homogènes, il faut et il suffit : 1° que les deux systèmes $u_1, \ldots, u_r$; $v_1, \ldots, v_s$ contiennent le même nombre de fonctions ; 2° que les $(u_i u_k)$ et les $\sum_j p_j \frac{\partial u_i}{\partial p_j}$ s'expriment en $u_1, \ldots, u_r$ exactement comme les $(v_i v_k)$ et les $\sum_j p_j \frac{\partial v_i}{\partial p_j}$ au moyen de $v_1, \ldots, v_r$. On ramène au précédent le cas où les deux systèmes ne définissent pas deux groupes homogènes, au moyen de différentiations et d'éliminations.

Enfin le problème général du passage d'un système de fonctions de $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ à un autre se réduit à celui que nous venons de traiter par le changement de variables

$$(20) \qquad \begin{cases} x_1 = y_1, & \ldots, \quad x_n = y_n, \quad z = y_{n+1}, \\ p_1 = -\dfrac{q_1}{q_{n+1}}, & \ldots, \quad p_n = -\dfrac{q_n}{q_{n+1}}. \end{cases}$$

On peut donc toujours, sans intégration, reconnaître s'il est possible ou non de passer d'un des systèmes à l'autre par une transformation de contact.

Chapitre XIII. — Étant donné un groupe de fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, on a des identités de la forme

$$(21) \qquad (\varphi_i \varphi_k) = w_{ik}(\varphi_1 \ldots \varphi_r).$$

M. Sophus Lie dit que ces identités définissent la structure (*Zusammensetzung*) du groupe. Dans le Chapitre XIII, M. Lie démontre le beau théorème suivant :

Pour qu'il existe un groupe de structure (20), *il faut et il*

suffit que les fonctions w_{ik} vérifient les relations identiques

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} w_{ik} + w_{ki} = 0, \\ \displaystyle\sum_{v}\left(w_{vj}\frac{\partial w_{ik}}{\partial \varphi_v} + w_{vi}\frac{\partial w_{kj}}{\partial \varphi_v} + w_{vk}\frac{\partial w_{ji}}{\partial \varphi_v}\right) = 0. \end{array}\right.$$

La nécessité de ces relations résulte des propriétés du crochet de Jacobi. Voici le principe de la belle démonstration par laquelle M. Lie montre qu'elles sont aussi suffisantes.

F et Φ étant deux fonctions quelconques des variables $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, M. Lie représente par le symbole $|F\Phi|$ l'opération

$$|F\Phi| = \Sigma w_{ik}(\varphi)\frac{\partial F}{\partial \varphi_i}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k}.$$

Ce symbole jouit des deux propriétés essentielles du crochet de Jacobi, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$|F\Phi| + |\Phi F| = 0 \qquad \text{et} \qquad \big||F\Phi|\Psi\big| + \big||\Phi\Psi|F\big| + \big||\Psi F|\Phi\big| = 0,$$

On peut dès lors, par une méthode analogue à celle du Chapitre IX, déterminer r fonctions de $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$: $P_1, \ldots, P_{m+q}, X_1, \ldots, X_m$, telles que l'on ait identiquement

$$|P_iP_k| = |X_iX_k| = |P_iX_k| = 0, \qquad |P_iX_i| = 1.$$

Il suffit ensuite de considérer inversement $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ comme fonctions de $P_1, \ldots, P_{m+q}, X_1, \ldots, X_m$, et d'adjoindre à ces dernières d'autres variables quelconques : $P_{m+q+1}, \ldots, P_n, X_{m+1}, \ldots, X_n$, pour avoir dans les fonctions $\varphi_1(X, P), \ldots, \varphi_r(X, P)$ r fonctions définissant un groupe de la structure donnée.

Le nombre $2n$ des variables doit être au moins égal à $2(m+q)$.

De plus, tous les groupes à $2n$ variables s'obtiennent en faisant dans les fonctions trouvées la transformation de contact la plus générale de la forme

$$z' = z + \Omega(x, p), \qquad x'_i = \Xi_i(x, p), \qquad p'_i = \Pi_i(x, p).$$

M. Lie démontre enfin que l'on peut toujours trouver des groupes homogènes de la structure donnée et contenant r fonctions homogènes indépendantes du premier degré, à condition que les fonctions w_{ik} soient des fonctions homogènes et du premier degré de leurs arguments.

III. Dans la troisième Partie, l'auteur introduit les transformations infinitésimales de contact, et montre comment l'on peut calculer avec ces transformations infinitésimales beaucoup plus simplement et plus rapidement qu'avec les transformations finies.

Chapitre XIV. — Une transformation infinitésimale aux variables $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$

$$Xf = \zeta(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_i \xi_i(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \pi_i(z, x, p)\frac{\partial f}{\partial p_i},$$

est dite de contact si elle laisse invariante l'équation de Pfaff

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0.$$

M. Lie conclut de cette définition que toute transformation infinitésimale de contact est définie par les formules

$$\xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \qquad \pi_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} - p_i\frac{\partial W}{\partial z}, \qquad \zeta = \sum_i p_i\frac{\partial W}{\partial p_i} - W,$$

où W est une fonction arbitraire, que M. Lie nomme la *fonction caractéristique* de la transformation infinitésimale. On a, par suite,

$$Xf = [Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}.$$

On peut donc définir et désigner une transformation infinitésimale de contact par sa fonction caractéristique. Pour que plusieurs de ces transformations soient indépendantes, il faut et il suffit que leurs fonctions caractéristiques soient linéairement indépendantes.

Il est enfin presque évident que la condition pour que Xf engendre un groupe de transformations de contact à un paramètre est que Xf soit une transformation infinitésimale de contact.

Pour qu'un système d'équations $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_m = 0$ admette une transformation infinitésimale de contact W, il faut et il suffit que les équations $[W\Phi_i] - W\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = 0$ soient des conséquences des équations du système. Si ce système définit une multiplicité d'éléments, la condition se simplifie : il faut et il suffit que l'équation $W = 0$ soit une conséquence des équations du système ; en d'autres termes, pour qu'une multiplicité admette la transformation infini-

tésimale W, il faut et il suffit que les coordonnées de tous ses éléments satisfassent à l'équation $W = 0$.

De même que l'on avait à considérer précédemment des transformations de contact finies particulières, il y a lieu de définir des transformations infinitésimales de contact spéciales qui correspondent aux transformations en x, p et aux transformations homogènes.

Les premières sont celles qui laissent invariante l'expression de Pfaff $dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n$, et non l'équation seulement; la condition pour qu'il en soit ainsi est que W soit une fonction φ de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ seulement. Le groupe à un paramètre correspondant se compose de transformations de contact de la forme

$$z' = z + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p).$$

Ceci permet de donner une nouvelle définition du groupe polaire d'un groupe de fonctions $u_1, \ldots, u_m$: il se compose de toutes les fonctions qui restent invariantes par toute transformation infinitésimale dont la fonction caractéristique est de la forme $\psi(u_1, \ldots, u_m)$.

On peut considérer le cas un peu plus général d'une fonction caractéristique de la forme $W = \varepsilon z + w(x, p)$, où ε est une constante : la transformation infinitésimale correspondante engendre un groupe de transformations de contact en x, p de la forme générale.

Quant aux transformations infinitésimales de contact homogènes, ce sont par définition les transformations infinitésimales

$$Xf = \sum_i \zeta_i(x, p) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \pi_i(x, p) \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

qui laissent invariante l'expression $p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$. Elles ont pour fonctions caractéristiques des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ homogènes et du premier degré en $p_1, \ldots, p_n$. Ce sont du reste les transformations infinitésimales qui engendrent des groupes à un paramètre de transformations de contact homogènes; si h est la fonction caractéristique de l'une d'elles, son symbole est simplement (hf).

Chapitre XI. — Dans les calculs, ce sont les transformations

infinitésimales homogènes qui sont soumises aux règles les plus simples.

1° Si $(H_1 f)$, $(H_2 f)$ sont deux de ces transformations, le crochet des deux transformations a pour fonction caractéristique le crochet de Jacobi $(H_1 H_2)$.

2° Si on fait dans (Hf) un changement de variables défini par les équations d'une transformation finie de contact, la nouvelle transformation infinitésimale a pour fonction caractéristique celle qu'on obtient en faisant simplement dans H le changement de variables.

Ces deux règles subsistent dans le cas plus étendu où les fonctions caractéristiques ne dépendent pas de z. Pour en déduire enfin les règles analogues pour le cas général, il suffit de remarquer que le changement de variables (20) change la transformation infinitésimale homogène (HF) en $(WF) - W\frac{\partial F}{\partial z}$, à condition de poser

$$H = -q_{n+1} W\left(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n, -\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, -\frac{q_n}{q_{n+1}}\right).$$

On obtient alors les deux résultats suivants :

2° Si W_1 et W_2 sont les fonctions caractéristiques de deux transformations infinitésimales de contact, le crochet des deux transformations a pour fonction caractéristique la fonction

$$\{W_1 W_2\} = [W_1 W_2] - \left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}\right).$$

2° Par la transformation de contact

$$z' = Z(z, x, p), \qquad x'_i = X_i(z, x, p), \qquad p'_i = P_i(z, x, p),$$

où

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n),$$

la transformation infinitésimale de contact qui a pour fonction caractéristique W se change en celle qui a pour fonction caractéristique ρW (où l'on doit remplacer les anciennes variables en fonction des nouvelles).

Comme application de ces propositions, M. Sophus Lie montre ensuite que l'identité de Jacobi résulte de l'invariance du

crochet de Jacobi par toute transformation infinitésimale de la forme (φf), et indique plusieurs généralisations remarquables du théorème de Poisson.

Chapitre XVI. — Il est important de considérer les relations qui peuvent exister entre les groupes de fonctions et les groupes de transformations. Une transformation de contact de la forme

$$(23) \qquad z' = Az + \Omega(x, p), \qquad x'_i = X_i(x, p), \qquad p'_i = P_i(x, p)$$

laisse, d'après M. Lie, un groupe de fonctions $u_1, \ldots, u_r$ invariant, si elle change chaque fonction u_k du groupe en une fonction de la forme $F_k(u_1, \ldots, u_k)$. Cela revient à dire qu'elle laisse invariant le système complet

$$(v_1 f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (v_{2n-r} f) = 0,$$

qui correspond au groupe polaire $v_1, \ldots, v_{2n-r}$. Dans le cas d'une transformation infinitésimale de la forme $\varepsilon z + w(x, p)$, cette dernière propriété sert de définition; il en résulte que, pour qu'un groupe de fonctions admette toutes les transformations d'un groupe de contact à un paramètre [ces transformations étant supposées de la forme (23)], il faut et il suffit qu'il admette la transformation infinitésimale qui l'engendre.

Les groupes de fonctions qui admettent une transformation infinitésimale de contact de la forme $\varepsilon z + w(x, p)$ contiennent comme cas particulier les groupes homogènes, qui peuvent être définis comme admettant la transformation infinitésimale z. Ils partagent avec eux cette propriété fondamentale que leur groupe polaire admet la même transformation infinitésimale, ce qui signifie, pour un groupe homogène, que son groupe polaire est également homogène.

M. Lie recherche ensuite quelles sont les transformations de contact qui laissent invariant un groupe de fonctions $u_1, \ldots, u_r$, ainsi que chacune des fonctions de son groupe polaire. Ces transformations forment un groupe infini dont les transformations infinitésimales sont toutes comprises dans la formule $(Uf) - U\frac{\partial f}{\partial z}$, où U est une fonction arbitraire de $u_1, \ldots, u_r$.

Le Chapitre se termine par l'examen de plusieurs questions analogues, sur lesquelles nous ne pouvons insister.

IV. La quatrième Partie est consacrée à la théorie générale des groupes de transformations de contact.

Chapitre XVII. — Revenant sur la théorie générale des transformations, M. Sophus Lie démontre ce beau théorème énoncé déjà dans son premier Volume :

Étant données r^3 constantes c_{iks}, qui vérifient les relations

$$c_{iks} + c_{kis} = 0,$$
$$\sum_{v} \left\{ c_{ikv} c_{vjs} + c_{kjv} c_{vis} + c_{jiv} c_{vks} \right\} = 0,$$

il existe toujours une infinité de groupes de transformations dont la structure est définie par ces constantes.

M. Lie commence par déterminer un groupe simplement transitif à r paramètres répondant à la question; le problème se ramène à la recherche d'un groupe de fonctions ayant une structure donnée. De ce premier groupe on déduit tous les autres par la méthode indiquée dans le premier Volume. Le calcul n'exige que l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Chapitre XVIII. — Les relations qui peuvent exister entre des transformations infinitésimales de contact s'expriment simplement au moyen de leurs fonctions caractéristiques. M. Lie s'occupe d'abord des transformations homogènes.

Pour que r transformations infinitésimales de contact homogènes $(H_1 f), \ldots, (H_r f)$ engendrent un groupe à r paramètes, il faut et il suffit que $H_1, \ldots, H_r$ soient linéairement indépendantes et vérifient des identités de la forme

$$(24) \qquad (H_i H_k) = \sum_{1} c_{iks} H_s.$$

Les constantes c_{iks} sont les mêmes que les constantes qui définissent la structure du groupe; elles fournissent donc immédiatement les transformations infinitésimales du groupe adjoint. Les conditions pour que deux groupes soient isomorphes, ou pour que l'un soit un sous-groupe invariant de l'autre se déduisent aussi de là.

Les relations (24) montrent encore que si, parmi les fonctions

$H_1, \ldots, H_r$, il y en a m d'indépendantes, par exemple $H_1, \ldots, H_m$, tandis que les autres s'expriment en fonction de celles-là, ces fonctions $H_1, \ldots, H_m$ définissent un groupe homogène de fonctions. Ce groupe de fonctions joue un rôle important dans beaucoup de questions relatives au groupe de transformations qui lui a donné naissance.

La condition pour que deux groupes homogènes soient semblables par une transformation de contact homogène s'exprime au moyen des fonctions caractéristiques de la manière suivante : le premier groupe étant défini par les fonctions $H_1, \ldots, H_r$, liées par les relations (24), et telles que $H_1, \ldots, H_m$ sont indépendantes, tandis que $H_{m+1}, \ldots, H_r$ sont fournies par les relations

$$H_{m+\mu} = \Omega_\mu(H_1, \ldots, H_m),$$

il faut et il suffit qu'on puisse choisir, pour définir le second, r fonctions $K_1, \ldots, K_r$, liées par les relations

$$(K_i K_k) = \sum_1 c_{iks} K_s,$$

et telles de plus que $K_1, \ldots, K_m$ soient indépendantes, et que l'on ait les relations

$$K_{m+\mu} = \Omega_\mu(K_1, \ldots, K_m).$$

Cela résulte de ce que la transformation de contact homogène cherchée doit changer $H_1, \ldots, H_r$ respectivement en $K_1, \ldots, K_r$.

Des transformations infinitésimales homogènes on passe sans peine aux transformations quelconques. En particulier, pour que r de ces transformations $W_1, \ldots, W_r$ engendrent un groupe à r paramètres, il faut et il suffit que les fonctions caractéristiques $W_1, \ldots, W_r$ soient linéairement indépendantes et satisfassent à des relations de la forme

$$\{W_i W_k\} = \sum_s c_{iks} W_s.$$

Ici encore les constantes c_{iks} sont celles qui définissent la structure du groupe.

Chapitres XIX et XX. — M. Sophus Lie résout dans ces Chapitres le difficile problème qui consiste à déterminer tous les

groupes de transformations de contact homogènes ayant une structure donnée. La solution est fondée sur la considération d'un groupe linéaire homogène auquel M. Lie donne le nom de groupe dualistique du groupe adjoint. D'une manière générale, deux groupes linéaires homogènes sont dits *dualistiques* s'ils dérivent l'un de l'autre par la transformation de contact dualistique

$$x'_i = -\frac{p_i}{\sum x_k p_k}, \qquad p'_i = x_i \sum x_k p_k,$$

qui est définie par la relation

$$x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n + 1 = 0.$$

Le dualistique du groupe adjoint s'introduit quand on effectue dans les fonctions caractéristiques $H_1, \ldots, H_r$ d'un groupe de contact homogène le changement de variables défini par les équations de la transformation finie générale du groupe

$$x'_i = F_i(x, p; a_1, \ldots, a_r), \qquad p'_i = P_i(x, p; a_1, \ldots, a_r)$$

On a alors des relations de la forme

$$H_k(x', p') = \sum_j w_{kj}(a_1, \ldots, a_r) H_j(x, p),$$

ou, en abrégé

$$H'_k = \sum_j w_{kj}(a_1, \ldots, a_r) H_j;$$

ces équations définissent un groupe de transformations des variables H. C'est justement le dualistique du groupe adjoint, et ses transformations infinitésimales sont

$$B_i f = \sum_{ks} c_{iks} H_s \frac{\partial f}{\partial H_k}.$$

Ceci posé, pour obtenir tous les groupes de transformations de contact homogènes de la structure c_{iks}, on doit commencer par chercher tous les systèmes d'équations en $H_1, \ldots, H_r$ qui admettent les transformations infinitésimales

$$Bf = H_1 \frac{\partial f}{\partial H_1} + \ldots + H_r \frac{\partial f}{\partial H_r}, \qquad B_i f = \sum_{ks} c_{iks} H_s \frac{\partial f}{\partial H_k},$$

en excluant ceux qui entraîneraient une relation de la forme $c_1 H_1 + \ldots + c_r H_r = 0$. Soit

$$H_{m+j} = w_{m+j}(H_1, \ldots, H_m), \qquad (j = 1, 2, r - m)$$

l'un des systèmes trouvés : on déterminera alors un groupe H_1, ..., H_r de la structure donnée et dont les fonctions caractéristiques vérifient les relations (26), ce qui revient à la détermination d'un groupe homogène de fonctions ayant une structure donnée. Les autres groupes correspondant aux mêmes relations (25) sont semblables à celui-là par des transformations de contact homogènes. M. Lie donne de plus le moyen de reconnaître dans quel cas deux systèmes d'équations (25) fournissent deux types de groupes distincts.

Il résulte de là que la solution du problème dépend au plus de l'intégration d'équations différentielles ordinaires. Certaines parties du problème n'exigent même, ainsi que le montre M. Lie, aucune intégration, d'autres une quadrature seulement.

M. Lie fait enfin l'application de sa méthode à divers exemples.

Chapitre XXI. — Lorsqu'on cherche les groupes de transformations de contact à un nombre de variables donné, il faut tenir compte d'une notion essentielle, celle de l'irréductibilité de ces groupes. Un groupe de transformations de contact est dit réductible s'il existe une transformation de contact qui le change en un groupe de transformations ponctuelles prolongées; il est irréductible dans le cas contraire. M. Lie cherche un critérium qui permette de reconnaître si un groupe est réductible.

Dans le cas d'un groupe homogène, l'auteur arrive analytiquement au résultat suivant : Pour que le groupe $H_1, \ldots, H_r$ soit réductible, il faut et il suffit qu'il existe n fonctions indépendantes $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$ homogènes de degré zéro en $p_1, \ldots, p_n$, qui soient deux à deux en involution, et satisfassent à des identités de la forme

$$(H_k \Xi_\nu) = \Phi_{k\nu}(\Xi_1, \ldots, \Xi_n).$$

Ce qu'on peut énoncer en disant qu'il existe un système complet de forme

$$A_1 f = 0, \qquad \ldots \qquad A_{n-1} f = 0, \qquad \sum p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0.$$

invariant par le groupe, et dont les solutions soient deux à deux en involution.

Géométriquement, l'on peut dire (et M. Sophus Lie retrouve ce résultat directement) : Pour qu'un groupe de transformations de contact homogènes en $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ soit réductible, il faut et il suffit qu'il laisse invariante une famille de ∞^n multiplicités M_{n-1} de l'espace $x_1, \ldots, x_n$, dont les éléments ne satisfassent tous à aucune relation de la forme $F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$.

On en déduit que, pour qu'un groupe de transformations de contact de l'espace $z, x_1, \ldots, x_n$ soit réductible, il faut et il suffit qu'il laisse invariante une famille de ∞^{n+1} multiplicités M_n dont les éléments ne satisfassent pas tous à une même relation $\Omega(z, x, p) = 0$. On peut dire enfin qu'il doit laisser invariant un système complet à n équations, dont les intégrales soient deux à deux en involution.

Chapitre XXII. — M. Lie termine la théorie générale des groupes de transformations de contact par une belle étude sur les invariants différentiels de ces groupes.

Étant donnée une transformation de contact

$$(26) \qquad z' = Z(z, x, p), \qquad x'_i = X_i(z, x, p), \qquad p'_i = P_i(z, x, p),$$

nous avons vu que les systèmes d'équations de la forme

$$(27) \qquad z - F(x_1, \ldots, x_n), \qquad p_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

ont la propriété de se changer en général, par cette transformation, en systèmes de la même forme. On peut donc dire que la fonction $z = F(x_1, \ldots, x_n)$ se change en une fonction z' de $x'_1, \ldots, x'_n$, et que les dérivées partielles $p'_1, \ldots, p'_n$ de cette fonction z' s'expriment en fonction de $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. M. Sophus Lie montre que cette dernière propriété s'étend aux dérivées partielles d'ordre plus élevé, c'est-à-dire que les dérivées partielles d'un ordre quelconque N de la fonction z' s'expriment en fonction de $z, x_1, \ldots, x_n$ et des dérivées partielles de z jusqu'à l'ordre N. Le calcul de ces expressions se fait d'après les mêmes principes que pour les groupes de transformations ponctuelles. Par exemple, les formules

$$p'_{ik} = P_{ik}(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n, p_{11}, \ldots, p_{\mu\nu}, \ldots, p_{n,n}),$$

qui fournissent les dérivées du second ordre de z', s'obtiennent en exprimant que la transformation

$$(28) \qquad z' = Z, \qquad x'_i = X_i, \qquad p'_i = P_i, \qquad p'_{ik} = P_{ik}$$

laisse invariant le système des équations de Pfaff

$$dz - \sum_i p_i\, dx_i = 0, \qquad dp_k - \sum_i p_{ki}\, dx_i = 0.$$

M. Lie dit que la transformation (28) est une transformation prolongée issue de la transformation (26). Cette transformation fournit naturellement des transformations prolongées du troisième ordre, du quatrième, et ainsi de suite jusqu'à l'ordre N en général.

Si nous considérons maintenant un groupe de transformations de contact, ses transformations prolongées d'ordre N forment également un groupe. Ce groupe est isomorphe au groupe donné, et ses transformations infinitésimales s'obtiennent en prolongeant, d'après les mêmes principes, les transformations infinitésimales du groupe.

Or on peut toujours prendre N assez grand pour que le système complet obtenu en égalant à zéro les symboles des transformations infinitésimales de ce groupe prolongé ait des intégrales. Ces intégrales sont les invariants différentiels du groupe proposé. D'où cette conséquence remarquable, que tout groupe de transformations de contact possède une infinité d'invariants différentiels, qui s'obtiennent en intégrant des systèmes complets.

V. Dans la dernière Partie, M. Sophus Lie s'occupe de la détermination de plusieurs classes importantes de groupes de transformations de contact.

Chapitre XXIII. — M. Lie commence par la recherche de tous les groupes irréductibles de transformations de contact du plan. Nous allons indiquer la marche suivie par l'illustre savant pour résoudre ce difficile problème.

Pour qu'un groupe de transformations de contact du plan soit réductible, il faut et il suffit (*voir* Chap. XXI) qu'il laisse invariante une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, dont deux intégrales quelconques soient en involution.

Cette condition se transforme dans la suivante : le groupe doit laisser invariant un système de la forme

$$(29)\qquad \frac{dx}{\alpha(x, z, y)} = \frac{dz}{y\,\alpha(x, z, y)} = \frac{dy}{\beta(x, z, y)},$$

(y est mis ici à la place de p); ou encore il doit laisser invariante, outre l'équation $dz - y\,dx = 0$, une autre équation de Pfaff.

Soit G le groupe considéré. M. Lie interprète z, x, y comme les coordonnées d'un point de l'espace à trois dimensions. Le groupe G échange les points de cet espace, et comme il laisse invariante l'équation

$$(30)\qquad dz - y\,dx = 0,$$

il échange aussi les courbes intégrales de cette équation. Mais, si nous voulons qu'il soit irréductible, il ne doit laisser invariante aucune famille de ∞^2 de ces courbes intégrales; il en résulte en particulier, que, comme groupe de l'espace, il doit être transitif.

Considérons ensuite les transformations de G qui laissent invariant un point z, x, y arbitrairement choisi : elles forment un groupe Γ qui échange les directions (dx, dy, dz) des éléments linéaires du point. De plus, à cause de l'invariance de l'équation (30), Γ échange entre elles celles de ces directions qui font partie du faisceau plan défini par cette équation : soit Γ' le groupe en $dx = x'$, $dy = y'$, suivant lequel a lieu cet échange.

Ceci posé, si G est réductible, le groupe Γ' laisse invariante la direction définie par les équations (29); et, réciproquement, si Γ' laisse invariante une direction du faisceau (30), G laisse invariant le système de la forme (29) qui fournit, en chaque point, cette direction.

De sorte que, pour que G soit irréductible, il faut et il suffit que Γ' ne laisse invariante aucune direction, c'est-à-dire que ce soit en $x'y'$ le groupe linéaire homogène général, ou le groupe linéaire homogène spécial.

Nous pouvons supposer maintenant que le point considéré soit l'origine, et considérer les transformations infinitésimales de G développées suivant les puissances croissantes de z, x, y; elles se rangent alors en transformations d'ordre zéro, du premier ordre, et d'ordre supérieur. G, devant être transitif, contient trois trans-

formations infinitésimales d'ordre zéro, qui peuvent s'écrire, en mettant p, q, r respectivement à la place de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

$$p + \ldots \quad q + \ldots, \quad r + \ldots$$

(les termes non écrits étant d'ordre supérieur aux termes écrits). D'autre part, les transformations infinitésimales de Γ' se déduisant des transformations du premier ordre de G, il résulte de la condition trouvée que ces dernières ne peuvent avoir que l'une des quatre formes suivantes :

$$\text{(I)} \quad (x+\alpha z)q + \ldots, \quad (x+\alpha z)p - (y+\beta z)q + \ldots, \quad (y+\beta z)p + \ldots,$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (x+\alpha z)q + \ldots, & (x+\alpha z)p - (y+\beta z)q + \ldots, \\ (y+\beta z)p + \ldots, & (x+\alpha z)p + (y+\beta z)q + 2z(r - \alpha p - \beta q) + \ldots, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad xq + \ldots, \quad xp - yq + \ldots, \quad yp + \ldots, \quad zp + \ldots, \quad zq + \ldots,$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} xq + \ldots, & xp - yq + \ldots, \quad yp + \ldots, \\ zp + \ldots, & zq + \ldots, \quad xp + yq + 2zr + \ldots. \end{cases}$$

Considérons par exemple le premier cas. En posant

$$x + \alpha z = x', \quad y + \beta z = y', \quad z = z',$$

on ramène immédiatement les transformations d'ordre zéro et du premier ordre à la forme

$$(31) \quad p' + \ldots, \quad q' + \ldots, \quad r' + \ldots, \quad x'q' + \ldots, \quad x'p' - y'q' + \ldots, \quad y'p' + \ldots.$$

M. Lie montre ensuite, en s'appuyant sur ce que le crochet de deux transformations infinitésimales du groupe appartient au groupe, qu'il est impossible qu'il en existe d'ordre supérieur au premier. Le groupe se compose donc des six transformations infinitésimales (31) seulement. M. Sophus Lie parvient, au moyen de l'identité de Jacobi, à trouver les formules qui doivent exprimer les crochets de deux quelconques d'entre elles au moyen de ces transformations; et ces formules lui permettent enfin de montrer qu'on peut toujours, par un changement de variables, ramener le groupe à une forme canonique simple.

En opérant de même dans les autres cas, M. Lie obtient le résultat suivant, qui a une importance capitale :

Tout groupe irréductible de transformations de contact du plan (z, x) a six, sept, ou dix paramètres, et est semblable

par une transformation de contact à l'un des trois groupes suivants :

$$(G_6)\quad \boxed{p,\quad q+xr,\quad r,\quad xq+\tfrac{1}{2}x^2r,\quad xp-yq,\quad yp+\tfrac{1}{2}y^2r}$$

$$(G_7)\quad \boxed{\begin{array}{c} p,\quad q+xr,\quad r,\quad xq+\tfrac{1}{2}x^2r,\quad xp-yq,\quad yp+\tfrac{1}{2}y^2r \\ xp+yp+2zr \end{array}}$$

$$(G_{10})\quad \boxed{\begin{array}{c} p,\quad q+xr,\quad r,\quad xq+\tfrac{1}{2}x^2r,\quad xp-yq,\quad yp+\tfrac{1}{2}y^2r \\ xp+yq+2zr,\quad (z-xy)p-\tfrac{1}{2}y^2q-\tfrac{1}{2}xy^2r,\quad \tfrac{1}{2}x^2p+zq+xzr \\ (xz-\tfrac{1}{2}x^2y)p+(yz-\tfrac{1}{2}xy^2)q+(z^2-\tfrac{1}{4}x^2y^2)r \end{array}}$$

Chapitre XXIV. — Les trois groupes précédents jouissent de propriétés importantes. Le groupe G_{10} est simple; le groupe G_7 en est un sous-groupe; enfin le groupe G_6 est un sous-groupe invariant du précédent.

Chacun de ces groupes laisse invariante une équation différentielle ordinaire du troisième ordre et une seule : c'est l'équation $\frac{d^3z}{dx^3}=0$. Le groupe G_{10} est le plus grand groupe de transformations de contact que cette équation admette; on peut encore dire qu'il échange entre elles les paraboles

$$z=a+2bx+cx^2,$$

qui sont les courbes intégrales de l'équation.

M. Lie donne ensuite une transformation de contact qui change cette famille de paraboles dans la famille des hyperboles équilatères ayant leurs asymptotes parallèles aux axes de coordonnées; une autre permet de passer de la famille de paraboles à la famille formée par tous les cercles du plan. De sorte que tout groupe irréductible de transformations de contact du plan, à dix paramètres, est semblable par une transformation de contact au groupe des transformations de contact qui changent tout cercle en cercle.

Interprété comme groupe de transformations de l'espace, le

groupe G_{10} est semblable au groupe de toutes les transformations projectives qui laissent invariant un complexe linéaire donné. Cette correspondance remarquable fournit à M. Lie plusieurs propriétés nouvelles de ce groupe; entre autres, celles-ci : qu'il ne possède aucun sous-groupe à plus de sept paramètres; et qu'il ne laisse invariantes, en plus de l'équation du troisième ordre indiquée et d'une équation du septième ordre, que des équations différentielles d'ordre supérieur au huitième.

M. Lie considère enfin les cercles

$$(x-a)^2+(z-c)^2+b^2=0;$$

au groupe des transformations de contact qui échangent ces cercles correspond un groupe de transformations en a, b, c, qui donne la loi de cet échange.

Ce groupe, si l'on interprète a, b, c comme coordonnées d'un point, n'est autre que le groupe de transformations ponctuelles conformes de l'espace.

D'où ce résultat remarquable que le groupe projectif d'un complexe linéaire est isomorphe (mais non semblable) au groupe conforme. Ces deux groupes sont de plus les représentants des deux seuls types de groupes de transformations ponctuelles de l'espace qui soient isomorphes aux groupes irréductibles à dix paramètres de transformations de contact du plan.

Chapitre XXV. — Ce Chapitre contient des développements entièrement analogues à ceux du Chapitre XXIII, et qui conduisent M. Sophus Lie aux beaux résultats suivants.

Si l'on considère, parmi les groupes de transformations de contact de l'espace, z, x_1, ..., x_n, ceux qui, considérés comme groupes de transformations ponctuelles de l'espace z, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n [1], sont transitifs, et, de plus, échangent, suivant la loi la plus générale, les directions passant par un point et appartenant au faisceau défini par l'équation $dz-y_1\,dx_1-\ldots-y_n\,dx_n=0$, ces groupes sont irréductibles, et ont $(n+1)(2n+1)$, ou $(n+1)(2n+1)+1$, ou $(n+1)(2n+3)$ paramètres; à chacun de ces trois cas correspond un groupe type, que M. Lie détermine.

---

[1] M. Lie remplace ici, pour la commodité des notations, p_1, ..., p_n respectivement par y_1, ..., y_n.

Ces trois groupes types jouissent de propriétés analogues aux groupes irréductibles du plan; en particulier, ils laissent invariante une famille de multiplicités ponctuelles à $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ paramètres, à savoir celle qui a pour équation

$$z = a + \sum_i b_i x_i + \sum_{ik} c_{ik} x_i x_k.$$

Chapitre XXVI. — M. Lie termine l'Ouvrage par de nouvelles indications sur la manière de déterminer les groupes de transformations de contact de l'espace $z, x_1, \ldots, x_n$. Dans les calculs précédents, l'auteur s'était servi exclusivement des développements en série des transformations infinitésimales de contact. M. Lie montre que l'on pourrait opérer sur les fonctions caractéristiques de ces transformations, à condition de grouper ensemble, dans les développements de ces fonctions, non pas les termes de même degré, mais ceux de même rang (*Stufe*) : un terme $x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} y_1^{\mu_1} \ldots y_n^{\mu_n} z^{\nu}$ est dit de rang k, si l'on a

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu_1 + \ldots + \mu_n + 2\nu = k.$$

L'avantage de cette modification réside en ce que si U et V commencent par des termes respectivement de rang i et k, le crochet (UV) commence par des termes de rang $(i+k-2)$, qui ne dépendent que des termes de rang i et k de U et V.

On classera alors, par analogie avec ce qu'on faisait pour les transformations infinitésimales, les fonctions caractéristiques d'un groupe en fonctions de rang zéro, de rang un, et ainsi de suite.

En particulier, tout groupe contient une fonction caractéristique de rang zéro; et si l'on veut que, comme groupe de transformations ponctuelles de l'espace $z, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, il soit transitif, il doit contenir en plus $2n$ fonctions caractéristiques de rang un, c'est-à-dire de la forme

$$x_i + \ldots, \quad y_i + \ldots, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour montrer la portée de ces considérations si ingénieuses, il nous suffira de citer en terminant le résultat suivant auquel elles conduisent M. Sophus Lie, et dont le lecteur admirera la généralité.

Un groupe étant défini par les fonctions caractéristiques

$$N = 1 + \ldots \quad X_i = x_i + \ldots \quad Y_i = y_i + \ldots \quad V_{ik}^{h} = v_{ik}^{h}(x, y, z) + \ldots$$

(où les termes non écrits sont de rang supérieur, et où les m_k fonctions de rang k : $V_{ik}^{(k)}$ ne peuvent fournir, combinées linéairement, aucune fonction de rang supérieur); si ce groupe contient une fonction caractéristique de la forme

$$Z = \left(z - \frac{1}{2}\sum_{\nu} x_\nu y_\nu\right) + \ldots,$$

il est semblable par une transformation de contact au groupe de transformations de contact réduit

$$\overline{N} = 1, \qquad \overline{X}_i = x_i, \qquad \overline{Y}_i = y_i, \qquad \overline{V}_{ik}^{(k)} = v_{ik}^{(k)}(x, y, z).$$

E. Vessiot.

FORSYTH. — Theory of differential equations, Part I. 1 vol. in-8°, 340 p. Cambridge, University Press, 1890.

L'Ouvrage *Theory of differential equations*, dont M. Forsyth vient de publier le premier volume, est destiné à faire suite à son Livre : *Treatise on differential equations;* il ne s'adresse donc qu'à des personnes déjà familiarisées avec la théorie des équations différentielles. Cette première Partie contient les théories des équations aux différentielles totales et le problème de Pfaff. L'ordre choisi, pour l'exposition, est l'ordre historique dont les avantages sont indiscutables, mais qui oblige le lecteur à suivre pas à pas les essais des divers mathématiciens qui ont étudié le problème de Pfaff et à en subir les longueurs; cet ordre nécessite aussi quelques répétitions. Quoi qu'il en soit, le Livre de M. Forsyth sera de la plus grande utilité pour les travailleurs; il contient de nombreux renseignements bibliographiques et pourra souvent éviter la lecture des Mémoires originaux dont il donne d'excellents résumés. Les professeurs y trouveront de très bons exercices à proposer à leurs élèves, les uns traités dans l'Ouvrage, les autres à faire. En somme, c'est un Livre qui a sa place marquée dans toute bibliothèque scientifique.

Les deux premiers Chapitres contiennent la théorie des équations aux différentielles totales. Ce ne sont que des compléments des §§ 150-164 du *Treatise on differential equations,* car on y suppose connue toute la théorie de Jacobi des systèmes complets

d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Les théories d'une seule équation aux différentielles totales sont exposées dans le premier Chapitre (méthodes d'Euler, Bertrand, Natani, du Bois-Reymond); le second Chapitre est, presque tout entier, réservé à la théorie du *multiplicateur* de Jacobi et à la méthode de Mayer pour un système d'équations aux différentielles totales. Cette dernière méthode, si remarquable, est présentée avec les développements qu'elle mérite; toutefois l'auteur n'a pas cru devoir montrer dans quelles conditions il existe des intégrales *régulières* au voisinage des valeurs initiales des variables indépendantes.

Le problème de Pfaff fournit la matière des onze derniers Chapitres. Le Chapitre III contient l'historique du problème de Pfaff : il sert, pour ainsi dire, de Table des matières aux dix Chapitres suivants. La méthode même de Pfaff, perfectionnée et complétée par Gauss, Jacobi et Cayley, est exposée dans le Chapitre IV. L'intérêt historique de cette méthode justifie l'étendue des développements avec lesquels M. Forsyth l'a exposée. L'ordre qu'il a adopté l'oblige ensuite d'intercaler, entre la méthode de Pfaff et celle de Natani la méthode de Grassmann (Chap. V) qui est toute spéciale et dont la lecture exige une connaissance assez approfondie de la théorie des variables complexes dépendant de plusieurs unités fondamentales [1].

Les travaux de Natani et de Clebsch occupent les Chapitres VI et VIII et sont séparés par le Chapitre VII où l'auteur montre quelles sont les applications intéressantes du problème de Pfaff à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Ces deux dernières méthodes, comme d'ailleurs l'auteur l'indique au Chapitre III, ont beaucoup de points communs [2] : tandis que, dans la méthode de Pfaff, la réduction du nombre des éléments différentiels dans l'équation

$$\Omega = \sum_{s=1}^{s=n} X_s \, dx_s = 0$$

---

[1] *Voir* GRASSMANN, *Ausdehnungslehre*, 1862.

[2] *Voir*, pour la comparaison des méthodes de Natani et de Clebsch, HAMBURGER, *Grunert's Archiv*, t. LX, p. 185-214.

s'effectue par des transformations successives, elle est obtenue par Natani et Clebsch au moyen des déterminations successives des équations du système intégral équivalent à l'équation

$$\Omega = 0.$$

Les travaux de M. Sophus Lie sont exposés dans les deux Chapitres suivants. Le Chapitre IX contient la théorie des *transformations de contact :* détermination des transformations de contact les plus générales et des relations fondamentales auxquelles elles satisfont, des transformations en x et p (*cylindrical transformations*), des transformations homogènes. Le Chapitre X contient l'application de la théorie précédente au problème de Pfaff. Ces deux Chapitres sont particulièrement intéressants; l'auteur y a adopté un mode d'exposition très personnel et très ingénieux ([1]). La méthode de Frobenius, dans le Chapitre XI, qui repose sur la considération des invariants différentiels, aurait pu être rattachée étroitement aux travaux de M. Lie, de la même façon que celle de M. Darboux (Chap. XII) y a été rattachée. Le Livre se termine par un exposé (Chap. XIII) des essais qui ont été tentés pour résoudre le problème de l'intégration de *plusieurs* équations de Pfaff *simultanées,* et la conclusion montre que la solution de ce problème dépend de l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre avec plusieurs fonctions inconnues, intégration que l'on ne sait effectuer que dans quelques cas très particuliers. C. B.

([1]) Dans le Chapitre IX, M. Forsyth s'est d'ailleurs rencontré, pour la marche qu'il a suivie, avec M. Goursat (Chapitre XI des Leçons *Sur les équations aux dérivées partielles*). Les deux Volumes ont paru à peu près en même temps.

MÉLANGES.

SUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. E. HUMBERT,
Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

Il semble qu'on puisse tirer parti, dans la théorie des résidus quadratiques, de la remarque bien simple que voici :

Si p est un nombre premier plus grand que 3, il y a au moins un carré parmi les nombres de la suite

$$\frac{p-1}{2}+1, \quad \frac{p-1}{2}+2, \quad \ldots, \quad p-1.$$

Soit en effet h la racine carrée à une unité près de $\frac{p-1}{2}$. Si la proposition énoncée n'est pas vraie, on aura

$$(h+1)^2 > p, \qquad 2h+1 > p-h^2;$$

mais, d'autre part, h^2 est au plus égal à $\frac{p-1}{2}$; on aura donc

$$2h+1 > p-\frac{p-1}{2}, \qquad h > \frac{p-1}{4}$$

et, par conséquent

$$\frac{p-1}{2} \geqq h^2 > \frac{(p-1)^2}{16};$$

en comparant les termes extrêmes, on en conclut

$$p < 9;$$

il n'y a donc de doute que pour 7 et 5; pour ces deux nombres, la proposition énoncée se vérifie de suite; elle s'étend même évidemment à tous les nombres entiers impairs sauf 3 et 9.

Supposons que p soit un nombre premier plus grand que 3 et considérons la suite des $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques de p réduits à leur plus petite valeur absolue possible; si p est de la forme $4n+1$, -1 est résidu quadratique, et les termes de la suite sont deux par deux égaux et de signes contraires; si p est de la forme $4n+3$, la suite des résidus quadratiques ne peut pas pré-

senter deux termes égaux et de signes contraires, puisque -1 est non résidu; les valeurs absolues des $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques étant différentes ne peuvent être autres que les nombres

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \frac{p-1}{2}.$$

Si l'on suppose les résidus rangés de manière que leurs valeurs absolues aillent en croissant, la suite commencera par $+1$ et contiendra, d'après la proposition établie au début, des termes négatifs; il y aura donc un résidu positif α suivi d'un résidu négatif $-\alpha-1$; on pourra donc satisfaire aux congruences

$$x^2 \equiv \alpha \pmod{p},$$
$$y^2 \equiv -\alpha-1 \pmod{p},$$

et par suite à la suivante

$$x^2+y^2+1 \equiv 0 \pmod{p};$$

donc tout nombre premier de la forme $4n+3$ divise une somme de trois carrés; dans le cas où p est de la forme $4n+1$, on voit de suite que p divise la somme de deux carrés. Le fait qu'un nombre premier divise toujours une somme de deux ou de trois carrés, premiers entre eux, joint à l'identité d'Euler sur le produit d'une somme de quatre carrés par une somme de quatre carrés, suffit, comme on sait, à démontrer très aisément le célèbre théorème de Lagrange, que *tout nombre entier est la somme de quatre carrés.*

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

R. BETTAZZI. — Teoria delle grandezze. Opera premiata della R. Accademia dei Lincei. In-4°, VII-181 p. Pisa, Enrico Spoerri, 1890.

I. Nous sommes heureux de signaler ici un Ouvrage qui se distingue de tant d'autres analogues par la généralité du point de vue fondamental, par la rigueur des raisonnements, par l'ampleur des développements et par la nouveauté et l'importance de quelques-uns des résultats.

Le point de départ de l'auteur est la définition suivante de *grandeur*, due à H. Grassmann (¹) :

Si, étant donné un ensemble de choses, on peut dire si deux quelconques d'entre elles sont *égales* ou *inégales*, quelle que soit d'ailleurs la nature des faits exprimés par ces deux mots, pourvu qu'ils s'excluent mutuellement et qu'ils remplissent deux conditions qu'on énoncera tout à l'heure, on donne à ces choses le nom de *grandeurs* (§ 3).

Suivant que deux grandeurs A et B sont égales ou inégales, on écrit $A = B$ ou $A \neq B$; et les deux conditions, auxquelles doit satisfaire le concept d'égalité, sont :

a. Si $A = B$, $B = A$;
b. Si $A = B$ et $B = C$, $A = C$.

Désignons maintenant (§ 5-8) par $S(A, B, C, \ldots)$ une *opération* effectuée sur les grandeurs A, B, C, ..., c'est-à-dire un acte par lequel on passe de ces grandeurs à une grandeur nouvelle M (*résultante*); nous écrirons alors

$$S(A, B, C, \ldots) = M.$$

Nous supposerons l'opération S associative, commutative et univoque et lui attribuerons en outre les propriétés suivantes :

a. Si $B = C$,

$$S(A, B) = S(A, C);$$

(¹) *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin, 1861.

b. Si $B \neq C$,

$$S(A, B) \neq S(A, C)\ (^1).$$

On dit que M est (§ 9) *multiple* de A, si

$$(\alpha) \qquad M = S(A, A, A, \ldots),$$

et que M, N sont *équimultiples* respectivement de A et de B, si, étant

$$(\beta) \qquad M = S(A, A, A, \ldots), \qquad N = S(B, B, B, \ldots),$$

on peut faire correspondre à chaque A de la première formule un des B de la seconde et réciproquement. On peut exprimer plus commodément la relation (α) par

$$M = mA,$$

en adoptant une même lettre m [*symbole de multiplicité* (§ 10)], ou bien deux lettres qu'on doit considérer comme équipollentes, pour toutes les grandeurs équimultiples. C'est ainsi qu'on pourrait écrire les relations (β) sous la forme

$$M = pA, \qquad N = pB$$

ou bien

$$M = pA, \qquad N = qB, \qquad p = q.$$

Il suit de là qu'on peut regarder les symboles de multiplicité comme des grandeurs, en établissant que deux symboles sont égaux lorsqu'ils appartiennent à deux grandeurs équimultiples.

L'opération D *inverse* de S est définie (§ 11) par

$$D[S(A, B), A] = B;$$

elle n'est pas commutative. On dit que D(C, A) est la *divergence* de C et de A. La grandeur D(A, A) ou O s'appelle (§ 13) le *module* de l'opération S; elle jouit des propriétés suivantes :

$$D(B, B) = D(A, A) = O, \qquad S(A, O) = A.$$

Deux grandeurs A, A′ sont (§ 15) *opposées*, lorsqu'on a

$$S(A, A') = O.$$

---

(1) Noth (*Die Arithmetik der Lage*) donne à cette propriété le nom de *dependance*.

On dit qu'un ensemble de grandeurs forme (§ 16) une *classe* par rapport à l'opération S, lorsque la résultante de deux grandeurs quelconques de l'ensemble suivant cette opération est elle-même une grandeur de l'ensemble. On peut toujours adjoindre à une classe quelconque le module O.

Une classe est (§ 20-21) *à une dimension,* si l'on peut déterminer laquelle de deux grandeurs inégales quelconques de la classe est la *plus grande* ($>$) et laquelle la *plus petite* ($<$), quel que soit d'ailleurs le sens de ces mots, pourvu seulement que les lois suivantes aient lieu :

Si $A > B$ et $A' = A$, $A' > B$;
Si $A > B$, $B < A$;
Si $A = B$ et $B > C$, $A > C$;
Si $A > B$ et $B > C$, $A > C$;
Si $A > B$, $S(A, C) > S(B, C)$.

Si toutes les grandeurs d'une classe sont plus grandes que O, on dit (§ 28) que la classe est *à un seul sens;* si au contraire les grandeurs de la classe sont deux à deux opposées, elle est *à deux sens*. Dans tout autre cas, en adjoignant à la classe donnée celles d'entre les grandeurs opposées aux grandeurs de la classe qui ne lui appartiennent pas, on la transforme en une classe à deux sens.

II. L'étude des classes à une dimension et à un sens est incontestablement la partie la plus intéressante et la plus originale de l'Ouvrage, et c'est pour cela que nous nous permettons de nous y arrêter un peu longuement.

Il nous faut avant tout expliquer quelques-unes des nombreuses dénominations adoptées par l'auteur.

Une classe de grandeurs est (§ 31) *propre,* si, A, B désignant deux éléments quelconques de la classe, et étant $A > B$, la divergence $D(A, B)$ appartient à la classe. Nous supposerons toujours tacitement que les classes auxquelles nous aurons affaire dans la suite soient propres.

Une classe est (§ 30) *limitée,* si elle contient une grandeur (*grandeur limitante, grandezza limitatrice*) différente de O et plus petite que toute autre grandeur de la classe à l'exception de O. Une classe limitée contient (§ 33) le module O, la grandeur limi-

tante et tout ses multiples, et éventuellement aussi des grandeurs plus grandes que tout multiple de la grandeur limitante.

La *grandeur infinie* Ω est (§ 34) une grandeur qu'on adjoint à toute classe et qu'on définit comme étant plus grande que toute grandeur de la classe; elle remplit les conditions

$$S(\Omega, A) = S(A, \Omega) = \Omega, \qquad D(\Omega, A) = \Omega.$$

La propriété *b* de l'opération S ne subsiste donc plus par rapport à la grandeur Ω, car on a

$$S(\Omega, B) = S(\Omega, C),$$

pour $B \gtreqless C$. C'est pour cela que, tout fauteurs que nous sommes de l'introduction des grandeurs infinies dans les Mathématiques, nous ne saurions, *dans la théorie de M. Bettazzi,* considérer Ω comme une vraie grandeur, mais seulement comme un symbole apte à donner plus de brièveté et de netteté aux énoncés. En disant par exemple qu'une classe contient Ω comme grandeur *maximum,* on doit entendre simplement, à notre avis, qu'il n'y a pas de grandeur *maximum* dans la classe. On pourrait bien remarquer que la grandeur O a un sens analogue; cela est vrai, mais il n'y a pas de difficulté à considérer O comme une vraie grandeur, puisque cela ne nous oblige pas à modifier la nature de l'opération S.

III. On peut (§ 37) décomposer une classe en deux groupes Π_1 et Π_2 tels que :

a. Chaque grandeur de la classe appartienne à l'un des groupes et à l'un seulement;

b. Si P_1 appartient à Π_1, il en soit de même de toute grandeur $P' < P_1$; et, si P_2 appartient à Π_2, il en soit de même de toute grandeur $P'' > P_2$.

Il peut arriver alors :

1° Que Π_1 contienne une grandeur *maximum et* Π_2 une grandeur *minimum* (*succession*);

2° Que Π_1 contienne une grandeur maximum *ou* Π_2 une grandeur *minimum* (*liaison, collegamento*);

3° Que Π_1 n'ait pas de grandeur *maximum*, ni Π_2 de grandeur *minimum* (*scission, spezzamento*).

Dans ce dernier cas, si, étant donnée arbitrairement une grandeur A de la classe, on peut toujours choisir deux grandeurs appartenant respectivement à Π_2 et à Π_1 dont la divergence soit moindre que A, on a en particulier une *section;* sinon, on a un *saut,* dont l'*ampleur* est la différence *minimum* entre deux grandeurs de Π_2 et de Π_1.

Les successions peuvent se présenter dans les classes limitées seulement, les liaisons et les sections dans les classes illimitées seulement, les *sauts* dans les unes et les autres.

Un *couple de séries de grandeurs* est constitué (§ 45) par deux groupes de grandeurs de telle sorte, que les éléments du premier groupe soient plus petits que ceux du second, et que le premier groupe n'ait pas de grandeur *maximum*, ni le second groupe de grandeur *minimum*. On dit que les deux séries sont *convergentes dans la classe totale,* si l'on peut choisir deux éléments appartenant respectivement aux deux séries, dont la divergence soit moindre qu'une grandeur arbitrairement donnée de la classe. Il se peut que deux séries, tout en n'étant pas convergentes dans la classe totale, le soient *dans une sous-classe* Π contenant toutes les grandeurs des deux séries; c'est-à-dire qu'on puisse toujours choisir dans ces séries deux éléments, dont la divergence soit moindre qu'une grandeur arbitrairement donnée de la sous-classe Π.

Une classe qui n'admet ni successions, ni sauts, pour aucun groupement possible de ses éléments est *connexe* (§ 48); elle est nécessairement illimitée.

Si une classe Γ n'admet point de sections, et si chaque section de toute sous-classe possible de Γ est *remplie* par une ou plusieurs grandeurs de Γ [1], la classe Γ est *fermée* (§ 48).

Une classe connexe et fermée est *continue* (§ 48).

Il est bien de remarquer ici que les mots *connexe* et *fermé* ont au fond le même sens que les termes correspondants *zusammenhängend* (*bien enchaîné*) et *abgeschlossen* dans la théorie

---

[1] Il faut expliquer cette expression. Supposons qu'une sous-classe Π d'une classe Γ soit décomposée en deux groupes Π_1, Π_2 formant une section; s'il y a dans la classe Γ des grandeurs qui soient plus grandes que toute grandeur de Π_1 et plus petites que toute grandeur de Π_2, on dit que ces grandeurs *remplissent* la section de Π (§ 47).

de M. G. Cantor. Quant à la définition de continu, on démontre aisément que tout ensemble bien enchaîné est *condensé en soi* (*insichdicht*), de façon qu'on peut tout aussi bien définir le continu au sens de M. Cantor comme un ensemble bien enchaîné et fermé, ce qui met en lumière la coïncidence avec la définition de M. Bettazzi.

Parmi les théorèmes se rapportant aux classes que nous considérons, nous citons seulement les suivants :

S'il y a plusieurs grandeurs d'une classe Γ remplissant une section d'une sous-classe Π, il y en a une infinité et la classe Γ admet une infinité de sauts (§ 44).

D'où il suit : Si une classe Γ n'a point de sauts, toute section d'une sous-classe quelconque est remplie tout au plus par une seule grandeur de Γ.

Et pour les classes continues en particulier : Toute section d'une sous-classe quelconque d'une classe continue Γ est remplie par une, et une seule grandeur de Γ.

Une autre propriété très importante des classes continues, mais appartenant plus généralement aux classes n'ayant pas de sauts, et caractéristique pour ces classes (§ 50-52), est la suivante (*axiome d'Archimède*) :

A et B étant deux grandeurs quelconques d'une classe n'ayant pas de sauts, il y a toujours un multiple de B qui est plus grand que A, excepté naturellement lorsque B = O ou A = Γ [1].

On dit (§ 54) qu'une classe est de première ou de deuxième *espèce*, suivant que l'axiome d'Archimède a lieu ou non pour cette classe.

A la première espèce appartiennent :

a. Les classes connexes;

b. Les classes limitées n'ayant point de sauts, c'est-à-dire contenant seulement O, Ω, la grandeur limitante et tous ses multiples (classes *discrètes*).

Toutes les autres classes appartiennent à la deuxième espèce.

---

[1] La démonstration de ce théorème donnée pour les classes continues par M. O. Stolz (*Vorl. üb. allg. Arithm.*, Ire Partie, p. 83) n'est pas à l'abri de toute objection. *Voir* le Mémoire récent de M. Veronese : *Il continuo rettilineo e l'assione V d'Archimède* (*Mem. dell' Acc. dei Lincei*, série IV, Vol. VI).

Si entre les éléments de deux classes Γ, Γ' on peut établir une correspondance univoque de telle sorte que, A_1, B_1 et A_2, B_2 étant deux couples d'éléments correspondants, soit $B_1 \gtreqless B_2$ pour $A_1 \gtreqless A_2$, et $S(B_1, B_2)$ soit l'élément de Γ' correspondant à l'élément $S(A_1, A_2)$ de Γ, les deux classes sont de même espèce (§ 55).

IV. Les propriétés des classes de première espèce sont bien connues, et il n'y a pas lieu de s'y arrêter.

Au contraire les classes de deuxième espèce n'ont pas été étudiées jusqu'ici en général. Comme exemple de grandeurs formant des classes de cette nature, nous citerons les *Momente* de M. Stolz (¹) et les *Unendliche der Functionen* de Du Bois-Reymond (²).

Avant d'aborder l'étude des classes de deuxième espèce, il nous faut expliquer ce qu'on entend en disant qu'on veut considérer une sous-classe Π d'une classe Γ comme *isolée* (§ 35). Cela signifie que nous regardons comme non existantes ou bien comme identiques respectivement à O et à Ω les grandeurs de Γ (non appartenant à Π) plus petites ou plus grandes que toute grandeur de Π. Si Π n'est pas propre, on doit en outre considérer comme identiques entre elles deux grandeurs de Π dont la divergence est une grandeur (de Γ) plus petite que toute grandeur de Π. Nous trouverons bientôt des exemples qui serviront à mieux éclaircir ce point.

Une classe Γ de deuxième espèce contient par définition au moins une grandeur A dont les multiples ne croissent pas au delà de toute grandeur de la classe (§ 59-60). Si toutes les grandeurs de Γ sont de même nature que A, on dit que la classe Γ est *absolue* (§ 61). Dans le cas contraire, on peut décomposer Γ en deux groupes Π_1 et Π_2, dont le premier contient toutes les grandeurs de même nature que A; ces groupes donnent lieu à un saut, et constituent deux sous-classes. La sous-classe Π_1, qui est évidemment propre, peut appartenir, lorsqu'on la considère comme isolée, à la première espèce; c'est-à-dire, il se peut que les multiples d'une grandeur quelconque de Π_1 (qui ne croissent pas au delà de toute grandeur de Γ) croissent au delà de toute grandeur

---

(¹) *Die unendlich kleinen Grössen* (*Berichte des naturw.-medic. Vereines in Innsbruck*, t. XIV; et *Vorl. üb. allg. Arithm.*, Ire Partie, Ch. IX.

(²) *Die Paradoxen des Infinitärcalculs* (*Math. Ann.*, t. XI: et *Die allgemeine Functionentheorie*, § 69.

de Π_1. Si cela n'arrive pas, ou bien Π_1 est de deuxième espèce absolue, ou bien on peut la soumettre à une nouvelle subdivision; et ainsi de suite. Quant à la sous-classe Π_2, elle est certainement impropre, car il y a dans Π_2 des grandeurs dont la divergence appartient à Π_1; si toutefois on la considère comme isolée, c'est-à-dire si l'on regarde ces grandeurs comme identiques entre elles, Π_2 devient une classe propre de première espèce. La sous-classe Π_2, considérée comme isolée, nous apparaît ainsi comme un ensemble de grandeurs dont chacune est répétée une infinité de fois; et pour la ramener à sa forme primitive, nous n'avons qu'à substituer à chaque groupe infini de grandeurs égales, une quelconque de ces grandeurs et sa résultante avec toutes les grandeurs de la sous-classe Π_1.

Une classe de deuxième espèce peut donc donner lieu aux cas suivants (§ 61) :

a. Ou elle est absolue;

b. Ou elle se décompose en n sous-classes, dont chacune, considérée comme isolée, est de première espèce;

c. Ou elle se décompose en une infinité de sous-classes de cette même nature;

d. Ou enfin elle se décompose en n sous-classes, dont $n-1$, considérées comme isolées, sont de première espèce et la $n^{\text{ième}}$ est de deuxième espèce.

Les sous-classes dont on parle sous *b*, *c*, *d* s'appellent *sous-classes principales;* nous les supposerons toujours ordonnées de façon que les sous-classes contenant les plus grands éléments précèdent les autres.

Tout est réduit par là à l'étude des classes absolues.

Si A (§ 62-66) est un élément quelconque d'une classe absolue Γ, on peut décomposer cette classe en trois sous-classes (a), (A) et (A′); (a) contient les grandeurs dont tous les multiples sont moindres que A; (A) celles dont un multiple est compris entre deux multiples de A; (A′) enfin celles qui sont plus grandes que tout multiple de A. La sous-classe (a) peut ne pas exister; (A), considérée comme isolée, est propre et de première espèce; (A′) est de deuxième espèce absolue et peut être soumise à une subdivision analogue à celle qu'on a effectuée sur Γ. Ce qu'il importe

de remarquer, c'est que, si l'on refait la décomposition de Γ en prenant au lieu de A une autre grandeur quelconque B appartenant à la sous-classe (A), on obtient trois sous-classes (b), (B) et (B′) qui sont identiques respectivement avec (a), (A) et (A′).

Si Γ est une classe de deuxième espèce, décomposable en n (ou en ∞) sous-classes principales, et s'il y a un couple de séries de grandeurs dont la divergence devienne moindre que toute grandeur de la $m^{\text{ième}}$ sous-classe principale, étant $m < n$, on dit que ces séries sont *convergentes au* $m^{\text{ième}}$ *degré* (§ 68).

V. Il n'y a rien à dire sur les classes à une dimension, à deux sens (§ 70-72); la théorie de ces classes se déduit immédiatement de celle des classes à un sens.

Par rapport aux classes qui ne sont pas à une dimension, nous nous bornons aux remarques suivantes :

Une classe Γ est *à n dimensions* ou *complexe,* si elle contient n sous-classes à une dimension (*sous-classes élémentaires*) telles que toute grandeur de Γ n'appartenant à aucune de ces sous-classes soit la résultante de plusieurs éléments de ces sous-classes mêmes (§ 22, 73). Si l'on adjoint à chaque sous-classe le module O, on peut dire que toute grandeur de Γ est la résultante de n grandeurs (*parties élémentaires*) appartenant respectivement aux n sous-classes élémentaires (§ 74).

Si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ et $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sont les parties élémentaires de M et de N, $S(M_1, N_1), S(M_2, N_2), \ldots, S(M_n, N_n)$ seront les parties élémentaires de $S(M, N)$ (§ 75).

L'égalité de deux grandeurs à n dimensions amène avec soi l'égalité de leurs parties élémentaires correspondantes (§ 74).

VI. La seconde Section de l'Ouvrage que nous analysons est dédiée à l'application de la théorie générale à une famille spéciale de grandeurs, celle des nombres.

On dit (§ 78-79) que deux grandeurs A, B d'une classe quelconque Γ ont *nombre égal* ou *inégal,* suivant que $A = B$ ou $A \neq B$; si donc on représente par α, β ces nouveaux concepts qu'on fait correspondre respectivement à A et à B, on peut écrire dans les deux cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$. On désigne en outre par $\alpha + \beta$ le nombre correspondant à $S(A, B)$, et l'on dit *addition* de α et β l'opération dont le résultat est $\alpha + \beta$.

Bien qu'on n'ait pas donné ainsi une vraie et propre définition du nombre, cela suffit pour le caractériser comme une grandeur; car, supposant bien connue la classe Γ, nous pouvons toujours décider si deux nombres sont égaux ou différents.

L'importance du concept de nombre ressort de la remarque (§ 80) que les mêmes nombres peuvent être appliqués à une infinité de classes de grandeurs différentes, c'est-à-dire à toutes les classes entre lesquelles on peut établir une correspondance univoque telle que les résultantes de grandeurs correspondantes se correspondent mutuellement.

Considérons avant tout les classes à une dimension et à un sens de première espèce. Il convient d'adopter pour ces classes une correspondance univoque plus particulière [*correspondance métrique* (§ 92)], c'est-à-dire remplissant, outre les conditions déjà énoncées, cette autre condition, que, si A et A', B et B' se correspondent, soit $A' \gtrless B'$ suivant que $A \gtrless B$. Étant donné un ensemble de classes en correspondance métrique entre elles, il nous reste à établir un système de nombres pouvant représenter, ou, comme on dit, *mesurer* (§ 102), les grandeurs d'une quelconque de ces classes. Voici le chemin qui conduit à ce résultat (§ 81 et suivants).

Soit Γ une classe continue, et, ayant choisi dans cette classe une grandeur quelconque U (*unité*), formons la sous-classe Γ' (*sous-classe rationnelle*) contenant tous les sous-multiples de U et tous les multiples de ces dernières grandeurs [1]. La sous-classe Γ' est connexe mais non continue, et coïncide avec la sous-classe rationnelle qu'on obtiendrait en prenant comme unité un quelconque de ses éléments, et toute section de Γ' est remplie par un et un seul élément de Γ.

Pour mettre en correspondance métrique deux classes continues Γ et Γ_1, nous choisirons avant tout deux unités U, U_1, et ferons correspondre à la grandeur multiple suivant m du sous-multiple suivant p de U la grandeur ayant une relation analogue avec U_1; après avoir ainsi établi une correspondance entre les sous-classes rationnelles Γ', Γ'_1 de Γ, Γ_1, il ne restera qu'à faire correspondre à la grandeur de P remplissant une section de Γ' la

[1] Toutes ces grandeurs existent dans la classe Γ (*voir* § 57).

grandeur de Γ_1 remplissant la section correspondante de Γ'_1. Si, au lieu de U_1, $S(U_1, U_1)$, $S(U_1, U_1, U_1)$, ..., on écrit 1, 1 + 1 ou 2, 1 + 1 + 1 ou 3, ..., Γ_1 devient l'ensemble R des nombres réels positifs, et nous avons ainsi construit un système de nombres apte à mesurer une classe continue quelconque Γ.

Il n'y a plus maintenant qu'un pas à faire pour atteindre le but que nous nous étions proposé. Soit Π une classe quelconque à une dimension et à un sens de première espèce; on peut toujours trouver une classe continue Γ contenant Π comme sous-classe (§ 90). Nous n'avons donc qu'à construire cette classe Γ et à la mettre en correspondance métrique avec la classe R des nombres réels positifs; la sous-classe de R correspondant à la sous-classe Π de Γ sera le système de nombres pouvant mesurer les grandeurs de la classe donnée Π.

Il règne dans l'établissement de la correspondance un certain arbitraire, consistant dans le choix de la grandeur de la classe proposée qu'on veut faire correspondre à un nombre assigné (par exemple à 1); de façon qu'en disant qu'une grandeur est mesurée par un nombre m, on en devra toujours indiquer la grandeur unité à laquelle on se rapporte.

Pour les classes à deux sens, les choses se passent d'une façon tout à fait analogue (§ 94), et il n'y a qu'à adjoindre au système R le système des grandeurs opposées (nombres négatifs).

Nous concluons que toute classe à une dimension de première espèce peut être mesurée par les nombres réels.

VII. Arrivés ici, nous rencontrons, au point de vue méthodologique, une vraie et propre solution de continuité. Mais, comme ce que nous aurions à dire à l'appui de cette assertion nous entraînerait trop loin, nous le réservons pour plus tard et procédons maintenant dans l'analyse de l'Ouvrage.

A côté de l'opération S, qui s'est présentée dès le début de notre théorie, introduisons (§ 106) une autre opération appelée *multiplication,* qu'on définit ainsi :

Soient A, M deux grandeurs appartenant respectivement à deux classes continues Γ, Γ_1, et soit m le nombre de M par rapport à une grandeur déterminée U_1 de Γ_1 prise comme unité. *Multiplier* A (*multiplicande*) par M (*multiplicateur*), c'est chercher

dans la classe Γ une grandeur P (*produit*) qui soit mesurée par m par rapport à A comme unité.

Le produit varie donc suivant l'unité qu'on choisit dans Γ_1; d'où il suit qu'en parlant du produit de deux grandeurs on devra toujours indiquer par rapport à quelle unité de la classe du multiplicateur on a effectué la multiplication.

On démontre que la multiplication est associative, distributive et, si les *facteurs* (c'est-à-dire le multiplicande et le multiplicateur) appartiennent à une même classe, commutative, et que le produit de deux facteurs est O toujours et seulement lorsque l'un des facteurs est O.

Si a est le nombre de A par rapport à une certaine unité U de Γ, le nombre de P sera ma (§ 110); donc le produit de deux grandeurs a pour mesure le produit des mesures de ces grandeurs, pourvu seulement que la multiplication et la mesure du multiplicateur se rapportent à une même unité de la classe contenant ce dernier. Cette remarque réduit la théorie de la multiplication de grandeurs quelconques (à une dimension) à celle de la multiplication des nombres. On peut obtenir la même simplification dans la théorie de la *division* (§ 111) et dans celle des *rapports* (§ 113) qu'on définit ici d'après Euclide.

VIII. On établit une *correspondance métrique* entre deux classes de première espèce à n dimensions en mettant en correspondance deux à deux leurs sous-classes élémentaires (§ 120). On peut aussi définir un système de nombres complexes servant à mesurer les grandeurs des classes à n dimensions.

Considérons (§ 123 et suivants) une classe à n dimensions, et fixons dans chaque sous-classe élémentaire une grandeur unité. Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$ les unités choisies. En regardant le passage de l'unité U_i à l'unité U_k comme une opération, que nous dirons *déplacement* et désignerons par (ik), il peut arriver un de ces trois cas [1] :

1° Que l'opération (ik) n'ait une signification pour aucune des valeurs de i et de k, ou mieux, que nous ne voulions pas tenir compte de la signification qu'elle peut avoir;

---

[1] *Cf.* HANKEL, *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, Ch. VI et suiv.

2° Que l'opération (ik), appliquée à U_i, ait un sens au moins pour certaines valeurs de i et de k, mais que la même opération, effectuée sur une autre unité U_j, ne conduise à aucun résultat ou bien transforme U_j en une grandeur n'appartenant pas à la classe qu'on considère;

3° Que l'opération (ik), effectuée sur une unité quelconque, la transforme en une grandeur appartenant à la classe considérée.

On dit qu'une classe est *à unités indépendantes, à unités d'un système illimité* ou *à unités d'un système limité,* suivant que l'un ou l'autre de ces trois cas se vérifie.

Nous n'entrerons pas dans les détails de la théorie de ces différentes classes, et passerons aux classes à une dimension de deuxième espèce.

IX. Considérons d'abord une classe Γ de deuxième espèce pouvant se décomposer en deux sous-classes principales I et II de première espèce (§ 136 et suivants). Comme on l'a déjà vu, I est un ensemble de groupes infinis de grandeurs, dont chacun contient une certaine grandeur B et les résultantes de B et de toutes les grandeurs de II. Choisissons dans l'un quelconque de ces groupes une grandeur A, et formons toutes les grandeurs rationnelles par rapport à A; nous dirons (§ 139) qu'elles sont les *grandeurs primaires* des groupes de I auxquels elles appartiennent. Dans l'un des groupes contenant des grandeurs irrationnelles par rapport à A, nous choisirons ensuite une grandeur quelconque B, et formerons toutes les grandeurs rationnelles par rapport à B, et ainsi de suite. Nous aurons fixé de cette façon dans chaque groupe de I une grandeur primaire, et il y aura une infinité de ces grandeurs qu'on pourra choisir arbitrairement, avec cette seule limitation, que la grandeur primaire du groupe contenant S(A, B) n'est pas arbitraire, mais doit être précisément S(A, B). En regardant II comme un des groupes de I, la grandeur primaire de ce groupe sera O.

Les grandeurs primaires constituent une classe K [*classe caractéristique de la mesure* (§ 144)], qui peut être mesurée par le système des nombres réels; ce même système peut tout aussi bien mesurer les grandeurs de II. Si donc nous fixons dans les classes K et II des grandeurs unités A, E, toute grandeur primaire

B pourra être désigné par αA et toute grandeur F de II par βE, α, β étant deux nombres réels. Mais toute grandeur C de Γ a la forme $S(B, F)$; donc $C = S(\alpha A, \beta E)$. On peut dire en concluant qu'une grandeur quelconque de notre classe est mesurée par deux nombres réels α, β ou par un nombre *de deuxième degré* (α, β) (§ 141).

Les résultats exposés ici s'étendent aisément (§ 147-148) à toutes les classes de deuxième espèce décomposables en plusieurs sous-classes principales de première espèce ou même en une infinité de sous-classes de cette nature. Quant (§ 149) aux autres classes, et en particulier aux classes absolues, on ne peut y appliquer le concept de mesure qu'à une sous-classe de la nature de (A) (*voir* ci-dessus), qui prendra le nom de *groupe mesurable par rapport à la grandeur de* A. Un système général de mesure pour une classe de cette nature ne semble pas possible.

X. M. Bettazzi fait suivre à son Mémoire un Appendice dédié à la *théorie analytique du nombre*. Ici (§ 1 et suivants) le nombre n'apparaît pas comme la mesure d'une grandeur, mais comme une chose à soi.

La théorie des nombres rationnels est rédigée essentiellement d'après le Chapitre III de l'Ouvrage de Hankel; mais, tandis que cet auteur s'arrête devant l'irrationnel, en affirmant qu'il n'est pas convenable, et même qu'il n'est peut-être pas possible de l'introduire d'une façon purement formelle, M. Bettazzi poursuit sa route et nous présente (§ 9-10) les nombres irrationnels comme des grandeurs dont chacune est destinée à remplir une des sections existant dans la classe formée par les nombres rationnels. Le nombre i est défini (§ 11) comme solution de l'équation $x^2 = -1$ (d'après Hankel, § 19); à cela suit un court exposé de l'arithmétique des nombres complexes ordinaires (§ 11-13) et à n unités (§ 14), et l'Ouvrage se termine (§ 15) par quelques lignes sur le principe de la permanence des lois formelles de Hankel.

XI. Qu'il nous soit permis d'ajouter ici quelques réflexions qui serviront peut-être pour donner une vue d'ensemble de l'Ouvrage de M. Bettazzi.

Dans l'exposition des principes de l'Arithmétique, on peut se

placer à deux points de vue tout à fait différents. Au point de vue *réel,* on regarde le nombre comme un assemblage d'unités, ou, ce qui est la même chose, comme la représentation d'un ensemble d'objets que l'on considère comme identiques entre eux. Au point de vue *formel,* on désigne par *nombre* un membre d'une classe de concepts ayant certaines propriétés communes. La différence des deux méthodes ressort mieux lorsqu'on vient à parler des opérations. Une opération est un acte effectué sur un ou plusieurs nombres. Cet acte n'est, dans la théorie réelle, que la représentation d'un acte effectué sur des ensembles d'objets, et la nature de ce dernier acte sert à *définir* l'opération et à en *démontrer* les propriétés. Dans la théorie formelle au contraire, comme à une opération il ne peut correspondre aucun acte ayant un sens réel, nous sommes parfaitement libres de lui attribuer telle ou telle propriété qu'il nous plaira; et c'est seulement par ces propriétés qu'on peut définir, individualiser une opération. On devra toutefois, si l'on veut que les opérations qui se présentent dans les deux théories coïncident entre elles, avoir soin de choisir comme propriétés à attribuer *a priori* à l'opération considérée ces mêmes propriétés que nous avons rencontrées dans l'opération de même nom dans la théorie réelle.

Considérons par exemple l'addition. L'addition de deux nombres a, b est, au point de vue réel, l'image d'un acte par lequel deux ensembles de a et b objets respectivement sont réunis en un seul ensemble de $a + b$ objets. En partant de là, on peut démontrer que l'addition est commutative, associative, etc. Au contraire, au point de vue formel on prend une opération S, qui n'est autrement définie que par cela qu'elle est commutative, associative, etc., et on lui donne le nom d'*addition* parce que, si l'on spécialise les concepts jusqu'ici tout à fait généraux qu'on a appelés *nombres,* en les considérant comme les images d'ensembles d'objets, l'opération réelle à laquelle se réduit l'opération S jouit des propriétés que nous avons constatées dans l'addition (commutativité, associativité, etc.).

Il faut toutefois remarquer que ces propriétés ne suffisent pas pour caractériser complètement l'addition; il y a, par conséquent, d'autres opérations réelles (par exemple la multiplication) qu'on peut regarder comme correspondant à l'opération formelle S.

XII. Mais la méthode formelle elle même donne lieu à une subdivision. Ainsi que l'opération S ne coïncide pas avec l'addition, mais la renferme comme cas particulier, de même le concept de nombre qu'on a pris pour fondement de la théorie formelle est plus général que le concept réel de nombre. On peut donc, ou étudier ce concept-là dans toute sa généralité, auquel cas il conviendra de le désigner par un nom nouveau (par exemple par *grandeur*), ou bien y ajouter des limitations jusqu'à ce qu'on l'amène à coïncider avec le nombre ordinaire. Au premier point de vue, on aura une théorie qui sera plus générale que celle du nombre et la comprendra comme cas particulier; cette théorie, commencée seulement dans les Ouvrages déjà cités de Hankel et de Stolz, est exposée dans tous ses développements dans le corps du Mémoire de M. Bettazzi. Au deuxième point de vue, on obtiendra directement une théorie qui sera identique, quant à ses résultats, avec la théorie réelle du nombre; c'est le sujet de l'Appendice.

On peut donc caractériser en deux mots l'Ouvrage dont nous parlons, en disant qu'il est dédié à la *théorie formelle du nombre*.

Il y a toutefois un point où l'auteur sort, sans s'en apercevoir, du champ formel. Au début du Chapitre IV de la IIe Partie, on trouve une définition de la multiplication, que nous avons rapportée à son lieu, et dans laquelle on n'aura point de peine, après ce que nous avons dit ci-dessus, à reconnaître tous les caractères qui distinguent les définitions des opérations dans la théorie réelle du nombre. Il suffit de rappeler que la multiplication y est définie par le résultat qu'elle amène, et que ses propriétés se trouvent démontrées ensuite.

Mais cette observation, qu'une critique sincère ne pouvait passer sous silence, ne touche point à la première Section de l'Ouvrage (*théorie générale des grandeurs*) qui en est la partie vraiment essentielle, et, par conséquent, elle ne diminue en rien la valeur du beau Mémoire de M. Bettazzi, qui mérite d'être connu et étudié par tous ceux qui s'intéressent aux questions concernant les fondements de la science des nombres.

G. Vivanti.

MÉLANGES.

LES AUTOGRAPHES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE;

PAR M. PAUL TANNERY.

PRÉAMBULE.

I. Le premier éditeur des Lettres de Descartes, Clerselier, s'exprime comme suit en parlant de Roberval, dans la Préface de son Tome troisième et dernier (Paris, 1667, page 14 non numérotée) :

« Mais ie ne luy sçaurois pardonner une chose, qui est, qu'apres la mort du Pere Mersenne s'estant rendu maistre de toutes les Lettres que Monsieur Descartes luy auoit escrites, il a refusé de me les communiquer, pour corriger sur ces Originaux les défauts qui pouuoient estre restez dans les Minutes que Monsieur Descartes s'estoit reseruées. »

Clerselier s'excuse en conséquence, sur la confusion où il a trouvé les minutes de Descartes, des inexactitudes que peut présenter son édition. Il déclare d'ailleurs, en raison même de l'animosité qui avait existé entre son Maître et Roberval, avoir cru de son devoir d'apporter quelques adoucissements aux paroles trop aigres qu'il rencontrait dans le texte à publier, autant que cela lui était possible sans diminuer la force des raisons.

Évidemment Roberval ne se dessaisit pas jusqu'à sa mort, arrivée en 1675, du trésor épistolaire qu'il s'était approprié. Mais il serait absolument incroyable qu'après les révélations de Clerselier, aucun lettré ne se fût préoccupé en temps utile du sort réservé à une part aussi intéressante de l'héritage laissé par le dernier survivant de la génération de Descartes.

Cependant, en terminant son édition des *Œuvres de Descartes*, dont les *Lettres* remplissent les volumes VI à X, publiés de 1824 à 1825, Victor Cousin (dans l'Avant-Propos du Tome XI, 1826, page VII) affirmait qu'un autographe de 1622, dont il donnait le fac-simile, était la seule trace qui restât de l'écriture de Descartes.

Pour améliorer la publication de Clerselier, il s'était toutefois servi (Avant-Propos du Tome VI) d'un exemplaire de l'édition de 1667, qui existe encore à la Bibliothèque de l'Institut et qui donne les résultats de la collation de la plupart des Lettres à Mersenne avec des originaux ou tout au moins des manuscrits désignés sous le nom de *La Hire,* et dont le numérotage est indiqué avec soin.

Cousin déclare ignorer le nom de l'auteur de ces annotations. Il suggère celui de Montempuis, recteur de l'Université de Paris vers le milieu du XVIIIe siècle. Cette indication n'a aucune valeur; la lecture des Notes qu'il a publiées prouve clairement qu'elles sont dues à un personnage ayant vécu à la fin du XVIIe siècle ([1]).

Dans son *Histoire de Descartes avant* 1637 (Paris, 1867, Préface, page XXVII), J. Millet affirme qu'après la mort de Roberval, le paquet des Lettres à Mersenne se retrouva entre les mains de La Hire, qui en fit présent à l'Académie des Sciences. Celle-ci, vers 1684 et 1690, les aurait communiquées à Baillet, l'historien de Descartes, et à l'abbé J.-B. Legrand qui préparait, d'après les plans laissés par Clerselier, une édition complète des Œuvres de l'auteur du *Discours de la Méthode*. Les Notes de l'exemplaire des *Lettres* à l'Institut, où l'on peut effectivement reconnaître deux mains successives, seraient dues les premières à Baillet, les plus importantes à Legrand. Celui-ci, mort en 1704, aurait laissé les papiers à un Marmion, mais, dès l'année suivante, ils seraient retournés à la famille de Legrand et depuis lors auraient été perdus, y compris la collection de Roberval.

En acceptant, sous bénéfice d'inventaire, les identifications proposées par J. Millet, j'ai à peine besoin de relever les inexactitudes et les invraisemblances de son récit. Il n'y a pas à douter que ce ne soit l'Académie des Sciences qui ait été l'héritière directe des papiers de Roberval; La Hire fut simplement chargé de les classer et d'éditer comme posthume ce qui pouvait être publié dans les Mémoires de l'Académie ([2]). S'il a communiqué à Baillet ou à Legrand une partie de ces manuscrits, il ne

---

([1]) Ainsi il a personnellement connu le Père Quesnel; il s'est entretenu avec l'abbesse de Maubuisson, sœur de la princesse Elisabeth, etc.

([2]) Que ce classement ne fût pas sans présenter quelques difficultés, c'est ce

l'a fait qu'au nom de l'Académie, et, comme il a de longtemps survécu à Legrand, il a certainement assuré lui même la rentrée dans les Archives des pièces dont il était responsable.

Nous pouvons en donner une preuve décisive; dans le manuscrit de la Bibliothèque Nationale, fonds français nouv. acq. 3280, formé avec les papiers relatifs à Fermat saisis en 1848 au domicile de Libri, se trouvent (fol. 156 v°) de la main d'Arbogast, en annotation sur une pièce copiée par lui, les lignes suivantes :

« Cet écrit se trouve à la fin du recueil de lettres originales de Descartes conservées à la Bibliothèque de la ci-devant Académie des Sciences. L'écriture est de la main du P. Mersenne. L'écrit est de Descartes. »

D'autre part, dans le même manuscrit, f°s 92-94, on rencontre un relevé dressé par Arbogast d'originaux de Lettres de Descartes se rapportant aux années 1638 et 1639 et numérotées de 6 à 21. Le simple rapprochement des indications de ce relevé avec les Notes de Legrand publiées par Cousin permet de vérifier que ces Lettres, comme on pouvait le prévoir *a priori,* avaient fait partie des manuscrits de La Hire, c'est-à-dire appartenaient à la collection léguée par Roberval à l'Académie des Sciences.

Au temps où Cousin publiait son édition des *Œuvres de Descartes,* cette collection était encore tout entière aux Archives de l'Institut. D'après MM. Lalanne et Bordier (*Dictionnaire de pièces autographes volées aux bibliothèques publiques de la France;* Paris, 1851), elle était formée d'au moins soixante-cinq numéros, dont il ne reste actuellement que trois. Libri, probablement renseigné par la Note d'Arbogast, mit au pillage ces précieuses archives. Depuis lors les manuscrits de Roberval sont dispersés; quelques Lettres à Mersenne sont cependant, par la générosité de leurs détenteurs, rentrées à la Bibliothèque de l'Institut; un lot assez important se trouve réuni à la Sorbonne, à la Bibliothèque de Cousin; d'autres ont été signalées dans des ventes publiques d'autographes; enfin une série qui peut être évaluée au

---

que prouve l'erreur assez singulière où La Hire est tombé en insérant, comme de Roberval, dans le volume publié en 1693, une pièce de Fermat déjà imprimée dans les *Varia Opera* de 1679.

quart de l'ensemble primitif, après avoir fait partie du fonds Libri de la célèbre collection Ashburnham, est redevenue, grâce aux efforts de M. Léopold Delisle, la propriété de la France et constitue aujourd'hui, après classement méthodique à la Bibliothèque Nationale, le manuscrit du fonds français nouv. acq. n° 5160.

II. C'est ce manuscrit que je me propose d'étudier aujourd'hui, pour chercher à élucider plus complètement l'histoire des Lettres de Descartes à Mersenne et faire connaître ce que les originaux de la Nationale peuvent offrir d'inédit et d'intéressant au point de vue scientifique.

Après un premier folio, provenant d'une chemise de Libri et portant de sa main l'inscription : *Descartes : Lettres autographes,* on trouve successivement dix-huit lettres (f°s 2 à 50). Une nouvelle chemise de Libri (f° 51) porte la mention : *Descartes : Copies et discussions ;* suivent six pièces distinctes (f°s 52 à 66).

Remarquons tout d'abord que les deux dernières sont écrites sur une même feuille double in-4°. Le premier recto (f° 65) offre, d'une très jolie écriture de copiste, un extrait de la Lettre de Descartes, adressée le 29 janvier 1640, par l'intermédiaire de Mersenne à Meyssonnier, « Medecin de Lion » (= Clerselier II, 36; Cousin, VIII, p. 200) et relative aux fonctions de la glande pinéale. Au verso se trouve, de l'indéchiffrable écriture de Mersenne (1), le fragment que nous avons dit avoir été copié par Arbogast dans le Ms. fr. n. a. 3280, f°s 156-157. Ainsi se trouve attestée d'une façon irrécusable la provenance de cette pièce. Nous verrons que celle des autres n'est guère plus douteuse.

Le second feuillet de la pièce (f° 66) n'offre que quelques combinaisons de lettres, inscrites au verso de la main de Mersenne et qui paraissent se rapporter à la Musique. Cette circonstance doit nous inspirer quelques doutes sur l'attribution à Descartes,

---

(1) Pour donner un exemple de la difficulté de lire cette écriture, je dirai qu'Arbogast, qui était cependant singulièrement familiarisé avec elle, comme on peut s'en convaincre en collationnant sa copie, a, entre autres, laissé incompréhensible tout un membre de phrase : « donner un nombre qui soit à la somme de ses parties en raison donnée possible et *pour se deliner quel est le plus cran* ». Au lieu des mots en italique, je lirais « pouvoir décider quand elle est possible ».

par Arbogast, du fragment précédent. Il semble clair en effet que Mersenne s'est servi, pour des notes personnelles, des blancs disponibles au dos de la copie qu'il s'était fait faire de la lettre à Meyssonnier; rien ne nous indique qu'il ait réservé à une pièce de Descartes le droit de figurer à la suite de cette copie.

Dans ce fragment, qui, du reste, a été publié par M. Charles Henry dans ses *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat,* p. 189-191 (*Bulletin Boncompagni,* octobre 1879), et qui porte pour titre : *De la façon de trouver les nombres à parties aliquotes in ratione data,* je ne reconnais, malgré l'autorité d'Arbogast, ni le style, ni la manière de Descartes. Qu'on compare le fragment authentique sur le même sujet, dont Cousin a donné une traduction pages 438-439 du Tome XI de son édition, on pourra juger de la différence.

Nous ne sommes pas davantage en présence d'un morceau de Fermat; je croirais plutôt à des idées de Frenicle, peut-être arrangées par Mersenne à sa façon.

III. Je reviens aux Lettres autographes de Descartes, pour m'arrêter un instant aux annotations qu'elles portent.

Tout d'abord une main jusqu'à présent inconnue y a généralement inscrit en tête une date au crayon. Une autre main a souvent répété cette inscription à l'encre qui alors se trouve parfois suivie de l'abréviation « v. d. ». Cette dernière annotation semble correspondre aux cas où la Lettre se trouve effectivement datée de la main de Descartes.

Je signale pour mémoire les références à l'édition de Clerselier, qui sont de deux mains différentes. L'une d'elles (Baillet?) a daté de 1684 une de ces références (6e Lettre, f° 23, v°), qui, par suite des confusions dans les Lettres imprimées, ne s'était pas présentée tout d'abord.

Il convient de s'arrêter davantage aux anciens numérotages inscrits sur ces Lettres. Ils sont de deux sortes : l'un (qui d'ailleurs n'existe pas sur toutes les pièces) est inscrit au haut de la pièce, vers le milieu, en tirant à droite ; le numéro est enfermé entre parenthèses.

Si, pour les Lettres des années 1638 et 1639, on compare ces numéros entre parenthèses avec ceux de la liste donnée par Arbo-

gast dans le Ms. fr. n. a. 3280, on reconnaît qu'ils sont identiques. Les chiffres ressemblent d'ailleurs tellement à ceux d'Arbogast que je n'hésite pas à considérer ce numérotage comme représentant un classement fait par ce mathématicien. En tous cas, pour toutes les pièces portant ce numérotage entre parenthèses, la provenance des Archives de l'Académie des Sciences me paraît établie sans conteste possible.

D'autres numéros sont inscrits au contraire au bas à gauche des premières pages de chaque pièce. Ces numéros sont de différentes mains, et représentent des classements distincts. Un de ces classements correspond à celui de La Hire, en tant qu'il est connu; pour les autres, la question doit être réservée.

Enfin, on voit sur toutes les pièces, d'une façon plus ou moins visible, les traces de l'effacement d'un sceau qui devait être celui de l'ancienne Académie des Sciences, marqué avec une encre rouge, facilement délébile.

Après ces remarques préliminaires, je puis donner la liste des pièces contenues dans le manuscrit que j'examine.

J'indiquerai d'abord en chiffres romains leur rang dans le manuscrit, puis le destinataire; la date autographe quand elle existe, et dans le cas contraire, entre crochets, la date supposée par les annotations; les numéros, qui pour ceux d'Arbogast et de La Hire seront suivis respectivement de l'un ou de l'autre de ces noms; la correspondance avec l'édition de Clerselier, marquée par le n° du tome, suivi de celui de la Lettre d'après l'édition, et la correspondance avec l'édition de Cousin (n° du volume, page où commence la Lettre); enfin les folios du manuscrit.

I. Autographe à Mersenne [27 mai 1638 *au crayon seulement*]. 13 La Hire = Clerselier, III, 62; Cousin, VII, 65. — f°s 2, 3.

II. Autographe à Mersenne [juin 1638]. — 76 Arbogast, 15 La Hire = Clerselier, I, 73; Cousin, VII, 303. — f°s 4 — 9.

III. Autographe à Mersenne, 27 juillet 1638. — 9 Arbogast, 16 La Hire = Clerselier, III, 66; Cousin, VII, 110. — f°s 10 — 14.

IV. Autographe à Mersenne, 23 août 1638. — 10 Arbogast, 19 La Hire = Clerselier, III, 65; Cousin, VII, 88. — f°s 15 — 20.

V. Autographe à Mersenne [octobre 1638]. 18 La Hire = Clerselier, II, 91; Cousin, VII, 134. — f°s 21, 22.

VI. Autographe à Mersenne, 4 mars 1641. — 30 Arbogast, 46 C = Clerselier, III, 35; Cousin VIII, 481; en partie inédite. — f°s 23 — 26.

VII. Autographe à Mersenne, 23 juin 1641. — 37 Arbogast, 41 C. — Inédite. — f°s 27, 28.

VIII. Autographe à Mersenne, 26 avril 1643. — 47 Arbogast. — Inédit. — f°s 29, 30.

IX. Autographe à Cavendish, 30 mars 1646. — 71 Arbogast, 27 C = Clerselier, III, 86; Cousin, IX, 512. — f°s 31-34.

X. Copie (adressée par Mersenne à Mylon) de la Lettre de Descartes à Mersenne du 20 avril 1646. — 51 Arbogast, 25 C = Clerselier, III, 94; Cousin, IX, 555. — f°s 35, 36.

XI. Autographe à Mersenne du 7 septembre 1646. — 53 Arbogast, 21. — Inédite. — f°s 37, 38.

XII. Autographe à Mersenne du 12 octobre 1646. — 55 Arbogast, 19. — Inédite. — f° 39.

XIII. Autographe à Mersenne du 2 novembre 1646. — 56 Arbogast, 17. — Inédite. — f°s 40, 41.

XIV. Autographe à Mersenne du 23 novembre 1646. — 58 Arbogast, 16. — Inédite. — f°s 42, 43.

XV. Autographe à Mersenne du 26 avril 1647. — 60 Arbogast, 13. — Inédite. — f°s 44, 45.

XVI. Autographe à Mersenne (le second feuillet est déchiré). — 6 C La Hire = Clerselier, II, 66; Cousin VI, 183. — f° 46, 47.

XVII. Autographe à Mersenne (incomplet). — 2. — Inédit. — f° 48.

XVIII. Autographe à Mersenne (sans date). — 69 Arbogast. — Inédit. — f°s 49, 50.

XIX. Copie d'un extrait de Lettre à Mersenne [31 mars 1638]. — 10 C 2e = f° 52.

XX. Copie de la première Lettre à Mersenne sur la méthode de maximis et minimis de Fermat. — 13 Arbogast, 9 seconde. = Clerselier, III, 56; Cousin, VII, 6. — f° 53-56.

XXI. Réponse à l'écrit des amis de Mr de Fermat = Clerselier, III, 57; Cousin, VII, 14. — f°s 57-60.

XXII. Copie d'une réponse de Descartes à trois questions de Mécanique. — 75 Arbogast, 30 C. = Clerselier, II, 116 fin; Cousin, IX, 102. — f°s 61-64.

XXIII. Copie d'un extrait de Lettre de Descartes à Meyssonnier. — 12 = Clerselier, II, 36; Cousin, VIII, 20. — f°s 65, 66.

(*A suivre.*)

NOTE SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

Lorsque les paramètres de l'équation d'un plan ou d'une sphère dépendent d'une variable, on peut toujours considérer la sphère ou le plan comme faisant partie d'un système triplement orthogonal, ou, pour parler plus rapidement, comme constituant une famille de Lamé. Il suffit en effet d'associer les trajectoires orthogonales de la surface mobile de sorte qu'elles découpent sur cette surface deux familles de courbes orthogonales entre elles : les deux séries de surfaces ainsi formées compléteront avec la surface mobile le système triplement orthogonal. Rien n'empêche de supposer le rayon de la sphère mobile invariable. Ainsi, la sphère et le plan sont des figures de forme invariable qui, en se déplaçant, constituent une des familles d'un système triplement orthogonal. Sont-ce les seules surfaces qui puissent, sans se déformer, engendrer une famille de Lamé, quelque déplacement qu'on leur imprime? M. Darboux, dans une leçon professée à la Sorbonne dans le courant du mois de janvier 1891, a montré que la réponse à cette question s'obtiendrait en cherchant les intégrales communes à six équations aux dérivées partielles du troisième ordre. C'est cette intégration que la présente Note a pour objet d'effectuer.

Je désignerai, suivant l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées partielles du premier et du deuxième ordre de z par rapport à x et à y. Je poserai

$$\begin{aligned} A &= (1+q^2)s - pqt, \\ B &= (1+p^2)t - (1+q^2)r, \\ C &= \quad pqr \quad - (1+p^2)s. \end{aligned}$$

L'équation qui définit une famille de Lamé est

$$(1) \qquad A\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0,$$

H étant une fonction de x, de y et de u, ainsi que de z et de ses dérivées par rapport aux trois variables qui précèdent. Pour préciser la signification de H, appelons dn la longueur de la normale

à une surface au point x, y, z comprise entre cette surface et la surface infiniment voisine, ces deux surfaces correspondant aux valeurs u et $u + du$ du paramètre variable. Alors

$$\mathrm{H} = \frac{dn}{du}.$$

Il est permis de supposer que x, y, z représentent les coordonnées d'un point de la surface rapportées à des axes mobiles liés invariablement à la surface. Si l'on désigne par a, b, c les composantes de la translation, et par α, β, γ les composantes de la rotation du mouvement d'entraînement, on aura

$$\mathrm{H} = \frac{k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

en posant

$$k = \frac{\partial z}{\partial u} + c - ap - bq + \alpha(y + qz) - \beta(x + pz) + \gamma(py - qx).$$

Définissons encore un symbole d'opération

$$\Delta(\mu) = \mathrm{A}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \mathrm{B}\frac{d^2}{dx\,dy}\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \mathrm{C}\frac{d^2}{dy^2}\frac{\mu}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

L'équation (1) s'écrira

$$\Delta(k) = 0,$$

ou

$$\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + c\,\Delta(1) - a\,\Delta(p) - b\,\Delta(q)$$
$$+ \alpha\,\Delta(y + qz) - \beta\,\Delta(x + pz) + \gamma\,\Delta(py - qx) = 0.$$

Si la surface a une forme invariable, et si l'équation précédente doit être vérifiée quelles que soient les fonctions a, b, c, α, β, γ de u, il faudra que

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} \Delta(1) = 0, & \Delta(p) = 0, & \Delta(q) = 0, \\ \Delta(y + qz) = 0, & \Delta(x + pz) = 0, & \Delta(py - qx) = 0. \end{array}\right.$$

Telles sont les six équations du troisième ordre dont il s'agit de trouver les solutions communes.

A cet effet, je remarque une propriété de l'opération $\Delta(\mu)$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta(\mu\nu) = \nu\,\Delta(\mu) &+ \frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(A\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\nu}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\nu}{\partial y^2}\right)\\ &+ 2A\frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{d}{dx}\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\\ &+ B\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{d}{dy}\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial\nu}{\partial y}\frac{d}{dx}\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\\ &+ 2C\frac{\partial\nu}{\partial y}\frac{d}{dy}\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, j'ai rencontré ci-dessus la propriété évidente

$$\Delta(\mu+\nu) = \Delta(\mu) + \Delta(\nu).$$

Cela posé, faisons dans la formule (3) $\mu = p$, $\nu = y$, elle devient

$$(4)\quad \Delta(py) = y\,\Delta(p) + B\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + 2C\frac{d}{dy}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

De même, en remplaçant dans la formule (3) μ par q et ν par x, on obtient

$$(5)\quad \Delta(qx) = x\,\Delta(q) + 2A\frac{d}{dx}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + C\frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} &= \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - px\frac{pr+qs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{r(1+p^2+q^2) - p^2r - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r(1+q^2) - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\\ \frac{d}{dy}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} &= \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - p\frac{ps+qt}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{s(1+p^2+q^2) - p^2s - pqt}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\\ \frac{d}{dx}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} &= \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - q\frac{pr+qs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{s(1+p^2+q^2) - pqr - q^2s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-C}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\\ \frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} &= \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - q\frac{ps+qt}{(1+p^2+q^2)^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{t(1+p^2+q^2) - q(ps+qt)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t(1+p^2) - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans les équations (4) et (5) et les retranchant ensuite membre à membre, nous obtenons l'intéressante relation (6)

$$(6) \qquad \Delta(py - qx) = y\,\Delta(p) - x\,\Delta(q) + \frac{4AC - B^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi trois des équations (2), savoir

$$\Delta(p) = 0, \qquad \Delta(q) = 0, \qquad \Delta(py - qx) = 0,$$

ne peuvent être vérifiées simultanément sans qu'on ait

$$\frac{4AC - B^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

et, comme on peut toujours supposer, ce que nous avons fait, que z figure dans l'équation de la surface inconnue, c'est-à-dire que $1 + p^2 + q^2$ n'est pas infini

$$(7) \qquad 4AC - B^2 = 0.$$

Or A, B, C sont les coefficients de l'équation différentielle des projections sur xOy des lignes de courbure, lignes qui ne peuvent être confondues sur les surfaces réelles. Il faut donc que l'équation des lignes de courbure soit indéterminée ou que

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

La surface cherchée doit donc être un plan ou une sphère. Ainsi les sphères et les plans sont les seules surfaces qui puissent, en se déplaçant sans se déformer, constituer une famille de Lamé.

Remarque I. — Nous avons laissé de côté les surfaces imaginaires formées, comme on sait, de droites isotropes, pour lesquelles les deux lignes de courbure sont confondues. Mais elles ne peuvent pas faire partie d'un système triplement orthogonal, composé de surfaces distinctes; car, d'après le théorème de Dupin, deux surfaces, appartenant à deux familles différentes, coupent une surface de la troisième famille suivant ses lignes de courbure; ici elles devraient donc se confondre. On pourrait à la rigueur concevoir un système formé par une développable circonscrite au cercle de l'infini et comptant pour deux : les génératrices de cette développable engendreraient dans le mouvement de la dé-

veloppable les surfaces de la troisième famille. Mais on n'aurait pas là, à proprement parler, un véritable système triplement orthogonal.

Remarque II. — Il est intéressant de remarquer que nous nous sommes servi seulement de trois des six équations (2). Nous avons donc résolu un problème qui semblait susceptible d'un plus grand nombre de solutions que le problème primitivement posé, puisqu'il n'exigeait que l'intégration de trois équations simultanées. Voici quel est ce problème : *Trouver les surfaces qui peuvent donner naissance à une famille de Lamé en se déplaçant, d'une manière quelconque, mais sans se déformer, parallèlement à un plan donné.* Prenons en effet ce plan pour plan des xy : la composante de la translation parallèle à Oz sera nulle, ainsi que les rotations autour de Ox et de Oy et l'équation

$$\Delta(k) = 0,$$

se réduira à

$$-a\Delta(p) - b\Delta(q) + \gamma\Delta(py - qx) = 0.$$

Pour que cette équation ait lieu, quelles que soient les fonctions a, b, γ, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\Delta(p) = 0, \qquad \Delta(q) = 0, \qquad \Delta(py - qx) = 0.$$

Ce sont précisément les trois équations que nous avons déjà rencontrées. Donc les sphères et les plans semblent être les seules surfaces qui, en prenant un mouvement quelconque parallèle à un plan, engendrent une famille de Lamé. Seulement ici l'on n'a plus le droit de supposer que z figure nécessairement dans l'équation de la surface, puisque l'axe des z joue un rôle spécial; on sait qu'un cylindre quelconque parallèle à Oz, en se déplaçant parallèlement au plan xOy, engendrera une famille de Lamé; le système triplement orthogonal sera complété par la famille des plans perpendiculaires à Oz et par les cylindres, parallèles à Oz, dont les bases sont les trajectoires orthogonales des bases des premiers cylindres.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LAURENT. — Traité d'Analyse, t. IV, 454 p. in-8°; t. V, 417 p.; t. VI, 339 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1889-1890.

M. Laurent poursuit avec rapidité la publication de son *Traité d'Analyse,* dont nous annonçons aujourd'hui les Tomes IV, V et VI.

Le Tome IV s'ouvre par quelques indications sur la théorie des fonctions de plusieurs variables, en particulier sur la notion de divisibilité de deux séries procédant suivant les puissances entières et positives de plusieurs variables, d'après M. Weierstrass, sur les points critiques et les intégrales multiples à variables imaginaires. L'auteur traite ensuite des fonctions algébriques, de leur développement en série et des propriétés les plus importantes des *cycles;* il montre ensuite le rôle que joue dans cette théorie la transformation des figures, et en profite pour faire une digression dans le domaine de la Géométrie. Ces diverses matières remplissent les quatre premiers Chapitres.

Dans le Chapitre V, il montre comment l'intégration de fonctions algébriques conduit à de nouvelles fonctions, qui ne peuvent se réduire à des fonctions algébriques. Le Chapitre se termine par le théorème d'Abel.

Les quatre Chapitres qui suivent contiennent les éléments d'une théorie des fonctions elliptiques, fondée sur la considération des intégrales elliptiques. L'un de ces Chapitres se rapporte aux fonctions modulaires et contient des indications sur la transformation; un autre se rapporte à quelques applications géométriques.

Le Chapitre XI et dernier est consacré aux fonctions abéliennes. L'auteur y prend pour point de départ la représentation des fonctions algébriques par les surfaces de Riemann, dont il expose rapidement les propriétés essentielles.

Le Tome V contient la théorie des équations différentielles ordinaires. Le premier Chapitre comprend les généralités sur l'existence de l'intégrale, et sur la notion d'intégrale singulière. M. Laurent traite ensuite des cas classiques où une équation du

premier ordre s'intègre, et donne quelques indications sur le rôle des *connexes* dans la théorie de ces équations. Les Chapitres III et IV se rapportent aux équations linéaires ; le premier comprend la théorie, le second des exemples particuliers : équation de Gauss, de Bessel, etc. Le Chapitre V traite de l'intégration des équations d'ordre supérieur non linéaires. Outre les renseignements habituels, on y trouvera divers exemples d'équations du second ordre qu'on peut intégrer quand on en connaît une intégrale première. Dans le Chapitre suivant, l'auteur traite des équations différentielles simultanées. Le Chapitre VII est consacré aux fractions continues; l'auteur en développe même les propriétés arithmétiques. Enfin, dans le dernier Chapitre, l'auteur traite du Calcul des variations.

Le sixième Volume contient la théorie des équations aux dérivées partielles et quelques autres théories qui s'y rattachent. Ce Volume, comme les précédents, contient beaucoup de matériaux; toutefois, on pourrait souhaiter que les choses fussent parfois plus complètement approfondies et mieux reliées.

Les trois premiers Chapitres contiennent la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. M. Laurent sépare, avec beaucoup de soin, la théorie d'*une seule* équation de celle d'un système de plusieurs équations. Pour continuer logiquement ce procédé de morcellement, l'auteur aurait aussi dû séparer la théorie des systèmes *complets* de celle d'un système quelconque d'équations du premier ordre. L'exposition y eût beaucoup gagné en netteté. La théorie du multiplicateur de Jacobi dans les équations aux dérivées partielles est exposée *directement,* sans passer par l'intermédiaire des équations aux différentielles totales, intermédiaire qui permet une exposition plus naturelle.

Ce n'est qu'au Chapitre IV que l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles est démontrée. Ce même Chapitre contient de nombreuses indications sur les équations du second ordre et d'ordre supérieur.

La théorie de l'intégration des équations aux différences finies est esquissée dans le Chapitre VI.

Les Chapitres VIII et IX contiennent les applications de la théorie des équations aux dérivées partielles aux fonctions harmoniques, à la variation des intégrales multiples; au problème

de Dirichlet, à la représentation conforme, aux fonctions sphériques, aux fonctions de Lamé.

Enfin, le Chapitre VI est consacré aux équations fonctionnelles, tandis que le Chapitre IX contient des indications sur les transformations.

Ces deux Chapitres n'avaient pas dans ce volume une place nécessaire. Peut-être M. Laurent a-t-il l'intention dans son prochain Tome de parler de la théorie des transformations et le Chapitre IX n'est-il alors qu'un avant-propos du Tome VII?

En somme, si les théories qui sont exposées dans ce Volume ne sont pas toujours étudiées à fond, il n'en conserve pas moins un grand intérêt : on y trouvera d'ailleurs beaucoup de renseignements bibliographiques. C. B.

Dr H. SCHROETER. — Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet. 1 vol. in-8°; VIII-296 p.

Pour la plupart les études nombreuses sur les courbes planes du troisième ordre portent un caractère analytique. Dans les travaux de Poncelet, Chasles, von Staudt, Steiner, M. Reye, etc., les sections coniques ont été étudiées par la synthèse. M. Schroeter, professeur à l'Université de Breslau, a poursuivi ces recherches synthétiques en donnant une théorie purement géométrique des cubiques planes, et le livre où il a déposé ses résultats démontre que dans cette conception l'habile interprète des travaux géométriques de Steiner s'est fait pénétrer de l'esprit de son maître. Il nous est absolument impossible de mettre au jour tout ce qu'il y a de remarquable dans ce travail. Dans l'espoir que bientôt les géomètres français puissent faire la connaissance du livre même, mis dans une forme française et parsemé d'un grand nombre de figures explicatives, qui font presque tout à fait défaut dans l'original, nous nous contentons d'en énumérer les points les plus saillants indiqués dans la préface par l'auteur même.

Le point de départ des considérations géométriques de l'auteur est formé par la construction de la courbe C^3 dont on donne trois couples de points conjugués. D'après Clebsch, cette construction

« ne laisse rien à désirer quant à la simplicité ». Pour les courbes dégénérées, l'origine de cette construction est située dans les propriétés polaires des coniques. C'est de cette construction par couple de points que découle la génération de la courbe à l'aide de deux faisceaux projectifs de rayons en involution placés semi-perspectivement, c'est-à-dire placés de telle manière que la droite qui joint les deux sommets des deux faisceaux fait partie de deux couples correspondants. Par cette génération se confirme la remarque incidentelle de Steiner « que le vrai caractère de plusieurs propriétés des cubiques planes se révèle par l'involution ». Dans le cas particulier du lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère donné, chacune des deux involutions est formée par les côtés d'un angle variable à sommet et à bissectrices fixes comme l'involution des diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère.

A son tour la génération indiquée de la courbe C^3 la fait connaître comme le lieu des points doubles des coniques dégénérées comprises dans un réseau donné, comme le lieu des trois points diagonaux des quadrangles complets dont les sommets sont les points de base des faisceaux de coniques compris dans ce réseau. De même la génération indiquée mène aux constructions de la courbe C^3 à l'aide de deux faisceaux projectifs, un faisceau de coniques et un faisceau de rayons, données par Chasles et M. de Jonquières. De cette remarque découlent plusieurs constructions de la courbe C^3, qui passe par neuf points donnés, et du neuvième point commun aux courbes C^3, qui passent par huit points donnés.

Les points de contact des trois quadruples de tangentes qui passent par les trois points d'intersection de la courbe et d'une droite quelconque appartiennent à une configuration $(12_4, 16_3)$. L'étude de cette configuration fait trouver le théorème de M. Salmon, d'après lequel le rapport anharmonique du quadruple des tangentes menées par un point de la courbe ne change pas, si l'on fait mouvoir ce point le long de la courbe.

La génération de la courbe à l'aide de deux faisceaux de rayons en involution mène à la division des courbes C^3 en deux groupes, les courbes monogrammatiques et les courbes digrammatiques. Les courbes monogrammatiques n'admettent qu'une partie unique; par chacun des points d'une courbe monogrammatique

il ne passe que deux tangentes réelles, qui la touchent ailleurs. Les courbes digrammatiques se composent de deux parties : par chacun des points de la partie paire (ovale) il ne passe pas de tangente réelle, tandis que les quatre tangentes menées par un point de la partie impaire (serpentine) sont toutes réelles. D'après la réalité des points de la courbe situés à l'infini, les deux groupes sont subdivisés en trois et cinq espèces. De plus l'auteur examine les conditions sous lesquelles les constructions données font trouver les différentes espèces.

L'étude des quadruples de tangentes menées par un point quelconque de la courbe fait trouver les coniques polaires de la courbe par rapport aux points de la courbe. Après avoir démontré que les coniques polaires C_p^2, C_q^2, C_r^2 des trois points d'intersection P, Q, R de la courbe et d'une droite quelconque font partie d'un même faisceau, l'auteur étend la notion des coniques polaires à tous les points du plan en faisant correspondre à un point quelconque S de la droite PQR la conique C_s^2 du faisceau (C_p^2, C_q^2) pour laquelle le rapport anharmonique $(C_p^2, C_q^2, C_r^2, C_s^2)$ est égal au rapport anharmonique (P, Q, R, S). Ainsi il est obligé de faire voir que la conique C_s^2 assignée au point S ne change pas, quand la droite PQR tourne autour du point S, et que les points d'intersection de C_s^2 et de la courbe C^3 sont les points de contact des tangentes de C^3 qui passent par S. Ainsi l'auteur trouve tout le réseau des coniques polaires, les propriétés polaires bien compliquées des C^3 et les liens intimes entre les coniques polaires, les droites polaires, les poloconiques et les coniques satellites. Ici se présentent de même les relations métriques, qui forment le point de départ des recherches par lesquelles M. Cremona a fait connaître les propriétés polaires des C^3, et les coniques dégénérées du réseau font trouver la hessienne et la cayleyenne de la courbe C^3.

La hessienne donne lieu à l'étude des points d'inflexion, des tangentes d'inflexion et des polaires harmoniques, surtout au point de vue des rapports de position et de réalité, et, dans les derniers Chapitres, les problèmes célèbres de Steiner des polygones inscrits fermés et des coniques superosculatrices trouvent une solution synthétique.

Dans ce coup d'œil rapide du Livre de M. Schroeter nous n'a-

vons pas parlé de la courbe de la troisième classe, qui est l'enveloppe des droites qui joignent deux points conjugués. L'auteur expose avec beaucoup de clarté le rapport corrélatif entre cette enveloppe et la courbe C^3, entre le réseau tangentiel de coniques qui correspond à l'une et le réseau ponctuel de coniques qui correspond à l'autre. Nous n'avons pas remarqué non plus que l'auteur fait connaître les trois groupes de couples de points conjugués et qu'il développe d'une manière concise les rapports intimes entre ces trois systèmes, et cette liste de sujets que nous avons passés sous silence pourrait être augmentée davantage. Cependant nous n'aimons pas à abuser de la patience de nos lecteurs. Toutefois ce que nous avons énuméré peut suffire à donner la conviction que M. Schroeter a atteint le but qu'il s'est proposé; en vérité, il a rendu aux amis des recherches géométriques l'étude des belles propriétés des cubiques planes aussi accessible que celle des sections coniques. S.

MÉLANGES.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UN LEMME FONDAMENTAL DE CAUCHY;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. Si la proposition de Cauchy que j'énoncerai à la fin de cette Note (n° 6 *inf.*) offre par elle-même un intérêt des plus médiocres, elle n'en sert pas moins de base essentielle aux théories les plus importantes de l'Analyse infinitésimale. Briot et Bouquet (¹) ont fondé sur elle la première démonstration satisfaisante de la convergence des développements des intégrales des équations différentielles ordinaires, que j'ai étendue plus tard (²), avec quelques

(¹) *Théorie des fonctions doublement périodiques, etc.* 1re édition, p. 45; 1859.

(²) *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*, p. 143. Paris, 1872.

modifications, au cas d'un système quelconque d'équations différentielles totales. J'en ai déduit la convergence des développements des fonctions implicites dans le cas général de la question (1). Le même lemme m'a servi encore à retrouver, par une voie toute différente et de la dernière simplicité, les limites assignées par Cauchy à la convergence de la série de Taylor (2), à prouver qu'une fonction composée est toujours représentable par cette série, quand sa composante et les fonctions simples le sont toutes elles-mêmes (3), à établir tout récemment la convergence des développements des intégrales des équations aux dérivées partielles dans un cas s'étendant bien au delà de ceux où la question avait déjà été traitée (4), etc.

Les démonstrations connues d'un lemme aussi précieux reposent sur des considérations en somme fort complexes, qui le rejettent bien loin des éléments, lui-même et tout ce qu'il étaye. Celle rapportée par Briot et Bouquet (5) comporte l'intervention des intégrales définies et des fonctions circulaires. Celle que j'ai proposée plus tard (6) ne met en jeu que des principes d'Algèbre; néanmoins elle exige encore la connaissance préalable de presque toute la théorie des équations binômes.

Celle que je vais faire connaître est tirée, au contraire, des parties les plus élémentaires de la théorie des polynômes entiers et des séries entières; à ce titre et à cause des usages si variés du lemme en question, cette nouvelle méthode me paraît apporter une grande simplification dans toute l'Analyse, dont elle rend en outre indépendantes les unes des autres plusieurs parties qui se trouvaient embarrassées auparavant par une solidarité fâcheuse. Maintenant, par exemple, ma dernière démonstration de la convergence des développements des intégrales d'un système d'équations

---

(1) *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*, p. 155.

(2) *Ibid.*, p. 87.

(3) *Ibid.*, p. 98.

(4) *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles*, en collaboration avec M. Riquier (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, janvier, février et mars 1890).

(5) *Théorie des fonctions doublement périodiques, etc.* 1re édition, p. 43.

(6) *Nouveau précis, etc.*, p. 80.

différentielles totales [1] rattache directement ce fait capital aux propriétés générales les plus simples des séries entières.

2. Voici d'abord les propriétés spéciales des séries entières dont j'aurai à faire usage.

I. *Soit*

$$f(x, y, \ldots) = \Sigma a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots \tag{1}$$

la somme d'une série entière à un nombre quelconque de variables, admettant les rayons de convergence

$$R_x,\ R_y,\ \ldots;$$

soient encore $f_k(x, y, \ldots)$, $\varphi_k(x, y, \ldots)$ *la somme de ses* k *premiers termes et le reste correspondant, puis*

$$R'_x,\ R'_y,\ \ldots$$

d'autres quantités positives respectivement inférieures aux précédentes. Cela posé, et pour toutes les valeurs de variables, dont les modules $\xi, \eta, \ldots$ *n'excèdent pas* $R'_x, R'_y, \ldots$, *on peut assigner une quantité positive* M_k *indépendante de* $x, y, \ldots$ *telle qu'on ait sans cesse*

$$\operatorname{mod} \varphi_k(x, y, \ldots) < M_k, \tag{2}$$

avec

$$\lim M_k = 0, \tag{3}$$

pour k *infini.*

En posant $\alpha_{m,n,\ldots} = \operatorname{mod} a_{m,n,\ldots}$ et appelant $R''_x, R''_y, \ldots$ de nouvelles quantités positives choisies arbitrairement sous les conditions

$$R'_x < R''_x < R_x, \qquad R'_y < R''_y < R_y, \qquad \ldots,$$

l'expression $\alpha_{m,n,\ldots} R''^m_x R''^n_y \ldots$ tend vers zéro pour $m, n, \ldots$ infinis,

---

[1] *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales*, en collaboration avec M. Riquier (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, novembre et décembre 1889).

parce que, à l'intérieur des cercles de convergence de la série (1), les modules de ses termes sont aussi en série convergente. Il existe ainsi quelque quantité positive A donnant sans cesse

$$\alpha_{m,n,\ldots} R_x''^m R_y''^n \ldots < A,$$

par suite

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots) &= \alpha_{m,n,\ldots} \xi^m \eta^n \ldots \\ &= (\alpha_{m,n,\ldots} R_x''^m R_y''^n \ldots)\left(\frac{\xi}{R_x''}\right)^m \left(\frac{\eta}{R_y''}\right)^n \ldots < A\left(\frac{\xi}{R_x''}\right)^m \left(\frac{\eta}{R_y''}\right)^n \ldots,\end{aligned}$$

et à plus forte raison

$$\operatorname{mod}(a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots) < A\left(\frac{R_x'}{R_x''}\right)^m \left(\frac{R_y'}{R_y''}\right)^n \ldots.$$

La série ayant le second membre pour terme général étant convergente parce que toutes les fractions entre parenthèses sont < 1, cette inégalité entraînera évidemment les relations (2), (3), si l'on prend pour M_k le reste de la série dont il s'agit, arrêtée à son $k^{\text{ième}}$ terme.

II. *En tout système x_0, y_0, ... de valeurs des variables intérieures à ses cercles de convergence, la somme de la série* (1) *est une fonction continue de x, y, ...; on a, en d'autres termes,*

$$\lim f(x, y, \ldots) = f(x_0, y_0, \ldots).$$

La démonstration est trop connue pour qu'il soit utile de la reproduire.

3. Voici encore trois propositions générales des plus simples sur lesquelles j'aurai à m'appuyer.

I. *Quand on a*

$$\lim v = V,$$

on a aussi

$$\lim(\operatorname{mod} v) = \operatorname{mod} V.$$

Car on finit par avoir

$$\pm(\operatorname{mod} V - \operatorname{mod} v) \leqq \operatorname{mod}(V - v).$$

II. *Si*

$$P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_g x^g$$

est un polynôme entier en x de degré g, et si

(4) $$x_1, x_2, \ldots, x_G$$

désignent G *valeurs inégales de cette variable donnant, pour* $i = 1, 2, \ldots, G$, *les égalités numériques*

$$(5) \qquad P(x_i) = 0,$$

on a, ou bien

$$G \text{ non} > g,$$

ou bien identiquement

$$(6) \qquad P(x) = 0.$$

On rattache habituellement le fait en question à la théorie des équations entières à une inconnue; mais la démonstration suivante me paraît beaucoup plus naturelle.

Quand on a $G > g$, $g + 1$ des conditions numériques (5) prises au hasard fournissent, entre les $g + 1$ coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_g$, un système de $g + 1$ équations linéaires et homogènes dont le déterminant ne peut s'évanouir puisque sa valeur est égale, comme on le constate en effectuant son développement naturel, au résultat obtenu en multipliant par ± 1 le produit des différences des quantités inégales (4) combinées deux à deux de toutes les manières possibles. Ces équations donnent donc

$$p_0 = p_1 = \ldots = p_g = 0,$$

d'où l'identité (6).

III. *Quand les points qui représentent graphiquement les termes d'une suite illimitée de quantités quelconques*

$$v_1, v_2, \ldots, v_{m_n}, \ldots$$

sont tous intérieurs à quelque aire limitée, on peut extraire de cette suite une autre partielle également illimitée

$$v_{m_1}, v_{m_2}, \ldots, v_{m_n}, \ldots,$$

dont le terme général v_{m_n} *tend vers quelque limite pour* n *infini.*

On trouvera une démonstration de ce fait à la page 59 de mon *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale.*

4. Pour alléger davantage les raisonnements du numéro qui succédera à celui-ci, j'établirai préalablement le point suivant :

Il existe quelque quantité θ, *de module* 1, *dont aucune des puissances d'exposants entiers quelconques (positifs ou négatifs mais non nuls)* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \ldots, \mathfrak{s}$ *ne se réduit à* 1.

Comme aucun des polynômes entiers en x

$$x^{\pm\mathfrak{m}} - 1, \quad x^{\pm\mathfrak{n}} - 1, \quad \ldots, \quad x^{\pm\mathfrak{s}} - 1$$

n'est identiquement nul, le nombre des quantités inégales qui les annulent numériquement ne peut surpasser $\pm\mathfrak{m}$ pour le premier, $\pm\mathfrak{n}$ pour le second, ..., $\pm\mathfrak{s}$ pour le dernier (n° 3, II) et dès lors le nombre de celles qui annulent l'un ou l'autre indistinctement ne peut excéder $(\pm\mathfrak{m} \pm \mathfrak{n} \pm \ldots \pm \mathfrak{s})$. Un groupe quelconque de $(\pm\mathfrak{m} \pm \mathfrak{n} \pm \ldots \pm \mathfrak{s} + 1)$ quantités inégales de module 1 en contiendra donc certainement une au moins θ qui n'annulera aucun de ces polynômes et qui, par suite, donnera évidemment

$$(7) \qquad \theta^{\mathfrak{m}} \text{ non} = 1, \quad \theta^{\mathfrak{n}} \text{ non} = 1, \quad \ldots, \quad \theta^{\mathfrak{s}} \text{ non} = 1.$$

5. La proposition suivante équivaut à celle que je veux établir.

Parmi les valeurs de $x, y, \ldots$ *ayant pour modules les quantités positives*

$$r_x < R_x, \quad r_y < R_y, \quad \ldots,$$

et pour toutes lesquelles le module de $a_{p,q,\ldots} x^p y^q \ldots$, *terme choisi à volonté dans la série entière* (1), *conserve la valeur unique* $\alpha_{p,q,\ldots} r_x^p r_y^q \ldots$, *se trouve au moins un système particulier* X, Y, ... *donnant*

$$(8) \qquad \text{mod } f(X, Y, \ldots) \geqq \alpha_{p,q,\ldots} r_x^p r_y^q \ldots.$$

I. *En conservant les notations du n° 4, puis posant*

$$\varphi(x) = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}} x^{\mathfrak{m}} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{n}} x^{\mathfrak{n}} + \ldots + \mathfrak{a}_{\mathfrak{s}} x^{\mathfrak{s}},$$

où $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}$ *sont des constantes quelconques, et*

$$\Phi_m(x) = \varphi(x) + \varphi(\theta x) + \varphi(\theta^2 x) + \ldots + \varphi(\theta^{m-1} x),$$

on a pour m infini

$$(9) \qquad \lim \frac{\Phi_m(x)}{m} = \mathfrak{a},$$

quelle que soit la valeur particulière attribuée à x.

Les inégalités (7) ayant toutes lieu, on peut écrire

$$\Phi_m(x) = m\mathfrak{a} + \left[\frac{1-\theta^{m\mathfrak{m}}}{1-\theta^{\mathfrak{m}}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}x^{\mathfrak{m}} + \frac{1-\theta^{m\mathfrak{n}}}{1-\theta^{\mathfrak{n}}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{n}}x^{\mathfrak{n}} + \ldots + \frac{1-\theta^{m\mathfrak{s}}}{1-\theta^{\mathfrak{s}}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{s}}x^{\mathfrak{s}}\right],$$

où l'expression entre crochets est finie, puisque les modules de $\theta^{m\mathfrak{m}}$, ... conservent la valeur 1 quel que soit m, et qu'ainsi ceux des numérateurs $1-\theta^{m\mathfrak{m}}$, ... ne peuvent jamais surpasser 2. On obtient donc la relation (9), en divisant par m les deux membres de la dernière et y supposant ensuite cet entier infini.

II. Maintenant supposons d'abord que la série (1) se réduise à un polynôme entier à une seule variable x

$$(10) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_k x^k,$$

et qu'il s'agisse de prouver l'existence d'une quantité X de module r donnant

$$\operatorname{mod} f(X) \geqq \alpha_p r^p.$$

Si $\alpha_p = 0$ la chose est évidente; si non, en attribuant à x une valeur quelconque x_0 de module r, on tirera de la relation (10)

$$x_0^{-p} f(x_0) = a_p + a_0 x_0^{-p} + a_1 x_0^{-p+1} + \ldots + a_{p-1} x_0^{-1} + a_{p+1} x_0 + \ldots + a_k x_0^{k-p},$$

moyennant quoi, si l'on choisit une quantité θ de module 1 dont les puissances d'exposants

$$-p, \quad -p+1, \quad \ldots, \quad -1, \quad +1, \quad \ldots, \quad k-p$$

soient toutes non $= 1$ (n° 4), les quantités

$$x_0, \qquad x^{(1)} = \theta x_0, \qquad x^{(2)} = \theta^2 x_0, \qquad \ldots, \qquad x^{(m-1)} = \theta^{m-1} x_0$$

auront toutes r pour module et donneront (I)

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{m}\left[f(x_0) + \theta^{-p} f(x^{(1)}) + \theta^{-2p} f(x^{(2)}) + \ldots \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \theta^{-(m-1)p} f(x^{(m-1)})\right] = a_p x_0^p + e_m, \end{aligned} \right.$$

où e_m est une quantité infiniment petite pour m infini.

Les modules des termes de l'expression entre crochets sont précisément ceux de

$$f(x_0), \; f(x^{(1)}), \; \ldots, \; f(x^{(m-1)}),$$

parce que $\operatorname{mod}\theta^{ip} = (\operatorname{mod}\theta)^{ip} = 1$; en représentant donc par

$f(x_m)$ une de ces quantités dont le module n'est inférieur à aucun de ceux des autres, par ε_m le module infiniment petit de e_m et en prenant les modules des deux membres de la relation (11), il vient

$$(12) \qquad \frac{m \bmod f(x_m)}{m} = \bmod f(x_m) \geqq \alpha_p r^p - \varepsilon_m,$$

dès qu'on commence à avoir sans cesse $\varepsilon_m < \alpha_p r^p$.

Les quantités

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ \ldots,$$

tombant toutes sur la circonférence qui a l'origine pour centre et r pour rayon, c'est-à-dire à l'intérieur de quelque aire limitée, on peut (n° 3, III) extraire de leur suite une autre partielle

$$x_{m_1},\ x_{m_2},\ \ldots,\ x_{m_n},\ \ldots,$$

dont le terme général x_{m_n} tend vers une certaine limite X, et l'on a

$$\bmod \mathrm{X} = r$$

à cause de $\bmod x_{m_n} = \bmod x_m = r$ et de $\lim(\bmod x_{m_n}) = \bmod(\lim x_{m_n})$ (n° 3, I).

Cela posé, l'inégalité indéfinie (12) donne en particulier

$$\bmod f(x_{m_n}) \geqq \alpha_p r^p - \varepsilon_{m_n};$$

on a aussi pour n infini

$$\lim \varepsilon_{m_n} = 0,$$

d'où

$$\lim[\bmod f(x_{m_n})] \geqq \alpha_p r^p.$$

Il en résulte donc, en vertu de la continuité de $f(x)$ (n° 2, II) et aussi de $\bmod f(x)$ (n° 3, I),

$$\bmod f(\mathrm{X}) = \bmod f(\lim x_{m_n}) = \bmod[\lim f(x_{m_n})] = \lim[\bmod f(x_{m_n})] \geqq \alpha_p r^p.$$

III. Supposons en second lieu qu'il s'agisse d'une véritable série illimitée

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots$$

dépendant d'une seule variable x à laquelle on attribue exclusivement des valeurs de module constant r inférieur à quelque rayon de convergence R, et représentons par $f_{p+m}(x)$, $e_{p+m}(x)$ la

somme de ses $p+m+1$ premiers termes et le reste correspondant [1].

Comme $f_{p+m}(x)$ est un polynôme entier en x contenant, quel que soit m, le terme $a_p x^p$, on peut (II) assigner une suite illimitée de valeurs de x, toutes de module r

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ \ldots, \tag{13}$$

qui donnent sans cesse

$$\operatorname{mod} f_{p+m}(x_m) \geqq \alpha_p r^p; \tag{14}$$

pour m infini, on aura certainement en outre

$$\lim e_{p+m}(x_m) = 0, \tag{15}$$

parce que le module commun constant r des quantités (13) est inférieur au rayon de convergence R (n° 2, 1).

Ces quantités tombant toutes à l'intérieur de la circonférence qui a l'origine pour centre et R pour rayon, on peut extraire de la suite (13) une suite partielle dont le terme général x_{m_n} tend vers quelque limite X (n° 3, III). D'autre part, les relations (14), (15) donnent en particulier

$$\operatorname{mod} f_{p+m_n}(x_{m_n}) \geqq \alpha_p r^p,$$

quel que soit n, avec

$$\lim e_{p+m_n}(x_{m_n}) = 0$$

pour n infini.

Ces conclusions, combinées avec l'identité permanente

$$f(x_{m_n}) = f_{p+m_n}(x_{m_n}) + e_{p+m_n}(x_{m_n}),$$

---

[1] Par les moyens relativement simples auxquels j'ai fait allusion dans le n° 1, j'avais établi depuis bien longtemps la relation (8) avec le signe exclusif $>$, dans tous les cas où la série $f(x, y, \ldots)$ ne se réduit pas au monôme $a_{p,q,\ldots} x^p y^q \ldots$. Tout récemment M. Riquier a trouvé un moyen d'abréger sensiblement ma démonstration : il consiste à la conserver pour un polynôme, puis de là, mais en se bornant à l'alternative dont on peut toutefois se contenter, à l'étendre à une série proprement dite, par le raisonnement du présent alinéa III qui lui appartient. La communication que M. Riquier a bien voulu me faire à ce sujet a fixé mon attention sur la possibilité de réaliser de nouvelles simplifications en se restreignant à l'alternative dans tous les cas, et j'ai été conduit ainsi aux raisonnements des alinéas I et II du présent n° 5.

entraînent la relation finale

$$\operatorname{mod} f(x_{m_n}) \geqq \operatorname{mod} f_{p+m_n}(x_{m_n}) - \operatorname{mod} e_{p+m_n}(x_{m_n}) \geqq \alpha_p r^p - \operatorname{mod} e_{p+m_n}(x_{m_n}),$$

puis

$$\lim [\operatorname{mod} f(x_{m_n})] \geqq \alpha_p r^p,$$

et

$$\operatorname{mod} f(\mathrm{X}) \geqq \alpha_p r^p. \tag{16}$$

Effectivement on a comme tout à l'heure (II), à cause de la continuité de $f(x)$ (n° 2, II), et par suite de $\operatorname{mod} f(x)$ à l'intérieur du cercle de convergence (n° 3, I),

$$\operatorname{mod} f(\mathrm{X}) = \operatorname{mod} f(\lim x_{m_n}) = \operatorname{mod}[\lim f(x_{m_n})] = \lim[\operatorname{mod} f(x_{m_n})].$$

Or le module de X étant encore égal à r, module constant de x_{m_n}, la relation (16) est précisément celle que nous avions à établir dans le cas particulier où nous nous trouvons.

IV. Si enfin on nomme h le nombre des variables de la série proposée (1), et si l'on suppose la formule (8) établie pour toutes celles dépendant de 1, 2, ..., $(h-1)$ variables, ordonnons cette série par rapport à x de manière à avoir

$$f(x, y, \ldots) = \mathrm{A}_0(y, \ldots) + \mathrm{A}_1(y, \ldots)x + \ldots + \mathrm{A}_p(y, \ldots)x^p + \ldots,$$

où $\mathrm{A}_0(y, \ldots)$, ... sont des séries entières par rapport aux $(h-1)$ variables y, ... admettant R_y, ... pour rayons de convergence.

Comme la série $\mathrm{A}_p(y, \ldots)$ contient nécessairement le terme $a_{p,q,\ldots}y^q\ldots$, on peut par hypothèse trouver pour y, ... des valeurs Y, ... de modules r_y, ... donnant

$$\operatorname{mod} \mathrm{A}_p(y, \ldots) \geqq \alpha_{p,q\ldots} r_y^q \ldots.$$

On peut ensuite (III) assigner à x une valeur X de module r_x pour laquelle on aura

$$\operatorname{mod} f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots) \geqq \operatorname{mod} \mathrm{A}_p(\mathrm{Y}, \ldots) r_x^p$$

et partant, en vertu de la précédente inégalité,

$$\operatorname{mod} f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots) \geqq \alpha_{p,q\ldots} r_x^p r_y^q \ldots,$$

ce qui étend à notre série dépendant de h variables le théorème en question. Il est donc général puisqu'il a lieu pour $h = 1$ (III).

6. Le lemme de Cauchy que nous avons en vue s'énonce en ces termes.

Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est développable à partir des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$ par la formule de Taylor,

$$f(x_0+\mathfrak{x}, y_0+\mathfrak{y}, \ldots) = \Sigma f^{(m,n,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots) \frac{\mathfrak{x}^m}{1.2\ldots m} \frac{\mathfrak{y}^n}{1.2\ldots n} \cdots,$$

en une série entière par rapport aux accroissements $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$ admettant les rayons de convergence $R_{\mathfrak{x}}, R_{\mathfrak{y}}, \ldots$, cas auquel (n° 2, I) *on peut assigner une quantité positive* M *donnant*

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{mod} f(x_0+\mathfrak{x}, y_0+\mathfrak{y}, \ldots) < M,$$

pour toutes les valeurs de $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$ de modules

$$r_{\mathfrak{x}} < R_{\mathfrak{x}}, \qquad r_{\mathfrak{y}} < R_{\mathfrak{y}}, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire donnant

$$\operatorname{mod} f(x, y, \ldots) < M,$$

pour toutes les valeurs de $x, y, \ldots$, tombant sur les circonférences qui ont $x_0, y_0, \ldots$ pour centres, avec $r_{\mathfrak{x}}, r_{\mathfrak{y}}, \ldots$ pour rayons, on a, quels que soient les indices $p, q, \ldots$,

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{mod} f^{(p,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < M \frac{1.2\ldots p}{r_{\mathfrak{x}}^p} \frac{1.2\ldots q}{r_{\mathfrak{y}}^q} \cdots$$

Effectivement (n° 5), on peut trouver pour $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$ des valeurs $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots$ de module $r_{\mathfrak{x}}, r_{\mathfrak{y}}, \ldots$, rendant

$$\operatorname{mod} f(x_0+\mathfrak{X}, y_0+\mathfrak{Y}, \ldots) \geqq \frac{\operatorname{mod} f^{(p,q,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots)}{1.2\ldots p . 1.2\ldots q . 1 \ldots} r_{\mathfrak{x}}^p r_{\mathfrak{y}}^q \cdots,$$

et, comme l'inégalité (17) a pour cas particulier

$$M > \operatorname{mod} f(x_0+\mathfrak{X}, y_0+\mathfrak{Y}, \ldots),$$

la combinaison de ces deux dernières relations conduit immédiatement à l'inégalité (18).

SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES;

PAR M. B. MLODZIEIOWSKI.

Dans un Article paru en 1866 dans le *Journal de la Société mathématique de Moscou,* feu M. Peterson a donné des déformations à un paramètre de deux familles de surfaces. Les surfaces appartenant à l'une de ces familles ont pour équations, en coordonnées rectangulaires,

$$(1)\qquad x = a(u)\alpha(v), \qquad y = a(u)\beta(v), \qquad z = b(u),$$

et celles de l'autre famille

$$(2)\qquad x = a(u) + \alpha(v), \qquad y = \beta(v), \qquad z = b(u),$$

où a et b sont des fonctions de u, α et β des fonctions de v. Les surfaces (2) sont les surfaces de translation de M. Bianchi.

Il est facile de voir que toute surface du second ordre peut être représentée par des équations de la forme (1), en prenant pour axe des z l'un des axes de la surface; en outre, si cette surface est un paraboloïde, on peut aussi donner à ses équations la forme (2), en menant les plans xy et xz parallèlement à ses plans de symétrie. Par conséquent, les formules de M. Peterson donnent, comme cas particulier, une série de surfaces applicables sur les surfaces du second ordre. Ces formules sont pour les surfaces (1)

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h-1}\cos\int_{v_0}^{v}\frac{\sqrt{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2+(h-1)(\alpha'^2+\beta'^2)}}{\alpha^2+\beta^2+h-1}\,dv,\\ y &= a\sqrt{\alpha^2+\beta^2+h-1}\sin\int_{v_0}^{v}\frac{\sqrt{(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2+(h-1)(\alpha'^2+\beta'^2)}}{\alpha^2+\beta^2+h-1}\,dv,\\ z &= \int_{u_0}^{u}\sqrt{b'^2-(h-1)a'^2}\,du. \end{aligned}\right.$$

Ici h est le paramètre de la déformation, et a', b', α', β' désignent les dérivées de a, b, α, β, prises respectivement par rapport à u et à v. Pour les surfaces (2), les formules sont celles de

M. Bianchi

$$(4)\qquad \begin{cases} x = ah + \dfrac{\alpha}{h}, \\ y = \displaystyle\int_{v_0}^{v} \sqrt{\beta'^2 - \left(\frac{1}{h^2} - 1\right)\alpha'^2}\, dv, \\ z = \displaystyle\int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2 - (h^2 - 1)a'^2}\, du. \end{cases}$$

Dans les deux cas, les courbes $v =$ const. et $u =$ const. restent planes et conjuguées sur toutes les surfaces déformées. Sur les surfaces (3), les plans des courbes $v =$ const. passent par l'axe des z, tandis que, sur les surfaces (4), ces plans sont parallèles au plan xz. Les plans des courbes $u =$ const. sont dans les deux cas parallèles au plan xy.

Je me propose d'indiquer ici deux propriétés des déformations de M. Peterson. Rapportons les surfaces (1) et (3) aux coordonnées cylindriques r, θ, z; en posant

$$\alpha = \rho \cos\varphi, \qquad \beta = \rho \sin\varphi,$$

les équations de ces surfaces se changeront en

$$(5)\qquad r = a\rho, \qquad \theta = \varphi, \qquad z = b,$$

et

$$(6)\qquad \begin{cases} r = a\sqrt{\rho^2 + h - 1}, \\ \theta = \displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{\sqrt{\rho^4\varphi'^2 + (h-1)(\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2)}}{\rho^2 + h - 1}\, dv, \\ z = \displaystyle\int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2 - (h-1)a'^2}\, du. \end{cases}$$

Sous cette forme les équations des lignes $v =$ const. sur la surface primitive seront

$$r = a\rho, \qquad z = b,$$

et l'on voit que toutes ces courbes se déduisent de l'une d'elles, en allongeant les rayons vecteurs r dans un rapport ρ qui reste constant pour une même courbe, mais varie d'une courbe à l'autre. Les formules (6) montrent que cette propriété subsiste pour chacune des surfaces déformées, sauf que le facteur ρ y est remplacé par $\sqrt{\rho^2 + h - 1}$.

Quand les surfaces (1) ou (5) se déforment, les lignes $v =$ const. changent de forme et l'on peut montrer que ce changement est le même que pour les génératrices des surfaces de révolution. On sait, en effet, que la surface de révolution dont la génératrice est

$$r = a(u), \qquad z = b(u)$$

est applicable sur les surfaces de révolution qui ont pour génératrices les courbes

$$r = ah_1, \qquad z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2 - (h_1^2 - 1)a'^2}\, du.$$

En remplaçant a par $a\rho$, où ρ est un facteur indépendant de u, nous aurons pour la génératrice primitive et ses transformées les équations

$$r = a\rho, \qquad z = b,$$

$$r = a\rho h_1, \qquad z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2 - (h_1^2 - 1)a'^2\rho^2}\, du,$$

et si nous posons ici

$$\rho h_1 = \sqrt{\rho^2 + h - 1},$$

les deux dernières équations se changeront en

$$r = a\sqrt{\rho^2 + h - 1}, \qquad z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2 - (h - 1)a'^2}\, du.$$

En les comparant aux équations (6), nous voyons que ce sont les équations des lignes $v =$ const. des surfaces représentées par ces équations (6). Ainsi donc, ces lignes et les génératrices des surfaces de révolution se déforment de la même manière.

Ensuite, on peut faire voir que, lorsque dans les surfaces (1) la droite $x = 0$, $y = 0$, par laquelle passent les plans des lignes $v =$ const., s'éloigne à l'infini; ces surfaces (1) et leurs déformées ont pour limites les surfaces (2) et les déformées de celles-ci. Pour cela, changeons dans les formules (3) x en $x + l\sqrt{h}$ et a en $a + l$, l étant une constante, ce qui va donner

$$(7) \qquad \begin{cases} x = -l\sqrt{h} + (a + l)\sqrt{\rho^2 + h - 1}\cos\theta, \\ y = (a + l)\sqrt{\rho^2 + h - 1}\sin\theta, \\ z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2 - (h - 1)a'^2}\, du. \end{cases}$$

Si nous remplaçons ici la variable v par $w = w_0 + l(v - v_0)$, nous aurons

$$\theta = \int_{w_0}^{w} \frac{\sqrt{\rho^4 \varphi'^2 + (h-1)(\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2)}}{\rho^2 + h - 1}\, dw,$$

où les dérivées φ' et ρ' sont prises non plus par rapport à v, mais par rapport à w.

En choisissant convenablement les directions des axes des x et des y, en multipliant a et en divisant ρ par la valeur de ρ pour $v = v_0$, nous pourrons faire en sorte que pour $v = v_0$ il y ait $\varphi = 0$, $\rho = 1$. Nous poserons donc

$$\rho = 1 + \frac{1}{l} A(w), \qquad \varphi = \frac{1}{l} B(w),$$

et nous supposerons que, pour $l = \infty$, les fonctions A et B tendent vers les fonctions $\alpha(w)$, $\beta(w)$ qui restent finies ainsi que leurs dérivées pour les valeurs de w suffisamment voisines de w_0.

Faisons croître indéfiniment l. Comme on a

$$\rho' = \frac{1}{l}\frac{dA}{dw}, \qquad \varphi' = \frac{1}{l}\frac{dB}{dw},$$

θ tendra vers zéro pour les valeurs de w voisines de w_0, et l'on aura

$$\lim l\theta = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{w_0}^{w} \sqrt{\beta'^2 - \left(\frac{1}{h^2} - 1\right)\alpha'^2}\, dw.$$

Nous pourrons donc remplacer dans les formules (7) à la limite $\cos\theta$ par l'unité, $\sin\theta$ par θ, et nous obtiendrons finalement les expressions

$$x = a\sqrt{h} + \frac{\alpha}{\sqrt{h}},$$

$$y = \int_{w_0}^{w} \sqrt{\beta'^2 - \left(\frac{1}{h} - 1\right)\alpha'^2}\, dw,$$

$$z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2 - (h-1)a'^2}\, du.$$

qui ne diffèrent des formules (4) que par les notations.

Il existe une famille plus générale de surfaces à laquelle la

transformation de M. Peterson s'applique également. C'est celle-ci :

$$(8)\quad \begin{cases} x = a\rho\cos\varphi + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \gamma \frac{d(\rho\cos\varphi)}{dv}\,dv, \\ y = a\rho\sin\varphi + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \gamma \frac{d(\rho\sin\varphi)}{dv}\,dv, \\ z = b, \end{cases}$$

a, b désignant, comme précédemment, des fonctions de u ; ρ, φ désignant des fonctions de v, et γ étant une nouvelle fonction de la même variable v. Les déformations de ces surfaces sont données par les formules

$$(9)\quad \begin{cases} x = a\sqrt{\rho^2+h-1}\cos\theta + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \gamma \frac{d\left(\sqrt{\rho^2+h-1}\cos\theta\right)}{dv}\,dv, \\ y = a\sqrt{\rho^2+h-1}\sin\theta + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \gamma \frac{d\left(\sqrt{\rho^2+h-1}\sin\theta\right)}{dv}\,dv, \\ z = \displaystyle\int_{u_0}^{u} \sqrt{b'^2-(h-1)a'^2}\,du, \end{cases}$$

où

$$\theta = \int_{v_0}^{v} \frac{\sqrt{\rho^4\varphi'^2+(h-1)(\rho'^2+\rho^2\varphi'^2)}}{\rho^2+h-1}\,dv.$$

Pour ρ indépendant de v, on obtient de ces formules les déformations connues des surfaces moulures, tandis qu'en posant $\gamma = 0$ on retrouve les formules (1) et (3).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Buka (Félix). — *Elemente der kinematischen Geometrie des zweigliedrigen ebenen Systems.* Programm des Realgymnasiums in Charlottenburg. 27 S. m. 2 lithogr. Tafeln.

Davis (E.-W.). — *An Introduction to the Logic of Algebra;* illustrative Exercises. 8°. New-York, 7 sh. 6 d.

Gauss (F.). — *Ueber Curven, welche die Eigenschaft haben, dass zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrentzen Bogen*

in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Progr. des Gymnas. zu Bunzlau, 26 S.

GAUSS (F.). — *Die Theilung der Grundstücke, insbesondere unter Zugrundelegung rechtwinkeliger Coordinaten.* 2. Aufl. 8°, 136 u. 60 S. Berlin, v, Decher. Geb., 6 M.

GEGENBAUER (L.). — *Ueber einen arithmetischen Satz des Herrn Charles Hermite* (Sonderdr.). Lex.-8°, 17 S. Leipzig, Freytag, 40 Pf.

GOURSAT (E.). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Gr. in-8°, 358 p. Paris, Hermann.

HEIS (E.). — *Sammlung von Bespielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra.* Ausgabe für die Schulen Oesterreichs. Gr. 8°, IV, 420 S. Köln, Du Mont-Schauberg. 3 M.

LAURENT (H.). — *Traité d'Analyse.* T. VI : Calcul intégral. Équations différentielles partielles. In-8°, 343 p. Paris, Gauthier-Villars, 8 fr. 50 c.

LIETKE (A.). — *Ueber die Flächen, für welche eine Krümmungscentralfläche ein Kegel zweiten Grades ist.* Gr. 8°, 36 S. m. 1 Tafel. Kœnigsberg, Koch, 1 M.

NUSSTEIN (TH.). — *Ueber Kegelschnittpaare, von denen der eine Kegelschnitt einem Vierecke umgeschrieben, der andere dem Kegelschnitt eingeschrieben ist.* Progr. der Studienanstalt zu Münnerstadt. 53 S. 8°.

GREENHILL (A.-G.). — *Trajectoire d'un projectile dans le cas où la résistance de l'air est proportionnelle au cube de la vitesse.* Traduit de l'anglais par Gossot. In-8°, 68 p. Paris, Baudoin et Cie.

POINCARÉ (H.). — *Cours de Physique mathématique.* Électricité et Optique. I, Les Théories de Maxwell et la Théorie électromagnétique de la lumière. Gr. in-8°, XX-312 p. avec figures. Paris, Carré.

DIRICHLET'S, G. LEJEUNE, *Werke.* — Herausgegeben auf Veranlassung der kgl. preuss. Akademie der Wissenchaften von L. Kronecker. (In 2 Bänden). 1 Bd. Gr. 4°, X, 644 S. mit Bildniss und Photograv. Berlin, G. Reimer, 21 M.

ENNEPER (A.). — *Elliptische Functionen.* Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge. 2. Aufl. Bearb. von F. Muller. Gr. 8°, XIX, 588 S. Halle, Nebert, 22 M. 50 Pf.

GRAF (J.-H.). — *Der Mathematiker Johann Samuel König und das Princip der kleinten Action.* 46 S. 8°. Programm der Loberschule in Bern.

KÖNIGSBERGER (L.). — *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit unabhängigen Variabeln.* Gr. 8°, IV, 485 S. Leipzig, Teubner, 8 M.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Cours d'Algèbre à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales, etc.* 2 vol. in-8°, t. I, II, 389 p. ; t. II, 512 p. Paris, Collin et Cie.

WEILER (A.). — *Neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie.* Gr. 8°, VII, 210 S. m. 109 Fig. Leipzig, Teubner, 6 M.

BATTAGLINI (G.). — *Elementi di Calcolo infinitesimale.* 8°. Napoli, Tip. dell' Accademia delle Scienze, 6 L.

MÉRAY (CH.). — *Les fractions et les quantités négatives.* Nouvelle théorie élémentaire. In-8°, 27 p. Paris, Gauthier-Villars, 75 c.

MÉRAY et RIQUIER. — *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales.* In-4°, 26 p. Paris, Gauthier-Villars, 1 fr. 50 c.

PENSELER (G.). — *Eine lineare Differentialgleichung, 5. Ordnung,* mit 2 endlosen singulären Stellen. Gr. 4°, 23 S. Kiel, Lipsius et Tischer, 1 M. 20 Pf.

POULAIN (A.). — *Coup d'œil sur l'Histoire des Mathématiques.* In-8°, 347 p. Paris, Retaux-Bray.

SALMON (G.). — *Leçons d'Algèbre supérieure.* Traduit de l'anglais par O. Chemin, 2e édit. française. In-8°, XVIII-576. Paris, Gauthier-Villars, 10 fr.

SCHWARZ (A.). — *Zur Theorie der reellen linearen Transformationen u. der Lobatschewsky'schen Geometrie* (Sonderdr.). Lex. 8°, 38 S. Leipzig, Freytag, 70 Pf.

CARVALLO (E.). — *Influence du terme de dispersion de Briot sur les lois de la double réfraction.* In-4°, 44 p. Paris, Gauthier-Villars.

MATHIEU (E.). — *Traité de Physique mathématique.* Théorie de l'élasticité des corps solides. Ire Partie : Considérations générales sur l'élasticité ; Emploi des coordonnées curvilignes; Problèmes relatifs à l'équilibre d'élasticité; Plaques vibrantes. In-4°, VIII-219 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 11 fr.

MESLIN (G.). — *Sur la polarisation elliptique des rayons réfléchis et transmis par des lames métalliques minces.* In-4°, 124 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

BARBERA (L.). — *Teoria dell' intangibilita delle funzioni e dei massimi e minimi degli integrali definiti.* 8°. Bologna, Gamberini et Parmeggiani, 6 L.

BIEHLER (CH.). — *Notes de Géométrie analytique sur les surfaces du second ordre.* In-8°, 52 p. Paris, Gauthier-Villars, 1 fr. 75 c.

BOUSSINESQ (J.). — *Cours d'Analyse infinitésimale, à l'usage des personnes qui étudient cette science en vue de ses applications mécaniques et physiques.* T. II : Calcul intégral, 2 vol. in-8°. Fasc. I : Partie élémentaire, XXVI-270 p.; Fasc. II : Compléments, XX-580 p. Paris, Gauthier-Villars. Fasc. I : 7 fr. 50 c.; Fasc. II : 16 fr.

BUSOLT (M.). — *Behandlung der conformen Abbildung der Oberflächen 2. Ordnung.* Gr. 8°, 96 S. Kœnigsberg (Koch), 1 M. 20 Pf.

JAHRBUCH. — *Ueber die Fortschritte der Mathematik.* Herausgegeben von M. Henoch und E. Lampe. 19. Bd. Jahrg. 1887. 3. Heft. Gr. 8°, LXXIV u. S. 865-1297. Berlin, G. Reimer, 11 M.

SCHRÖN (L.). — *Tables de logarithmes à sept décimales pour les nombres depuis 1 jusqu'à 108000 et pour les fonctions trigonométriques de dix en dix secondes.* Édition stéréotype, 23e tirage. In-8°, XXVIII-550 p. Paris, Gauthier-Villars, 10 fr.

BLUTEL (E.). — *Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré.* In-4°, 69 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

FERRERS (N.-M.). — *An elementary Treatise on trilinear coordinates, the reciprocal polars and the Theory of projections.* 4e edit., post-8°, 196 p. London, Macmillan, 6 sh. 6 d.

FINK (K.). — *Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik mit Hinweisen auf die sich anschliessenden höheren Gebiete.* Gr. 8°, X, 269 S. Tübingen, Laupp, 4 M.

GRIFFITHS (J.). — *Notes on the application of the Theory of elliptic transformation to the formation of semi-covariants and semi-invariants.* 8°, 18 p. Oxford (London, Simpkin), 1 sh.

JOACHIMSTHAL (F.). — *Anwendung der Differential und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung.* 3. *Aufl., bearbeitet von L. Natani.* Gr. 8°, X, 308 S., m. Fig. Leipzig, Teubner, 6 M.

LONGCHAMPS (G. DE). — *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre.* In-8°, XIV-367 p. Paris, Delagrave.

RIVEREAU (P.). — *Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées.* In-4°, 139 p. Paris, Gauthier-Villars.

ANDRADE (J.). — *Sur le mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux corps fixes, et sur l'extension d'une propriété des mouvements keplériens.* In-4°, 63 p. Paris, Gauthier-Villars.

LECORNU (L.). — *Problème d'Hydrostatique.* In-4°, 24 p. et planche. Caen, Delesques.

THOMSON (Sir W.). — *Mathematical and Physical Papers.* Vol. 3. Elasticity, Heat, Electro-Magnetism, collected from different scientific Periodicals, from May 1841 to the present time, with supplementary Articles written for the present volume and hitherto unpublished. 8°, 516 p. London, Clay, 18 sh.

BARLOW'S. — *Tables of squares, cubes, square roots, cubes roots, reciprocals of all integer numbers up to* 10000. New edit. post.-8°, 200 p. London. Spon, 6 sh.

SCHWARZ (H.-A.). — *Gesammelte mathematische Abhandlungen.* 2 Bd. Lex.-8°, XI, 388 u. VII, 360 S. m. 93 Textfig. u. 4 Taf. Berlin, Springer. 26 M.; geb. 28 M.

THIENEMANN (W.). — *Ueber eine transcendente Minimalfläche, welche eine Schaar algebraischer Raumcurven 4. Grades enthält.* Gr. 8°, 22 S. Leipzig, Fock, 80 Pf.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WEBER (H.). — Elliptische Functionen und Algebraische Zahlen. 1 vol. in-8°, XIII-504 p. Braunschweig, Vieweg und Sohn; 1891.

Le Livre que vient de faire paraître M. H. Weber rendra à ceux qui étudient les Mathématiques des services singulièrement précieux : la mort, qui a empêché Halphen de terminer une œuvre qui, bien qu'incomplète, restera un de ses titres de gloire, nous a privés en partie du Volume où les applications à l'Algèbre et à l'Arithmétique de la Théorie des fonctions elliptiques auraient été traitées avec une pénétration et une lucidité dont tous ceux qui avaient lu ses deux premiers Volumes pouvaient être assurés. Il est inutile de dire combien un travail d'ensemble sur cette matière si difficile et si riche était nécessaire; on sera heureux de le trouver dans le Livre de M. Weber.

Dans sa Préface, l'auteur a mis quelques lignes touchantes sur l'émulation qu'il ressentait, alors qu'il composait son Livre, en pensant qu'il travaillait la même matière qu'Halphen, et sur la surprise douloureuse qu'il éprouva en apprenant la mort de ce dernier. Tout le monde saura gré à M. Weber de la façon dont il a parlé d'un homme qui occupait, dans la science française, une place si haute et si particulière.

C'est, en effet, les applications à l'Algèbre et à l'Arithmétique que M. Weber a visées en écrivant ces *Fonctions elliptiques*, et l'on sent cette préoccupation, même dans la partie où il expose leurs propriétés élémentaires. Cette partie d'ailleurs est la plus courte et ne comprend guère que le tiers de l'Ouvrage : c'est une introduction indispensable au reste.

La manière d'écrire de M. Weber est très remarquable par sa concision; tout est extrêmement condensé : on en donnera quelque idée en disant que les notions de pure Algèbre qu'il a cru, avec grande raison, devoir mettre en tête de la *partie algébrique*, sont contenues dans vingt-cinq pages, et qu'elles comprennent les propositions élémentaires de la théorie des groupes, la notion de groupe abélien, le concept de corps algébrique, celui de groupe et de résolvante de Galois, les propriétés fondamentales des équa-

tions abéliennes, enfin les notions indispensables sur les nombres algébriques entiers et les fonctions algébriques entières d'une variable. La savante concision de l'auteur ne nuit d'ailleurs pas à la clarté, mais elle exige chez celui qui l'étudie une forte tension d'esprit.

Dans la première Partie (*Analytischer Theil*), qui contient la théorie proprement dite des fonctions elliptiques, M. Weber prend, comme point de départ, les intégrales elliptiques et les formes normales de Legendre et de Weierstrass : il expose, dès le début, le principe de la transformation dans le sens de Jacobi; le théorème d'addition est déduit du théorème d'Abel.

Il passe ensuite aux fonctions ϑ qu'il introduit par un procédé qui peut être regardé comme une généralisation de celui que M. Hermite a rendu familier : il emploie la notation à deux indices qui, au point de vue où il s'est placé, est en quelque sorte nécessaire; la théorie de la transformation des fonctions ϑ est traitée avec détail, non seulement pour le cas de la transformation linéaire, mais encore pour celui où l'une des périodes est divisée par un nombre entier. C'est à propos de la transformation que les fonctions σ de M. Weierstrass sont introduites. Signalons encore, dans ce Chapitre, l'étude des propriétés des fonctions

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{12}}\Pi(1 - q^{2n}),$$

$$f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}}\Pi(1 + q^{2n-1}),$$

$$f_1(\tau) = q^{-\frac{1}{24}}\Pi(1 - q^{2n-1}),$$

$$f_3(\tau) = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{12}}\Pi(1 + q^{2n}),$$

où τ désigne le rapport des périodes et où, dans les produits infinis, n doit prendre les valeurs entières à partir de un. Ces fonctions jouent, comme on sait, un rôle considérable tant dans la théorie algébrique de la transformation que dans les applications à la théorie des nombres. L'auteur a maintenant tout ce qu'il lui faut pour établir les propriétés élémentaires des fonctions elliptiques; l'étude de ces fonctions, l'introduction des fonctions modulaires et deux courtes applications relatives à la surface de l'ellipsoïde et à la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, complètent cette première Partie.

La seconde Partie (*Algebraischer Theil*), débute par un Chapitre d'introduction, dont nous avons parlé plus haut. L'auteur développe ensuite la théorie de la multiplication et de la division; les formules de multiplication sont données pour les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, pu; la théorie de la division est faite avec les trois premières fonctions : on trouvera là l'étude du groupe de Galois pour l'équation de la division des périodes et le passage de cette équation aux équations de transformation, dans le sens le plus général.

Après avoir distingué, comme cas particulier des équations de transformation, les équations modulaires et les équations au multiplicateur, l'auteur donne diverses expressions des racines des équations de transformation; il étudie ensuite l'équation relative à l'invariant j de M. Weierstrass, et quelques autres qui lui sont liées; il expose enfin les belles recherches de M. Schläfli sur les équations modulaires.

Le groupe de Galois pour les équations de transformation, dans le cas où le degré de transformation est un nombre premier, est étudié d'une manière approfondie; c'est cette étude qui, dans le cas où le degré de transformation est égal à 5, conduit à la résolution de l'équation du cinquième degré.

La troisième Partie de l'Ouvrage (*Zahlentheoretischer Theil*) se rapporte aux applications arithmétiques de la théorie. C'est la *multiplication complexe* qui en est le point de départ. Après avoir montré comment, pour qu'une fonction doublement périodique soit susceptible d'une multiplication complexe, c'est-à-dire pour que la fonction qu'on en déduit en remplaçant l'argument u par mu, en supposant que m soit un nombre imaginaire, admette comme périodes les périodes de la fonction primitive, il faut que le rapport τ des périodes soit la racine, à partie imaginaire positive, d'une équation du second degré à coefficients entiers et à déterminant négatif

$$A\tau^2 + B\tau + C = 0;$$

il introduit le nombre $j(\tau)$ comme *invariant de classe,* dénomination évidemment légitime, puisque la fonction $j(\tau)$ ne peut prendre, en général, des valeurs égales que pour des nombres τ équivalents qui, dans le cas particulier, seront racines d'équations provenant de formes quadratiques équivalentes; il y a d'ailleurs

lieu de distinguer le cas où la forme est de première espèce, c'est-à-dire où B est pair, de celui où la forme est de seconde espèce (B impair). Les invariants de classe sont des nombres algébriques entiers; M. Weber apprend à former les *équations de classe* auxquelles ils satisfont.

Il y a d'ailleurs lieu de considérer au lieu de l'invariant $j(\tau)$ d'autres invariants de classe, provenant d'autres fonctions modulaires que la fonction j, en particulier des fonctions f, f_1, f_2 définies plus haut et qui conduisent à des relations moins compliquées; la détermination de ces invariants de classe est l'objet d'un important Chapitre, où l'on utilise en particulier la forme donnée par M. Schläfli aux équations modulaires, et qui se termine par la formation des résolvantes du 7e et du 11e degré, dans le cas d'un degré de transformation égal à 7 ou à 11.

Après avoir établi, dans le cas le plus simple, la belle relation découverte par M. Kronecker entre les nombres de classes de formes quadratiques à déterminant négatif, l'auteur traite de la décomposition de l'équation de classe, décomposition qui est liée à la distinction des formes quadratiques en espèces, d'après Gauss. L'étude du groupe de Galois, pour une équation de classe, dépend de la notion de la composition des formes quadratiques et conduit à cette conclusion, qu'en adjoignant la racine carrée du déterminant de la forme quadratique, l'équation de classe est une équation abélienne et peut, comme telle, être résolue par radicaux. La preuve de l'irréductibilité de l'équation de classe implique des concepts d'ordre élevé dans le domaine de l'Arithmétique et de l'Algèbre qui peuvent être présentés de points de vue assez différents, où se sont placés, d'une part, M. Kronecker dans sa *Festschrift,* et, d'autre part, M. Dedekind, dans un supplément bien connu aux Leçons de Dirichlet sur la théorie des nombres. C'est ce dernier point de vue qu'adopte M. Weber.

M. Weber établit ensuite l'expression si curieuse que M. Kronecker a donnée de la limite pour $s = 1$ de l'expression

$$\sum \frac{1}{(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)^s} = \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{m}},$$

où la forme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ est positive et où $m = AC - B^2$, relation qui fournit une ouverture précieuse pour l'étude des

normes des invariants de classe et le calcul de ces invariants.

Le dernier Chapitre est consacré à la division des fonctions elliptiques à modules singuliers.

Nous espérons que le résumé qui précède, si bref qu'il soit, aura donné au lecteur quelque idée de la richesse des matières traitées par M. Weber. Son Livre est la première exposition d'ensemble sur un sujet aussi difficile qu'intéressant et qui ne sera pas épuisé d'ici longtemps; et cette exposition se suffit à elle-même, l'auteur ayant eu soin d'extraire des théories d'Arithmétique et d'Algèbre qui touchent à son sujet tout ce dont il avait strictement besoin, en renvoyant aux Ouvrages spéciaux ceux de ses lecteurs qui voudraient approfondir ces théories. Ils n'y manqueront pas assurément : la connaissance d'une proposition implique le désir de connaître les propositions voisines, et c'est ainsi que les vérités scientifiques s'accumulent et s'organisent dans l'esprit. Rien n'aide plus à cette organisation des connaissances que l'étude d'un sujet comme celui qu'a développé M. Weber, où viennent se réunir des théories de nature très diverse, dont chacune, prise en elle-même, émerveille sans doute celui qui s'y enferme pour l'étudier par l'étendue de ses ramifications et de ses développements, mais en lui laissant comme une inquiétude sur leur valeur et leur raison d'être. Ceux qui aiment l'Algèbre seront reconnaissants envers M. H. Weber du Livre qu'il vient de publier et qui leur permettra désormais d'aborder la lecture des Mémoires originaux avec des vues d'ensemble sur des théories auxquelles il était auparavant difficile de s'initier. J. T.

FULST (O.). — Bestimmung des Flächeninhalts des Mantels eines schiefen Kegels mit elliptischer Grundfläche. Inaugural-Dissertation, 33 p. in-8°. Göttingen, Kaetsner, 1890.

Le problème de la détermination de l'aire d'un cône du second degré limité à son sommet d'une part et de l'autre à une section plane elliptique a été l'objet de nombreux travaux relatifs aux cas où la section est circulaire, ou, d'une façon plus générale, perpendiculaire à un plan de symétrie. M. Fulst, dans l'introduction historique placée au début de sa dissertation inaugurale, signale

les travaux de Legendre (*Fonctions elliptiques*, t. I, p. 329); G. Hoüel (*Desideratur commentatio de coni scaleni proprietatibus...;* Groningen, 1833), Tröger (*Die Seitenfläche des schiefen Kegels...;* Danzig, 1852), Schellbach (*Die Lehre von den elliptischen Integralen...;* Berlin, 186 p., p. 324), Weierstrass (dans son enseignement), Pfeiffer (*Formeln für der Inhalt der Kegelfläche...;* Berlin, 1882), Schindler (*Bestimmung der Seitenfläche des schiefen Kegels mit elliptischen Basis;* Elbing, 1866).

La méthode suivie par M. Fulst lui a été indiquée par M. Schwarz : elle consiste essentiellement à déterminer chaque génératrice du cône par le paramètre λ qui caractérise le cône homofocal au cône proposé passant par cette génératrice; l'élément de l'aire du cône est la moitié du produit du carré d'une génératrice par l'angle de cette génératrice et d'une génératrice infiniment voisine, et l'auteur parvient à son expression par un calcul très simple. L'aire du cône, après des changements de variable insignifiants, s'exprime au moyen d'une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{(a_1\sqrt{s-e_1}+a_2\sqrt{s-e_2}+a_3 i\sqrt{s-e_3})^2}\,\frac{ds}{\sqrt{i(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}},$$

où a_1, a_2, a_3, e_1, e_2, e_3 sont des constantes réelles qui dépendent d'une façon simple des données, à savoir les deux axes de l'ellipse de section et les coordonnées elliptiques du sommet, pour un système de surfaces homofocales dont l'ellipse de section fait partie. Pour avoir l'aire du cône, on doit multiplier l'intégrale précédente, prise entre des limites convenables, par un facteur qui s'exprime algébriquement au moyen des données.

En introduisant ensuite la fonction pu relative aux trois racines e_1, e_2, e_3, l'intégrale précédente prend la forme

$$\int_{\omega'}^{\omega'+4\omega} \frac{du}{\left(a_1\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}+a_2\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}+a_3 i\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2},$$

le chemin d'intégration étant rectiligne.

L'expression

$$\varphi(u)=a_1\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}+a_2\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}+a_3\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

admet les périodes 4ω, $4\omega'$; pour déterminer les zéros, on prend pour inconnue $s = pu$, et l'on obtient une équation en s du second degré à racines imaginaires; d'où quatre séries de zéros pour la fonction $\varphi(u)$. L'auteur décompose ensuite, en éléments simples, l'expression

$$\frac{1}{\varphi^2(u)},$$

par la méthode classique, et parvient ainsi à l'expression finale de l'intégrale au moyen des fonctions ϑ. Il résume avec soin l'ensemble des calculs numériques à effectuer.

Il ne reste plus à M. Otto Fulst, pour épuiser le sujet, qu'à examiner les simplifications qui se produisent, dans ses formules générales, lorsque l'on se trouve dans un des cas particuliers qui avaient été traités avant lui. C'est ce qu'il fait dans les dernières pages de son intéressant travail, en considérant des cas de plus en plus particuliers : d'abord celui où le pied de la perpendiculaire, abaissée du sommet du cône sur le plan de la section, tombe sur l'un ou l'autre des axes de cette section, ce qui donne lieu à deux calculs distincts; puis celui où la section est circulaire, celui enfin où le cône est de révolution. J. T.

MÉLANGES.

LES AUTOGRAPHES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE;

PAR M. PAUL TANNERY.

DEUXIÈME ARTICLE.

IV. Dans un Appendice à son remarquable Ouvrage sur Descartes [1], M. Liard avait donné, d'après un relevé fait par le marquis de Queux de Saint-Hilaire, une liste des lettres auto-

[1] *Descartes*, par Louis Liard; Paris, Germer-Baillière et Cie, 1882. — Le Chapitre de ce volume où il est traité de la Mathématique universelle (pages 35 à 63) renferme la meilleure appréciation que je connaisse du véritable but de la *Géométrie* de Descartes.

graphes de notre grand philosophe existant dans la collection de lord Ashburnham. Mais cette liste ne correspondait qu'à un seul dossier et se trouvait dès lors incomplète : aussi M. Liard ne relevait que trois lettres inédites; nous en trouvons neuf, comme on l'a vu, dans le MS. de la Nationale fr. n. a. 5160.

Il serait évidemment du plus haut intérêt de déterminer avec précision combien de pièces inédites existaient dans la collection de l'Académie des Sciences, et combien de ces pièces restent encore perdues, à la suite des vols de Libri. Baillet, qui a vu la collection complète à la fin du XVIIe siècle, parle d'une trentaine d'inédits; mais cette indication ne peut être acceptée sans contrôle, car rien ne nous assure que toutes les lettres réellement publiées par Clerselier d'après des minutes, dont le début diffère souvent de celui des originaux, eussent été identifiées au moment où Baillet écrivait.

Nous possédons heureusement un document presque complet qui nous représente l'état de la collection à la vérité un siècle plus tard, mais à un moment où elle n'avait encore subi aucune perte. C'est un relevé fait, sous la Révolution, de la main de dom Poirier et qui comporte 77 numéros, avec indication pour chacun d'eux de la date et renvoi à l'édition de Clerselier, en ce qui concerne les pièces déjà publiées. Ce précieux document a été reproduit par M. Léopold Delisle, dans son *Catalogue des Manuscrits des Fonds Libri et Barrois* (Paris, Champion, 1888), à la suite de l'inventaire sommaire des pièces contenues dans le MS. fr. n. a. 5160.

Pour les années 1638 et 1639 (n°s 6 à 21), le relevé de dom Poirier est identique avec celui qui nous reste, pour les mêmes années, de la main d'Arbogast. Pour les autres années, le même relevé concorde exactement avec les numéros que nous avons signalés comme inscrits entre parenthèses au haut des autographes du fonds Libri. Nous sommes donc en présence du classement que j'ai attribué à Arbogast, et que je continuerai à désigner sous ce dernier nom, quoique dom Poirier, semble-t-il, y ait au moins contribué.

Or, d'après le relevé en question, il y aurait eu 25 pièces inédites [1]; mais il convient d'exclure :

---

[1] Dom Poirier signale encore, comme inédite, la fin du n° 14, qui correspond

a. Le n° 31, daté de Leyde le 28 octobre 1640 et qui doit être le n° 37 de Lahire = Clerselier, II, 44.

b. Le n° 46, lettre à Mersenne du 23 mars 1643, correspondant au début (très incomplet) de la lettre Clerselier, II, 116 (questions de Mécanique) : Libri a publié le texte de l'autographe dans son premier article sur les Manuscrits de Fermat (*Journal des Savants,* septembre 1839).

c. Le n° 57, du 2 novembre 1646, qui doit être identifié avec le n° 66 de Lahire = Clerselier, III, 96 (polémique contre Roberval).

d. Le n° 68, indiqué comme une copie en français d'une lettre de Descartes au P. Bourdin. C'est probablement le n° 82 de Lahire, correspondant à la lettre Clerselier, III, 15. Si cette dernière est en latin, on doit simplement conclure que la pièce de la collection était, non une copie, mais une version de l'original.

e. Le n° 77 qui est la lettre à Meissonnier sur la glande pinéale (Clerselier, II, 36), signalée par Arbogast comme étant à la fin de la collection des lettres de Descartes à l'Académie des Sciences et que nous retrouvons précisément à la fin du MS. de la Nationale [1].

Restent donc *vingt* lettres de Descartes inédites; sur ce nombre, *huit* figurent parmi celles que nous avons énumérées comme rentrées à la Nationale; ce sont celles qui portent les numéros de classement d'Arbogast : 37, 47, 53, 55, 56, 58, 60, 69. Les *douze* autres sont les suivantes :

A. 34, à Mersenne, du 31 mars 1641 (actuellement rentrée à la Bibliothèque de l'Institut). (*Voir* le *Journal des Savants* d'août 1884.)

B. 35, à Mersenne, du 27 mai 1641.

C. 36, à Mersenne, du 16 juin 1641.

D. 43, à Mersenne, du 4 janvier 1643.

E. 54, à Mersenne, du 5 octobre 1646 (actuellement à la Bibliothèque Victor Cousin).

F. 59, à Mersenne, du 14 décembre 1646.

à la Lettre Clerselier, III, 74 (réponse aux questions numériques de Ste-Croix). Mais cette fin (polémique contre Roberval) n'est autre que la Lettre Clerselier, III, 59.

[1] Si cette Lettre ne porte pas le numéro de classement, il ne faut voir là qu'un accident facilement explicable.

G. 61, à Mersenne, du 13 décembre 1647.

H. 62, à Mersenne, du 31 janvier 1648.

I. 63, à Mersenne, du 7 février 1648 (actuellement à la Bibliothèque Victor Cousin).

J. 64, à Mersenne, du 4 avril 1648.

K. 70, à Mersenne, présumée de 1647.

L. 74. Sujet de la gageure mathématique entre Wassenaer et Stampion, pour laquelle Descartes fut choisi comme arbitre en 1639.

V. Ainsi, il y aurait encore aujourd'hui, dispersées et restant à retrouver, *neuf* pièces inédites provenant de la collection de l'Académie des Sciences, telle que l'avaient classée Arbogast et dom Poirier.

Mais nous avons mentionné plus haut, pour la collection classée par Lahire, un n° 82, supérieur au plus élevé d'Arbogast. Reste donc à savoir quelles pièces ont figuré dans le premier classement, non dans le second, et à rechercher si, parmi ces pièces, il n'y en avait point quelques autres inédites.

Nous pouvons remarquer tout d'abord que, dans le MS. fr. n. a. 5160, nous rencontrons, d'après l'énumération que nous avons faite, *six* pièces qui n'ont pas été comprises dans le classement d'Arbogast.

Ces *six* pièces comprennent *quatre* autographes (dont un inédit) et deux copies. Or les quatre autographes ont certainement fait partie de la collection de Lahire. Nous pouvons d'ailleurs constater le motif de leur exclusion dans le second classement; ces autographes sont des fragments ou des parties de lettres incomplètes; ils ont en conséquence été mis à part, tout en restant conservés à côté des 77 numéros classés, et probablement ils ont été l'objet d'un relevé spécial, malheureusement perdu.

Pour les trois autographes publiés par Clerselier, nous connaissons, par les Notes de Legrand, les numéros du classement de Lahire, à savoir 13 pour la lettre Clerselier, III, 62; 18 pour la lettre II, 91; 6 pour la lettre II, 66. Ces numéros sont d'ailleurs bien ceux qui figurent au bas des premières pages desdits autographes.

Le premier (polémique de Descartes contre Fermat, et critique

de la *Géostatique* de Beaugrand) porte, au crayon seulement, la date du 27 mai 1638. Dans le relevé de dom Poirier, on trouve, sous le n° 8, une pièce de la même date, mais il s'agit de la lettre Clerselier, III, 68 = Cousin, VII, 83, dont l'autographe portait le n° 14, et non 13, dans le classement de Lahire. Legrand affirme d'ailleurs que le n° 13 n'était point daté et il le considère comme étant du 30 juin 1638. La date au crayon a donc été mise postérieurement (probablement par Arbogast).

Mais, s'il a regardé cette pièce comme devant être rattachée à la lettre III, 68, du 27 mai 1638, il s'est trompé aussi bien que Legrand, lorsque celui-ci en a fait une lettre isolée. Les derniers mots, au bas de la dernière page : « Aussy bien ay-ie encore icy beaucoup d'autres choses a vous écrire », mots qui terminent également la lettre III, 62 de Clerselier, marquent suffisamment qu'il y avait une longue suite.

Il y est, d'autre part, indiqué que l'envoi comprenait la réponse de Gillot au théorème proposé par Fermat, réponse publiée par Clerselier comme annexe à la lettre II, 88. Cousin a donc, à bon droit, rattaché ladite réponse au n° 13 de Lahire; mais il aurait dû y rattacher également la lettre II, 88 tout entière, car elle constitue précisément la suite immédiate du n° 13, quoique Legrand lui ait assigné une date différente (22 juin 1638). Les premiers mots de II, 88 : « J'ay mis dans les deux feuillets precedens ce que i'ay crû que vous pourriez faire voir a d'autres, et ay reservé le reste pour cetuy-cy... », comme tout le contexte qui suit, justifient suffisamment le rapprochement que je propose; ils font en même temps connaître comment l'original de II, 88, séparé par Mersenne du début de la lettre, s'est perdu de bonne heure et n'est jamais venu entre les mains de Roberval. Cette seconde partie n'est, en effet, connue que par la publication de Clerselier, faite sur la minute de Descartes.

Quant au n° 18 de Lahire, la perte de la fin de la lettre originale, déjà constatée par Legrand, s'explique d'une façon analogue. Le début conservé traite un objet spécial et important : c'est là, en effet, que Descartes critique le volume de Galilée (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica ed i movimenti locali*) qui venait d'être imprimé à Leyde chez les Elzevirs.

Mersenne aura communiqué à part les feuillets contenant cette critique; mais, cette fois, la minute de Descartes était restée en ordre et Clerselier a publié la lettre tout entière, sans la scinder, comme il a fait pour la précédente.

Enfin le n° 6, auquel Legrand assigne la date du 13 janvier 1631, était écrit, comme les plus anciennes lettres de Descartes, sur un double feuillet in-folio. La lettre finissait au haut de la troisième page; le feuillet resté presque complètement blanc a été déchiré pour servir autrement et les dernières lignes de la lettre ont été enlevées en même temps, ainsi que Legrand l'a déjà noté. Clerselier a d'ailleurs publié ces dernières lignes d'après la minute.

Après les explications qui précèdent, on comprendra aisément qu'il est possible d'affirmer que le quatrième autographe inédit, qui n'a pas été classé par Arbogast, figurait dans la collection de Lahire, sous le n° 2, c'est-à-dire sous celui qui est inscrit au bas de la pièce. Il suffira de remarquer que cette lettre était écrite, comme la précédente, sur du papier in-folio, mais que, cette fois, le second feuillet a totalement été enlevé et que la partie perdue de la lettre était probablement assez considérable. D'autre part, la lettre est évidemment, d'après son contexte, antérieure à celle du 18 décembre 1629, qui la rappelle (Clerselier, II, 105; Cousin, VI, 71). Or, cette lettre portait le n° 3 de Lahire, tandis qu'elle était la première du classement d'Arbogast.

En dehors des quatre pièces dont nous venons de parler, on peut établir que la collection de Lahire en comprenait encore au moins *deux* autres qui ne figurent pas dans les soixante-dix-sept numéros du relevé de dom Poirier.

Tout d'abord le n° 78 de Lahire, que Legrand indique comme une pièce détachée, envoyée en même temps que le n° 31 (Clerselier, II, 40; Cousin, VII, p. 298) le 30 juillet 1640, et contenant une réponse à des questions par des Médecins sur les opinions de Descartes relativement aux mouvements du chyle.

En second lieu, le n° 1 de Lahire, sur lequel Legrand ne nous donne aucune indication, et qui ne peut être identifié avec aucun numéro d'Arbogast. Ce n° 1, qui reste à retrouver, doit donc être une pièce incomplète et inédite, comme l'est le n° 2, auquel on peut assigner la date du 5 novembre 1629; celle du n° 1 doit être

antérieure même au 8 octobre 1629 (date de la lettre Clerselier, II, 112; Cousin, VI, 51), dont le début suppose d'ailleurs une lettre précédente.

Il est à remarquer que, comme antérieures au n° 1 d'Arbogast, nous trouvons dans Clerselier deux lettres que Legrand a fixement datées, celle que je viens de citer et celle du 20 novembre 1629 (I, 111; Cousin, VI, 61). D'après les Notes de Legrand, il paraît avoir personnellement possédé les deux originaux et le second lui aurait été volé ou il l'aurait perdu.

VI. Nous arrivons en somme à la conclusion que la collection de Lahire comprenait au moins $77 + 6 = 83$ numéros. Il me semble possible d'établir que le nombre des pièces n'était pas plus considérable.

Sur le relevé que j'ai donné des pièces du MS. fr. n. a. 5160, on peut constater que les numéros inscrits au bas des premières pages ne concordent avec ceux de Lahire que pour une série dont le nombre le plus élevé (1) ne dépasse pas 18. Les autres numéros, non concordants, appartiennent d'ailleurs évidemment au moins à deux séries distinctes; dans l'une (pour deux pièces qui sont des copies), le numéro est suivi de l'indication « 2de »; dans l'autre série, la plus importante (onze pièces), les numéros vont évidemment en décroissant tandis que ceux d'Arbogast augmentent; or le classement d'Arbogast, comme celui de Lahire, était établi suivant l'ordre chronologique; il semble dès lors que l'on se trouve en présence d'une série dans laquelle le numérotage était fait à rebours.

Pour quatre pièces de cette série de onze, nous connaissons, par Legrand, le numéro de Lahire et il se trouve que la somme de ce numéro et de celui de la série fait constamment 84.

Ainsi la lettre du 4 mars 1641 (réponse à Hobbes; Cousin, VIII, 481, avec une partie inédite) cotée 46 C, est la 38e de Lahire.

---

(1) Il existe à la Bibliothèque Victor Cousin, à la Sorbonne, quinze autographes de Descartes à Mersenne provenant de la collection volée par Libri; leur examen permet de reconnaître que la série des numéros concordant avec ceux indiqués par Legrand s'arrêtait en réalité à 35. Quant aux numéros non concordants, ils appartiennent à la série décroissante dont je vais parler.

La lettre à Cavendish du 30 mars 1643 (Cousin, IX, p. 512) cotée 27C, était la 57e de Lahire.

La copie d'une réponse de Descartes à trois questions de Mécanique, cotée 30C, est imprimée sans les questions, à la suite de la lettre du 23 mars 1643 (Cousin, IX, p. 104) et correspond à la pièce n° 54 de Lahire.

Enfin la copie par Mersenne de la lettre du 20 avril 1646 (Cousin, IX, p. 555), cotée 25C, devait être la 59e de Lahire. Si, à la vérité, la Note de Legrand indique le n° 60 comme étant celui de l'original, il faut remarquer que la collection comprenait à la fois l'original (n° 52 d'Arbogast) et la copie (n° 51 d'Arbogast), comme nous l'apprenons par le relevé de dom Poirier. Les numéros de Lahire correspondants devaient être dès lors 60 et 59; et il ne peut y avoir aucun doute à cet égard, les numéros de Lahire immédiatement voisins de ceux-là étant identifiés avec certitude.

Ces rapprochements paraissent suffisants pour conclure que la même relation subsiste pour les sept autres numéros de la série de onze pièces; or cette relation suppose évidemment que le n° 83 de Lahire correspondait au n° 1 de la suite décroissante, par conséquent à la dernière pièce de la collection, ainsi que nous l'avons annoncé.

En présence de cette conclusion, nous avons évidemment à nous demander si les pièces du MS. fr. n. a. 5160, qui ne portent aucun numéro ou qui n'offrent que celui d'Arbogast, ou bien encore celles qui portent le numéro suivi de l'indication 2de, ont pu faire partie de la collection de Lahire.

En ce qui concerne les deux autographes classés par Arbogast sous les nos 47 et 69, l'absence de tout autre numéro ne doit pas faire de difficultés. Dans l'état actuel, le numéro qui fait défaut peut d'ailleurs être masqué par la reliure; il a pu tout aussi bien disparaître par quelque autre circonstance facile à imaginer.

Je pense, au contraire, que la réponse à l'écrit des amis de M. de Fermat, copie qui ne porte aucun numéro, qu'Arbogast n'a pas classée, et que Legrand n'a pas eue entre les mains, ne provient pas de la collection des lettres de Descartes, telle qu'elle a été formée à l'origine; Libri a dû la prendre dans d'autres liasses de papiers de Roberval; c'est bien pour ce dernier qu'elle a

dû être faite, car elle est écrite de la main d'un copiste qu'il a employé assez fréquemment.

Reste à considérer les deux pièces portant l'indication « 2de » à la suite du numéro inférieur.

J'estime que ces pièces n'ont pas en réalité appartenu à une série spéciale, mais qu'elles avaient été annexées dans le classement de Lahire aux lettres portant les mêmes numéros.

Pour la copie cotée 10 *seconde,* il ne peut, semble-t-il, y avoir de doute; c'est un extrait de la lettre du 31 mars 1638 (Clerselier, III, 69; Cousin, VII, 157) dont l'original portait précisément le n° 10 dans la collection de Lahire. Clerselier a eu d'ailleurs communication d'une copie de cette pièce (démonstration de théorèmes sur la décomposition des nombres en somme de carrés; règle pour trouver les nombres amiables) et il l'a publiée à la suite de sa lettre III, 66, sans reconnaître qu'il y avait double emploi avec la reproduction de la partie correspondante dans la minute de III, 69.

On s'explique d'ailleurs aisément que ce fragment n'ait pas été compris dans le classement d'Arbogast, tandis que, dans ce classement, figure sous le n° 13 la pièce cotée 9 *seconde*, qui est complète et renferme la copie de la première critique dirigée par Descartes contre la méthode *de maximis et minimis* de Fermat (Clerselier, III, 56).

On comprend moins que cette pièce ait été rattachée à la neuvième lettre de la collection de Lahire, qui est celle du 14 août 1634 (Clerselier, II, 77), antérieure de beaucoup. Cependant il n'y a point là une preuve décisive contre l'hypothèse que j'ai émise; car, si l'on ne connaît point la date précise de la pièce cotée 9 *seconde,* elle précède en tout cas celle de la Lettre 10e de Lahire, et il n'y avait point dans la collection de pièce intermédiaire [1].

Mais si Arbogast a donné un numéro spécial à une pièce de la collection Lahire cotée seulement comme doublet, il suit de là que, pour retrouver les quatre-vingt-trois pièces de cette collection, il faut admettre qu'Arbogast a exclu, comme incomplète, une

---

[1] Legrand a eu, au reste, entre les mains, notre pièce cotée 9 *seconde;* il marque qu'elle appartient à la collection communiquée par La Hire, et qu'elle n'est pas autographe. Quant au numéro, il ne donne aucune indication.

pièce perdue et inédite en sus de celles que nous avons signalées.

Or, pour chacun des trente-neuf premiers numéros de la collection Lahire (c'est-à-dire jusqu'en 1641), nous pouvons, grâce aux indications de Legrand et au relevé de dom Poirier, assigner le numéro d'Arbogast ou affirmer qu'ils étaient exclus du second classement.

Il n'y a d'ambiguïté ([1]) que pour les n°s 4 et 11, pour lesquels on ne peut d'ailleurs disposer que d'un seul numéro d'Arbogast, le 14e, qui correspond, comme je l'ai dit, aux lettres Clerselier, III, 74, et III, 59. Legrand a, en effet, exceptionnellement omis, pour l'original qu'il avait entre les mains, de noter le numéro de Lahire.

Mais, si ce dernier ne s'est pas trompé, par suite du défaut de date de cet original, il a dû le classer entre le n° 10, du 31 mars 1638, et 12, du 3 mai 1638.

La pièce perdue inédite devait donc probablement porter le n° 4 et tomber comme date entre le 18 décembre 1629 et le 15 avril 1630.

En résumé, le nombre des inédits retrouvés de la collection des lettres de Descartes à l'Académie des Sciences s'élèverait à *douze*, celui des inédits encore perdus à *onze*.

Puissent les indications que j'ai données sur leurs dates et leur numérotage contribuer à leur découverte et en amener au moins la publication, sinon la réintégration des précieux originaux dans les Archives d'où elles ont été soustraites! (*A suivre.*)

([1]) Dans l'édition de Cousin, le n° 4 de Lahire est assigné à la lettre du 9 janvier 1639 (Clerselier, II, 96; Cousin, VIII, 70). Mais, au lieu de 4, il faut lire 21; l'autographe se trouve actuellement à la Bibliothèque Victor Cousin.

SUR LE CALCUL DES POLYNOMES $X_n(\cos\theta)$ DE LEGENDRE POUR LES GRANDES VALEURS DE n;

PAR M. O. CALLANDREAU.

M. Darboux a donné une formule qui généralise celle de Laplace et permet d'obtenir une expression approchée de X_n, l'erreur commise étant de l'ordre d'une puissance aussi grande qu'on le voudra de $\frac{1}{n}$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 39, 1878). Depuis, M. Stieltjes est parvenu à un beau résultat, qui consiste en ce qu'en prenant les k premiers termes d'une certaine série, analogue à celle de M. Darboux, l'erreur commise est inférieure en valeur absolue au *double* du $(k+1)^{\text{ième}}$ terme, dans lequel on aurait remplacé par l'unité le cosinus qui figure au numérateur (*Comptes rendus*, 19 mai 1890). L'objet de la présente Note est d'établir qu'on peut considérer le reste de la série de M. Darboux, comme la partie réelle d'une expression imaginaire $\mathfrak{R}e^{i\Phi}$, et que l'affixe de

$$\mathfrak{R}e^{i\left[\Phi+\frac{2k+1}{4}\pi-\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}$$

tombe à *l'intérieur* du cercle décrit avec le module du $(k+1)^{\text{ième}}$ terme comme rayon, et dans le quatrième quadrant en supposant $\cos\theta$ positif. On pourra ainsi avoir, dans certains cas, un renseignement sur le *signe* du reste.

1. Le point de départ est l'égalité suivante : soit

$$J(x) = J(-x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-ix\cos\varphi}\,d\varphi,$$

on a

$$(p > 0),$$

$$\int_0^\infty e^{-px}J(bx)x^n\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\int_0^\infty e^{-px}e^{-ibx\cos\varphi}x^n\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi\,\frac{\Gamma(n+1)}{(p+ib\cos\varphi)^{n+1}}$$

ou, en faisant

$$p = \cos\theta, \qquad b = \sin\theta \qquad (b > 0)$$

et ayant égard à la formule connue

$$X_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^{n+1}},$$

$$(1) \qquad \Gamma(n+1)X_n = \int_0^\infty e^{-px} J(bx) x^n\, dx.$$

Nous allons nous servir du développement de $J(a)$ en série semi-convergente, donné par Poisson et étudié par M. Stieltjes dans sa Thèse. On peut écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} J(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Bigg\{ & \frac{\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2a}} + \frac{1^2}{4}\,\frac{\cos\left(a - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{(2a)^3}} + \ldots \\ & + \frac{1^2.3^2\ldots(2k-3)^2}{1.2\ldots(k-1)}\,\frac{1}{4^{k-1}}\,\frac{\cos\left[a - \frac{(2k-1)\pi}{4}\right]}{\sqrt{(2a)^{2k-1}}} \Bigg\} + R_k(a), \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} R_k(a) = \frac{4}{\pi^2\sqrt{(2a)^{2k+1}}} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\varphi\, d\varphi \\ & \times \int_0^\infty e^{-u} u^{k-\frac{1}{2}} \frac{\cos\left(a - \frac{2k+1}{4}\pi\right) + \frac{\alpha}{2a}\sin\left(a - \frac{2k+1}{4}\pi\right)}{1 + \frac{\alpha^2}{4a^2}}\, du, \end{aligned} \right.$$

où l'on a mis, pour abréger l'écriture,

$$\alpha = u\sin^2\varphi.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que le coefficient numérique du $(k+1)^{\text{ième}}$ terme de $J(a)$ peut s'écrire

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1^2.3^2\ldots(2k-1)^2}{2.4\ldots 2k}\,\frac{1}{2^k} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\varphi\, d\varphi \int_0^\infty e^{-u} u^{k-\frac{1}{2}}\, du,$$

et que l'on obtient ce $(k+1)^{\text{ième}}$ terme, si l'on fait $\alpha = 0$ dans l'expression de R_k.

Revenons maintenant à la formule (1). Le reste $\mathcal{R}_k$, quand on prendra les k premiers termes de $X_n(\cos\theta)$, sera

$$\mathcal{R}_k = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-px} R_k(bx) x^n\, dx;$$

le $(k+1)^{\text{ième}}$ terme dans $X_n(\cos\theta)$ s'obtiendra en supposant $\alpha = 0$.

La question est donc ramenée à l'étude de $\mathfrak{R}_k$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{R}_k = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{\Gamma(n+1)}\,\frac{1}{\sqrt{(2b)^{2k+1}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}\varphi\,d\varphi\int_0^\infty e^{-u}u^{k-\frac{1}{2}}\,du \\ \times\int_0^\infty e^{-px}\frac{\cos\left(bx-\frac{2k+1}{4}\pi\right)+\frac{\alpha}{2bx}\sin\left(bx-\frac{2k+1}{4}\pi\right)}{1+\frac{\alpha^2}{4b^2x^2}}x^{n-k-\frac{1}{2}}\,dx. \end{aligned}\right.$$

2. La dernière intégrale est la partie réelle de

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-px}\frac{e^{\left(bx-\frac{2k+1}{4}\pi\right)i}}{1+i\frac{\beta}{x}}\,x^{n-k-\frac{1}{2}}\,dx \qquad \left(\beta=\frac{\alpha}{2b}\right).$$

L'égalité, due à Dirichlet,

$$\Gamma(r)\int_0^\infty\frac{e^{-fx}x^{s-1}\,dx}{(g+x)^r} = \Gamma(s)\int_0^\infty\frac{e^{-gx}x^{r-1}\,dx}{(f+x)^s},$$

valable pour les valeurs de f et de g imaginaires à partie réelle positive, donne, en y faisant

$$r=1,\qquad f=p-ib,\qquad g=i\beta,\qquad s-1=n-k+\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2k+1}{4}\pi}\mathrm{I} &= \Gamma\left(n-k+\frac{3}{2}\right)\int_0^\infty\frac{e^{-i\beta x}\,dx}{(p-ib+x)^{n-k+\frac{3}{2}}} \\ &= \Gamma\left(n-k+\frac{3}{2}\right)(p+ib)^{n-k+\frac{1}{2}}\int_0^\infty\frac{e^{-i\beta(p-ib)x}}{(1+x)^{n-k+\frac{3}{2}}}\,dx. \end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{R}_k e^{i\Phi}$ le reste, quand on remplace par I la dernière intégrale dans (4); il vient

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_k e^{i\left[\Phi+\frac{2k+1}{4}\pi-\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\theta\right]} \\ &\quad= \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\Gamma\left(n-k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{1}{\sqrt{(2b)^{2k+1}}} \\ &\qquad\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}\varphi\,d\varphi\int_0^\infty e^{-u}u^{k-\frac{1}{2}}\,du\int_0^\infty\frac{e^{-i\beta(p-ib)x}}{(1+x)^{n-k+\frac{3}{2}}}\,dx. \end{aligned}$$

Si l'on fait, dans l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-i\beta(p-ib)x}}{(1+x)^{n-k+\frac{3}{2}}}\,dx$, $\alpha = \beta = 0$, on a une limite supérieure du module du membre de droite; $\mathfrak{R}_k$ sera inférieur au module du $(k+1)^{\text{ième}}$ terme.

Il y a plus, la même intégrale est de la forme (a et $c > 0$)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}e^{-ix}}{(1+cx)^n}\,dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cos x\,dx}{(1+cx)^n} - i\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x\,dx}{(1+cx)^n}\\ &= \int_0^\infty e^{-ax}\left[\frac{a}{(1+cx)^n} + \frac{cn}{(1+cx)^{n+1}}\right]\\ &\quad \times \sin x\,dx - i\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin x\,dx}{(1+cx)^n}\\ &= \int_0^\infty \psi(x)\sin x\,dx - i\int_0^\infty \chi(x)\sin x\,dx.\end{aligned}$$

Les fonctions $\psi(x)$ et $\chi(x)$, toujours positives, diminuent constamment avec x; il en résulte

$$\int_0^\infty \psi(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi [\psi(x) - \psi(\pi+x) + \psi(2\pi+x) - \ldots]\sin x\,dx > 0,$$

$$\int_0^\infty \chi(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi [\chi(x) - \chi(\pi+x) + \psi(2\pi+x) - \ldots]\sin x\,dx > 0.$$

Cela complète la démonstration

Le développement de $X_n(\cos\theta)$ est

$$\begin{aligned}2\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\Bigg\{&\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}}\\ &+ \frac{1}{2n-1}\,\frac{1^2}{2}\,\frac{\cos\left[\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{3\pi}{4}\right]}{\sqrt{(2\sin\theta)^3}}\\ &+ \frac{1}{(2n-1)(2n-3)}\,\frac{1^2.3^2}{2.4}\,\frac{\cos\left[\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{5\pi}{4}\right]}{\sqrt{(2\sin\theta)^5}} + \ldots\Bigg\}.\end{aligned}$$

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉMONTRER LA FORMULE FONDAMENTALE DES FONCTIONS θ;

PAR M. W. KAPTEYN.

Pour démontrer la formule

$$\begin{aligned}&\theta_1(x-a)\,\theta_1(x-b)\,\theta_1(y+z-a-b)\,\theta_1(y-z)\\&+\theta_1(y-a)\,\theta_1(y-b)\,\theta_1(z+x-a-b)\,\theta_1(z-x)\\&+\theta_1(z-a)\,\theta_1(z-b)\,\theta_1(x+y-a-b)\,\theta_1(x-y)=0,\end{aligned}$$

je construis une fonction méromorphe et doublement périodique $f(t)$ aux périodes ω et ω' qui admet, dans un parallélogramme des périodes, les pôles simples x, y, z et les zéros simples a, b, c.

Soit

$$x+y+z-a-b-c=m\omega+n\omega',$$

m et n étant des nombres entiers.

Cela posé, la fonction la plus générale méromorphe et doublement périodique aux périodes ω et ω' qui admet, dans un parallélogramme des périodes, les pôles simples x, y, z et les zéros simples a, b, c, sera

$$f(t)=\mathrm{C}e^{\frac{2n\pi it}{\omega}}\frac{\theta_1(t-a)\,\theta_1(t-b)\,\theta_1(t-c)}{\theta_1(t-x)\,\theta_1(t-y)\,\theta_1(t-z)},$$

où C est une constante arbitraire.

Or, la somme des résidus de toute fonction méromorphe doublement périodique par rapport aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes étant zéro, on aura

$$\begin{aligned}&e^{\frac{2n\pi ix}{\omega}}\,\theta_1(x-a)\,\theta_1(x-b)\,\theta_1(x-c)\,\theta_1(y-z)\\&+e^{\frac{2n\pi iy}{\omega}}\,\theta_1(y-a)\,\theta_1(y-b)\,\theta_1(y-c)\,\theta_1(z-x)\\&+e^{\frac{2n\pi iz}{\omega}}\,\theta_1(z-a)\,\theta_1(z-b)\,\theta_1(z-c)\,\theta_1(x-y)=0.\end{aligned}$$

En remplaçant c par $x+y+z-a-b-m\omega-n\omega'$, et ayant égard à la formule

$$\theta_1(t+m\omega+n\omega')=(-1)^{m+n}q^{-n^2}e^{-\frac{2n\pi it}{\omega}}\,\theta_1(t).$$

on obtient

$$e^{\frac{2n\pi i x}{\omega}}\theta_1(x-c) = (-1)^{m+n} q^{-n^2} e^{\frac{2n\pi i}{\omega}(x+y+z-a-b)}\theta_1(-y-z+a+b),$$
$$e^{\frac{2n\pi i y}{\omega}}\theta_1(y-c) = (-1)^{m+n} q^{-n^2} e^{\frac{2n\pi i}{\omega}(x+y+z-a-b)}\theta_1(-x-z+a+b),$$
$$e^{\frac{2n\pi i z}{\omega}}\theta_1(z-c) = (-1)^{m+n} q^{-n^2} e^{\frac{2n\pi i}{\omega}(x+y+z-a-b)}\theta_1(-x-y+a+b).$$

En substituant ces valeurs, dans la relation précédente, la formule fondamentale sera démontrée.

Remarque. — En admettant quatre pôles simples x, y, z, u, et quatre zéros simples a, b, c, d, dans un parallélogramme des périodes, on obtient la formule

$$\begin{aligned}
&\theta_1(x-a)\theta_1(x-b)\theta_1(x-c)\theta_1(-y-z-u+a+b+c)\theta_1(y-z)\theta_1(y-u)\theta_1(z-u)\\
&+\theta_1(y-a)\theta_1(y-b)\theta_1(y-c)\theta_1(-x-z-u+a+b+c)\theta_1(z-x)\theta_1(x-u)\theta_1(z-u)\\
&+\theta_1(z-a)\theta_1(z-b)\theta_1(z-c)\theta_1(-x-y-u+a+b+c)\theta_1(x-y)\theta_1(x-u)\theta_1(y-u)\\
&+\theta_1(u-a)\theta_1(u-b)\theta_1(u-c)\theta_1(-x-y-z-a+b+c)\theta_1(y-x)\theta_1(x-z)\theta_1(y-z)=0,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Lie (S.). — *Theorie der Transformationsgruppen.* 2. Abschn. Unter Mitwirkung von F. Engel bearb. Lex.-8°, VI, 554 S. Leipzig, Teubner, 16 M.

Rosankranz (Max). — *Ueber gewisse homogene quadratische Relationen unter den Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung sechster Ordnung.* Inauguraldiss. 37 S. Halle.

Schoute (P.-H.). — *Zum Normalenproblem der Kegelschnitte.* (Sonderdr.) Lex.-8°, 8 S. Leipzig, Freytag, 6 M.

Schroeter (H.). — *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve 4. Ordnung 1. Species.* Gr. 8°, VI, 100 S. Leipzig, Teubner, 2 M. 80 Pf.

Waelsch (E.). — *Zur Invariantentheorie der Liniengeometrie.* (Sonderdr.) Lex.-8°, 13 S. Leipzig, Freytag, 30 Pf.

Cayley (A.). — *The collected mathematical Papers.* Vol. 2. 4°. half parchment. Cambridge, Univ. Press, 25 sh.

CHAPEL (A.). — *Sur quelques procédés nouveaux de calcul graphique.* In-8°, 16 p. avec figures. Nancy, Berger-Levrault et Cie.

CREMONA (L.). — *Graphical Statics : Two Treatise on the graphical Calculus and reciprocal figures in graphical Statics.* Translated by Th. A. Beare. 8°, 168 p. London, Frowde, 8 sh. 6 d.

DOEHLER (MAX). — *Beitrag zur Potentialtheorie. Die Green'sche Funcktion für das Rotationsellipsoid, den unendlichen Kreiscylinder und Schalen, die von swei confocalen Rotationsellipsoiden resp. zwei coaxialen unendlichen Kreiscylindern begrenzt werden.* Inauguraldiss. III-39 S. 48. Erlangen.

JAMET (V.). — *Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes.* In-8°, 15 p. Paris, Nony et Cie.

JOHNSON (W.-W.). — *A Treatise on ordinary and partial differential Equation.* Roy.-8°. London, Macmillan, 15 sh.

LUCAS (E.). — *Notes de Géométrie analytique à trois dimensions.* In-8°, 11 p. Paris, impr. Pichon.

TAFELMACHER (A.). — *Zu dem 3. Gauss'schen Beweise des Reciprozitäts-Satzes für die quadratischen Reste gehörende Untersuchungen.* 4°, 24 S. Göttingen, Vendenhoeck et Ruprecht, 1 M. 20 Pf.

WAELSCH (EMIL). — *Ueber das Normalen System und die Centralfläche algebraischer Flächen, insbesondere der Flächen 2. Grades.* Inauguraldiss. 28 S. Roy.-4°. Erlangen.

GAUSS (C.-F.). — *Untersuchungen über höhere Arithmetik.* Deutsch herausgeg. von H. Maser. Gr. 8°, XIII-695 S. Berlin, Springer, 14 M.

LIE (S.). — *Ein Fundamentalsatz in der Theorie der unendlichen Gruppen.* Gr. 8°, 6 S. Christiania, Dybwad, 35 Pf.

MAYER (JOS.). — *Ueber die Grösse der Periode eines unendlichen Decimalbruches oder die Congruenz* $10^x \equiv 1 \pmod{P}$. Programm der Studienanstalt zu Burghausen. 52 S. 8°.

MICHAELSEN (A.) *Der logarithmische Grenzfall der hypergeometrischen Differentialgleichung* n^{ter} *Ordnung.* Gr. 8°, 21 S. Kiel, Lipsius et Tischer, 1 M. 20 Pf.

WIRTINGER (W.). — *Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentalintegralen.* Gr. 8°, 7 S. Leipzig, Freytag, 30 Pf.

ASTOR (A.). — *Sur quelques propriétés du mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface à centre du second degré.* In-8°, 30 p. Paris, Gauthier-Villars.

Comberousse (C. de). — *Cours de Mathématiques.* T. IV. *Algèbre supérieure.* 2e Partie. In-8°, xxiv-831 p. Paris, Gauthier-Villars, 15 fr.

Marie (L.). — *Traité mathématique et pratique des opérations financières.* In-8°, viii-570 p. Paris, Gauthier-Villars, 10 fr.

Laurent (H.). — *Traité de Mécanique rationnelle.* 3e édit., 2e vol. In-8°. T. I, viii-352 p. avec figures; T. II, xiv-364 p. avec figures. Paris, Gauthier-Villars, 12 fr.

Abhandlungen *zur Geschichte der Mathematik.* 5. Heft. Gr. 8°, 168 S. m. 1 Taf. Leipzig, Teubner, 6 M.

Brockmann (F.-J.). — *Versuch einer Methodik sur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen.* Gr. 8°, vi-111 S. m. 5 Holzschn. Ebendas, 1 M. 50 Pf.

Bbunn (H.). — *Ueber Curven ohne Wendepunkte.* Gr. 8°, III, 74 S. u. 6 Taf. München, Theod. Ackermann, 2 M. 80 Pf.

Haub (Ed.). — *Ueber die Auflösung von Differentialgleichungen, welche sich durch eine bestimmte Substitution aus einer linearen Differentialgleichung mit constantem Coefficienten ergeben. Progr. d. Gymnas. in Rössel.* vii S.

Laurent (H.). — *Traité d'Analyse.* T. V : *Calcul intégral; Equations différentielles ordinaires.* In-8°, 421 p. Paris, Gauthier-Villars, 10 fr.

Lebon (E.). — *Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et du cube.* In-8°, 35 p. Paris, Delagrave.

Schlesinger (L.). — *Ein Beitrag zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit einer Relation dritten Grades zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen.* Inauguraldiss, 83 S. Kiel.

Tropfke (Jos.). — *Zur Darstellung des elliptischen Integrales erster Gattung.* Inauguraldiss. 49 S.

Velde (Wilh.). — *Ueber einen Specialfall der Bewegung eines Punktes, welcher von festen Centren angezogen wird.* Inauguraldiss. 26 S. 4°. Kiel.

Weyher (C.-L.). — *Sur les tourbillons, trombes, tempêtes et sphères tournantes. Etudes et expériences.* 2e édit. In-8°, 135 p. avec figures et 3 planches. Paris, Gauthier-Villars, 3 fr. 50 c.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

H. POINCARÉ, Membre de l'Institut. — ÉLECTRICITÉ ET OPTIQUE. I. *Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière*. Leçons professées pendant le second semestre 1887-88, rédigées par *J. Blondin*. 1 vol. in-8°, XIX-314 p.; 1890. — II. *Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz*. Leçons professées pendant le second semestre 1889-90, rédigées par *B. Brunhes*. 1 vol. in-8°, XI-262 p.; 1891. Paris, G. Carré, 58, rue Saint-André-des-Arts.

Les leçons réunies dans ces deux Volumes ont été professées à la Faculté des Sciences de Paris pendant les mois de mars à juillet des années 1888 et 1890. Elles sont inspirées du même esprit et traitent de sujets tellement liés que j'ai cru devoir attendre la publication du second Volume, annoncée comme prochaine, pour rendre compte des deux à la fois (1).

Dans la préface du premier Volume, M. Poincaré s'attache à faire ressortir toute l'importance de l'application des équations de Lagrange aux phénomènes d'induction faite par Maxwell, d'abord dans un Mémoire des *Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres*, t. CLV, 1865, p. 459-512, ensuite dans son grand *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, 4e Partie, Ch. V, VI et VII.

Il en montre bien le caractère, dans ces lignes que lui-même a soulignées :

« Pour démontrer la possibilité d'une explication mécanique de l'électricité, nous n'avons pas à nous préoccuper de trouver cette explication elle-même, il nous suffit de connaître l'expression des deux fonctions T et U qui sont les deux parties de l'énergie, de

(1) Dans l'analyse du Livre d'*Optique* de M. Poincaré, j'ai commis deux lapsus que je comptais rectifier ici, dans l'évaluation des forces élastiques lorsque le milieu est soumis à des pressions extérieures constantes (*Bull. des Sc. math.*, 1re Partie, 1889, p. 176, note 1; p. 177, p. 189, note 1). M. Poincaré les a tout récemment relevés, et en a indiqué l'origine; il suffira donc de renvoyer à la Note qu'il a publiée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, n° 17, p. 914, ainsi qu'à un Travail de M. Boussinesq [*Théorie des ondes liquides périodiques*, note 3 (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XX, p. 584; 1872)] et aux *Exercices de Physique mathématique* de Cauchy.

former avec ces deux fonctions les équations de Lagrange et de comparer ensuite ces équations avec les lois expérimentales. »

Les quatre premiers Chapitres sont consacrés à l'Électrostatique; M. Poincaré apporte tous ses soins à l'exposé des idées de Maxwell; en essayant de mettre quelque précision là où Maxwell est systématiquement resté dans le vague, il arrive à dégager deux comparaisons différentes qui, tour à tour, ou même simultanément, ont guidé Maxwell dans le choix des ses hypothèses généralisatrices; de là vient l'obscurité de certains passages de Maxwell, ces deux comparaisons directrices n'étant pas toujours compatibles. M. Poincaré les expose dans deux Chapitres distincts, et ne craint pas de les exagérer pour en bien faire saisir, en même temps que l'utilité, la vanité profonde.

Concevons deux matières incompressibles, l'une l'électricité des conducteurs, et une autre, que M. Poincaré appelle le *fluide inducteur,* occupant tout l'espace isolant. Ce dernier est bien encore de l'électricité au point de vue des actions qu'il exerce à distance, mais dans un état qui diffère autant du premier que, par exemple, l'eau de la glace; la condition d'équilibre est toute différente. Dans les conducteurs, l'électricité obéit sans résistance élastique aux actions électromotrices et n'est en équilibre que lorsque celles-ci sont nulles. Le fluide inducteur, dans les isolants, met au contraire en jeu une résistance élastique proportionnelle à son déplacement, capable d'équilibrer une force électromotrice : c'est l'hypothèse de Maxwell. Ce point de vue est développé dans le Chapitre II.

Dans le Chapitre III, est exposée une théorie toute différente, celle des cellules. On peut améliorer notablement, et rendre rigoureuse (t. I, p. 52) la suite des raisonnements que l'on fait dans la théorie du magnétisme induit de Poisson, transportée par Mossotti aux diélectriques, et développée depuis par nombre de physiciens. M. Poincaré finit par lui donner la forme suivante : le milieu (même le vide) est regardé comme constitué par un très grand nombre de petites cellules conductrices, entassées les unes sur les autres, mais séparées par une mince couche isolante. La couche isolante est supposée de même nature dans tous les diélectriques; la matière des cellules conductrices est supposée infiniment con-

ductrice, car on admettra plus tard que le déplacement de l'électricité, dans son intérieur, s'effectue sans dégagement de chaleur de Joule. Deux parois, appliquées l'une contre l'autre, de deux cellules différentes se comportent comme un petit condensateur, et, quand celui-ci se charge, le cheminement de l'électricité, positive dans l'une des cellules, négative dans l'autre, équivaut à un transport direct d'électricité d'une cellule dans l'autre, et définit très simplement le déplacement électrique. Sous l'influence de forces électromotrices, chaque cellule se charge et atteint un état d'équilibre pour lequel la force électrique est nulle dans chaque cellule, mais très grande dans l'intervalle qui les sépare, et nos moyens d'investigation ne nous donnent que la pente moyenne de l'espèce d'escalier qui figure l'accroissement du potentiel le long d'une file de cellules.

Au Chapitre IV, M. Poincaré montre qu'il est impossible d'imaginer un milieu servant à transmettre par des actions élastiques des forces en raison inverse du carré de la distance. C'est la conclusion à laquelle j'étais arrivé un an plus tôt, dans un Mémoire, qui n'est certes pas irréprochable, mais dont un résultat pourtant me paraît mériter d'être énoncé. On sait comment Maxwell a procédé dans sa tentative; il a commencé par chercher des expressions des six forces élastiques telles que leur action sur un élément de volume ait justement la valeur que donnerait l'action à distance, et il a indiqué des valeurs qui sont devenues classiques : il y en a une infinité d'autres possibles, dit M. Poincaré; oui, en toute rigueur; non, si l'on s'impose, comme l'indique la nature même du sujet, la condition que ces forces élastiques ne dépendent directement que des trois composantes de la force électrique au même point. Ce sont ces expressions des forces élastiques, dont aucun genre de déplacements ne peut rendre compte. Les recherches limitées de M. Beltrami sur ce point conduisent au même résultat, qui n'est nullement contredit par des recherches, d'ailleurs intéressantes mais toutes différentes, de M. Cerrutti et de M. Somigliana sur les déformations produites dans un corps élastique ordinaire par des forces quelconques, et en particulier newtoniennes. Faut-il donc conclure qu'il est impossible de représenter ces actions par l'intermédiaire d'un milieu élastique? Non, mais seulement que le problème a été incomplètement posé; j'espère mon-

trer à bref délai, dès que j'aurai publié les parties principales des recherches sur la plasticité, qu'il suffit de réparer un oubli pour entrer facilement dans cette voie féconde et rencontrer naturellement tous les phénomènes de l'équilibre électrique au moins. D'ailleurs les difficultés que l'on rencontre dans la théorie de Maxwell pour l'Électrostatique et que je m'efforcerai de mettre en évidence un peu plus loin, me portent à attribuer de plus en plus d'importance aux essais même incomplets de Théorie mécanique de l'électricité.

Les Chapitres V, VI, VII, VIII sont consacrés à la loi d'Ohm, au Magnétisme, à l'Électromagnétisme, traité avec une rare élégance, et à l'Électrodynamique; ce dernier conduit à une expression générale du potentiel électrodynamique d'un système de courants fermés parcourant l'espace.

Au Chapitre IX (Induction), après une assez rapide et prudente exposition de la méthode indiquée par Helmholtz et Thomson, nous arrivons à la célèbre application des équations de Lagrange, faite par Maxwell à l'Électrodynamique. Le lecteur français ayant maintenant à sa disposition l'Ouvrage même de Maxwell, il était inutile de reproduire l'analyse générale du savant anglais et la discussion des termes de l'énergie cinétique qui contiennent des produits d'une vitesse du conducteur par une intensité de courant. M. Poincaré admet, dès le début, que l'énergie cinétique est la somme de la demi-force vive visible de la matière ordinaire et de l'énergie cinétique du fluide de Maxwell, laquelle est, par hypothèse, le potentiel électrodynamique du système par rapport à lui-même, tel qu'il nous est donné par les expériences de déplacement des conducteurs. Le courant est ici un écoulement de matière électrique le long des fils conducteurs; dans le raisonnement de Maxwell, aussi indéterminé que possible, le phénomène du courant électrique correspondait à un état de mouvement inconnu d'une matière distribuée d'ailleurs dans tout l'espace. L'exposition de M. Poincaré est incontestablement plus nette et plus précise. Reste encore un point délicat : au point de vue strictement mécanique, l'introduction de la résistance d'Ohm dans les équations du mouvement de l'électricité est-elle bien légitime?

Les Chapitres X, XI, XII, XIII sont consacrés aux équations générales du champ magnétique, à la théorie électromagnétique

de la lumière, à la polarisation rotatoire magnétique, et le livre se termine par un Chapitre dû à M. Blondin sur les vérifications expérimentales des hypothèses de Maxwell.

Cessant de suivre le livre de M. Poincaré, je vais essayer de montrer à quelle difficulté se sont heurtés tous ceux qui ont voulu tirer parti des résultats acquis dans l'étude des actions des charges électriques et des courants fermés, pour les étendre aux courants ouverts, au moins en apparence, comme ceux qui se produisent dans un fil au moment où il ramène au même potentiel deux corps inégalement électrisés.

L'intensité d'un courant, la force magnétique en un point, et la force électromotrice d'induction

$$(u, v, w), \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad \left(-\frac{\partial F}{\partial t}, -\frac{\partial G}{\partial t}, -\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

sont liées, dans le cas des courants fermés, par les deux groupes de relations, dont je n'écris que les premières :

$$(1) \qquad 4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$(2) \qquad \mu\alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z};$$

μ est un coefficient (d'aimantation) qui reste constant dans un même milieu, et varie peu d'un milieu à un autre, sauf dans le fer, le nickel et le cobalt.

Les équations (1) ont pour conséquence

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

et si, comme des expériences nombreuses l'indiquent, nous regardons u, v, w comme représentant les quantités d'électricité qui traversent pendant l'unité de temps l'unité de surface prise normalement aux axes des x, y, z, l'équation exprime que la quantité d'électricité contenue dans un élément de volume quelconque ne peut subir aucune variation, qu'aucune charge électrostatique ne peut apparaître nulle part.

Acceptons-nous les équations (1) comme *générales et rigoureuses*, nous voilà forcés d'admettre qu'il ne peut se produire,

malgré les apparences, que des courants fermés, et de faire une hypothèse pour expliquer comment. C'est ce que fait Maxwell; mais remarquons-le bien : si nous traitons les équations (1), non pas comme approchées, mais comme rigoureuses, et si nous conservons à u, v, w, sa signification de flux d'électricité statique, toutes les forces électrostatiques disparaissent du même coup, puisque aucune charge d'électricité ne peut varier nulle part; il n'y a de nouveauté qu'à le dire en français; Maxwell, et tous ceux qui ont exposé sa théorie, l'ont tous écrit en équations : le potentiel électrostatique est nécessairement une fonction linéaire du temps, constante, par conséquent, si on ne lui a pas communiqué de vitesse de variation initiale.

Comment Maxwell imagine-t-il qu'un courant puisse se fermer toujours? Il étend au vide la conception imaginée pour rendre compte du rôle des isolants dans les condensateurs : lorsqu'une force électromotrice agit sur un diélectrique, elle le modifie et rend chaque élément de volume équivalent, au point de vue du potentiel électrostatique, à l'ensemble de deux masses égales et opposées, un peu séparées l'une de l'autre : leur distance restant au-dessous d'une limite extraordinairement petite, mais la grandeur des masses séparées pouvant croître indéfiniment. C'est cette séparation des deux masses qui équivaut au transport d'une quantité d'électricité, et dont la vitesse de variation jouera le rôle d'une intensité de courant. Cette conception paraîtra sans doute bien artificielle, surtout en songeant que de tels changements d'état doivent se produire énergiquement même dans le vide : c'est celle de Maxwell. Elle a d'ailleurs directement pour conséquence que, à toute charge réelle à la surface du conducteur correspond une charge apparente de la surface du diélectrique égale et de signe contraire à la première, qui la neutralise *rigoureusement*.

Avec ces conventions, il y a des courants (de polarisation) dans tout espace isolant, et ce sont ces courants, ainsi que les forces électromotrices d'induction et les forces électromagnétiques, dont la propagation suit des lois identiques à celles de la lumière, avec des valeurs des constantes numériques, déduites uniquement de l'électricité, tellement voisines des constantes optiques, qu'il est bien difficile de n'être pas séduit par cette analogie. Mais nous avons perdu l'électrostatique en route; d'ailleurs, nous aboutis-

sons à une vitesse de propagation nulle d'un certain genre de perturbations, c'est-à-dire à un état déjà instable du milieu. Il est donc impossible d'admettre comme rigoureuses les conventions de Maxwell; il faut, ou les remplacer par d'autres, toutes différentes, mais conduisant à la même analogie avec la lumière (nous n'y saurions plus renoncer), ou tout au moins ne plus les traiter que comme approchées, correspondant à un état limite presque atteint, mais pas tout à fait. Ce dernier point de vue nous conduit tout naturellement aux recherches de Helmholtz. L'illustre savant s'est, peu à peu, avancé bien loin de son point de départ, et bien plus près de la théorie de Maxwell qu'il ne s'y attendait; les expériences y ramènent quoi qu'on fasse. Au lieu d'accepter comme exactes les équations (1), Helmholtz les regarde comme incomplètes dans le cas de circuits ouverts supposés possibles et y ajoute un terme qui devient sans influence sur un circuit fermé, en écrivant

$$\text{(III)} \qquad 4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

et conserve les équations (2). La signification physique de la quantité F, G, H reste la même; celle de la force magnétique aussi, pourvu qu'on la définisse par le couple qu'elle exerce sur un courant fermé infiniment petit (*voir* Poincaré, t. II, p. 60 et suiv.); mais l'expression des F, G, H sous forme d'intégrales a changé. Maxwell [1] avait pris

$$F = \iiint \frac{u'\,dx'\,dy'\,dz'}{r}.$$

Les hypothèses d'Helmholtz le conduisent à prendre

$$F = \iiint \frac{u'\,dx'\,dy'\,dz'}{r} + \frac{1-k}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\iiint r'\,\frac{\partial \rho'}{\partial t}\,dx'\,dy'\,dz';$$

ρ' est la densité de l'électricité au point x', y', z', situé à distance r du point x, y, z auquel se rapporte F; k est une constante arbi-

---

[1] Trad. II, p. 291. — Il rétablit d'ailleurs un terme complémentaire $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ dans la théorie de la lumière, pour dire « qu'il ne correspond à aucun phénomène physique ».

traire introduite par Helmholtz, qui n'intervient pas lorsqu'il s'agit de courants fermés, qu'il faut faire égale à 1 pour retrouver la théorie de l'Électrodynamique de Neumann. Comme nous avons fait choix du système d'unités électromagnétiques dans les expressions de F, G, H, mettons en évidence un coefficient λ à déterminer dans la loi de l'Électrostatique $f = \frac{mm'}{\lambda r^2}$; le potentiel électrostatique est

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} \iiint \frac{\rho' \, dx' \, dy' \, dz'}{r},$$

et les équations III sont alors

$$\text{(III)} \qquad 4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial t}.$$

Du choix du potentiel électrodynamique fait par Helmholtz résultaient bien des conséquences dont quelques-unes, au moins singulières, ont donné lieu à une vive controverse, que M. Poincaré rappelle brièvement, entre Helmholtz et M. J. Bertrand. Il s'agissait du rôle joué par les extrémités des courants, et en particulier par des contacts glissants même dans des courants fermés.

Quoi qu'il en soit, ces nouvelles équations II et III permettent l'accumulation de l'électricité, et nous pouvons, à chaque valeur de k, faire correspondre une valeur de λ qui nous conserve toute l'électrostatique, telle que nous la connaissons, en même temps que l'électrodynamique des courants fermés. Dans toute une série de travaux faits à son laboratoire, par lui-même ou par ses élèves, M. Helmholtz s'est efforcé de mettre en évidence les actions que des circuits ouverts donneraient, en les calculant pour la partie métallique du circuit et négligeant ce qui se passe à l'extérieur, dans le diélectrique. Malgré la difficulté des expériences, les résultats ne furent pas douteux; il fut toujours impossible d'observer la plus petite action. Il fallut bien se rendre : les courants se ferment ou en totalité ou pour la plus grande part à travers le diélectrique, même le vide, et il fallut revenir à la conception des courants de polarisation de Maxwell. Mais, cette fois, ce n'est plus comme rigoureuses, mais seulement comme approchées que nous traitons les équations I; nous les obtenons en faisant λ petit dans les équations III.

Plus λ est petit, plus l'accumulation d'électricité est petite, mais plus l'action électrostatique d'une même masse est grande; les deux changements se compensent; à la surface d'un conducteur se trouvent des charges opposées dans le conducteur et dans le diélectrique dont la différence infiniment petite est de l'ordre de λ; les courants sont presque fermés; mais cet excès infiniment petit de charge produit un potentiel électrostatique fini, à cause de la grandeur infinie de l'action de deux masses finies d'électricité. Nous retrouvons à peu près les équations de Maxwell, avec sa conception de la polarisation, comme cas limite, mais avec un changement notable; nous avons conservé l'électrostatique, et au lieu de trouver une vitesse de propagation nulle, un état instable, pour le potentiel électrostatique, c'est une vitesse extraordinairement grande par rapport à la vitesse de la lumière, une vitesse infinie, que nous trouvons en faisant tendre λ vers zéro.

Quant aux courants, qui sont transversaux, leur vitesse de propagation est égale à la vitesse de la lumière si λ est nul, supérieure si λ est différent de zéro. k disparaît sensiblement des équations, puisque les courants sont presque fermés.

C'est à l'exposition de cette théorie d'Helmholtz et du passage à la théorie de Maxwell que sont consacrés les cinq premiers Chapitres du second volume : Formule d'Ampère. Induction. Théorie de Weber. Théorie de Helmholtz. Passage à la théorie de Maxwell.

Les Chapitres qui suivent sont consacrés à l'œuvre de Hertz et à leur théorie : « Beaucoup de personnes trouveront cette tentative bien prématurée, et elles n'auront pas tort; je n'ai pu arriver à aucune conclusion définitive, les résultats expérimentaux ne le permettent pas encore. Aussi cette partie de l'Ouvrage est destinée à vieillir rapidement et il faudra la recommencer dans quelques années. Mais l'importance de la question est assez grande pour que l'on prenne la peine de recommencer cette tâche plusieurs fois. Peut-être d'ailleurs les quelques tentatives que j'ai pu faire et les doutes mêmes que j'exprime ne seront-ils pas sans utilité pour les chercheurs qui construiront l'édifice définitif. »

Ainsi parle M. Poincaré dans sa préface; aussi ai-je lu avec une attention particulière cette partie de son œuvre, et me permettrai-je d'en parler en toute sincérité, sans aucune prétention à l'infaillibilité sur de pareilles questions.

L'un des résultats les plus importants de la théorie est le suivant : Dans la théorie de Maxwell, les courants périodiques de très courte période se localisent à la surface des conducteurs, et sont tout à fait négligeables à quelque profondeur, à moins qu'ils ne soient engendrés dans cette profondeur même par quelque force électromotrice périodique (thermo-électrique ou chimique), ce qui n'arrive évidemment pas pour des périodes aussi courtes que celles que nous aurons à considérer. Les équations du courant électrique dans le conducteur sont alors les mêmes que celle du mouvement de chaleur par conductibilité, ou celles des mouvements lents d'un liquide très visqueux et se réduisent à

$$4\pi C \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_2 u,$$

quand on n'essaye pas de tenir compte des propriétés diélectriques du conducteur, abstention justifiée par notre ignorance. Pour des courants excités dans le conducteur par des forces électromotrices d'induction périodiques, une intégrale bien connue de Fourier est avec les notations actuelles

$$u = A\varepsilon^{-z2\pi\sqrt{\frac{C}{T}}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - 2\pi\sqrt{\frac{C}{T}}\, z\right).$$

L'amplitude des variations du courant de période T décroît à partir de la surface supposée plane comme l'exponentielle

$$\varepsilon^{-z2\pi\sqrt{\frac{C}{T}}};$$

elle est réduite à une fraction déterminée, au millième par exemple, à une profondeur z qui varie proportionnellement à la racine carrée de la période T. En C. G. S. électromagnétique, la conductibilité spécifique C est pour le cuivre environ 6.10^{-4}, et l'exposant devient à peu près $0,15\frac{z}{\sqrt{T}}$. La profondeur à laquelle l'amplitude du courant est réduite au millième est en centimètres $7\sqrt{T} \times 7$ environ, soit pour des périodes de 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8} seconde, respectivement 5^{cm}, $0^{cm},5$, $0^{cm},05$ et $0^{cm},005$. A un même instant la phase du courant périodique varie avec la profondeur proportionnellement à la même quantité $0,15\frac{z}{\sqrt{T}}$, en sorte que c'est un peu

avant cette profondeur où l'amplitude est réduite à 0,001 que la phase redevient la même qu'à la surface, augmentée de 2π ou 6,3.

Pour une même force électromotrice à la surface même, la quantité totale d'électricité qui, à chaque instant, traverse une aire normale à la surface et suffisamment prolongée à l'intérieur du conducteur varie comme l'exposant, et se réduit de plus en plus à mesure que la période devient plus courte. Ces caractères généraux se conservent naturellement quelle que soit la forme du conducteur, et l'on peut dire que, dans un bon conducteur, comme le cuivre, un courant qui s'intervertit 10^8 fois par seconde est tout entier (à moins d'un millième près) localisé dans une profondeur de moins d'un dixième de millimètre à partir de la surface. Tout cela est bien connu depuis Maxwell. C'est au fond la seule chose que l'on puisse déduire du raisonnement très rapide que fait M. Poincaré à la page 167, et qui le conduit à la conséquence suivante : *La force électrique totale dans le diélectrique aboutit normalement à la surface du conducteur.*

La densité du courant à un instant donné t, à la profondeur z, est

$$u = A\varepsilon^{-z2\pi\sqrt{\frac{C}{T}}}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - z\sqrt{\frac{C}{T}}\right).$$

L'intensité totale dans la couche superficielle est donc

$$U = \int_0^\infty u\,dz = \frac{A}{2\pi}\sqrt{\frac{T}{C}}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ainsi la densité du courant u_0 à la surface ($z = 0$) a une amplitude $2\pi\sqrt{\frac{C}{T}}$ fois plus grande que l'intensité totale; en outre, la phase est différente. C'est le premier caractère qu'il importe de retenir, et que je supposerai encore exact comme ordre de grandeur lorsque le courant, au lieu d'être uniforme dans toute la surface, est variable, d'un point à l'autre.

Pour le cuivre, la densité du courant à la surface même est de l'ordre du produit de l'intensité totale du courant qui circule dans la couche superficielle par $0,15\,T^{-\frac{1}{2}}$, soit mille cinq cents, pour 10^8 oscillations par seconde.

La force électromotrice tangentielle $\frac{u}{C}$, nulle là où le courant est nul, c'est-à-dire au delà d'un dixième de millimètre, croît avec une très grande rapidité à mesure qu'on se rapproche de la surface, et dans la surface même est de l'ordre de $2\pi\sqrt{\frac{C}{T}} \times \frac{U}{C}$, soit $0,25\,U\,10^7$, pour le cuivre avec une période $T = 10^{-8}$. Elle conserve d'ailleurs la même valeur en passant dans le diélectrique.

Pour trouver la composante normale de la force électromotrice, écrivons, dans les idées de Maxwell, l'équation de conservation de l'électricité à travers la surface du conducteur; désignons par x, y, z trois coordonnées rectangulaires dont une z normale à la surface; U, V les intensités totales des courants de la couche superficielle à travers l'unité de longueur prise suivant Ox, ou suivant Oy; h le déplacement dans le milieu diélectrique de pouvoir inducteur K; on trouve facilement

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t};$$

les deux membres expriment de manières différentes la variation de la densité de l'électricité à la surface; si, en particulier, le courant est dirigé suivant la coordonnée x, V est nul, et la composante normale dans le diélectrique est

$$\frac{4\pi h}{K} = \frac{4\pi}{K}\int_0^t \frac{\partial U}{\partial x}\,dt.$$

U dans le conducteur est une fonction périodique de la coordonnée x, qui change de signe à chaque demi-longueur d'onde, ainsi que $\frac{\partial U}{\partial x}$; quand les oscillations sont stationnaires, il y a donc des lignes où h est nul; je désignerai la période par L, valeur difficile à préciser, et dont il faudra se faire une idée dans chaque cas particulier, mais qui sera de l'ordre de la longueur d'onde de l'oscillation dans le diélectrique, soit $3.10^{10}T$ dans l'air. Donc $\frac{\partial U}{\partial x}$ est de l'ordre de $\frac{2\pi}{L}U$, et h de l'ordre de $\frac{T}{L}U$. La composante normale est donc de l'ordre de $\frac{4\pi T}{KL}U$, et le rapport de la com-

posante tangentielle à la composante normale est de l'ordre de

$$\frac{\frac{2\pi}{C}\sqrt{\frac{C}{T}}}{\frac{4\pi}{K}\,\frac{T}{L}}\;\frac{\cos\frac{2\pi t}{T}}{\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Mettons les nombres relatifs au cuivre et à l'air, le coefficient des cosinus devient $2{,}5\,LT^{-\frac{3}{2}}10^{-20}$, ou, $7{,}5\,10^{-10}T^{-\frac{1}{2}}$ en admettant comme valeur approchée $L = 3.10^{10}T$. Ce rapport restera presque toujours extraordinairement petit; il faudrait atteindre des périodes de l'ordre de 10^{-18}, dix mille fois plus courtes que celles de la lumière violette, pour que la composante tangentielle soit de même ordre que la composante normale. Pour une période de $T = 10^{-8}$, comme celles des expériences de Hertz, la composante tangentielle n'est que le cent-millième de la composante normale. On peut donc énoncer en toute confiance la propriété suivante des systèmes en vibration à courtes périodes.

La force électromotrice totale dans le diélectrique aboutit normalement à la surface du conducteur (Théorie de Maxwell).

C'est le résultat que M. Poincaré énonce, et dont il donne en quelques pages deux démonstrations très différentes, l'une dans le Chapitre sur l'excitateur de Hertz, p. 169, l'autre dans une Note à la fin du volume, p. 228. La rapidité de l'une des démonstrations, le principe même de la seconde, des phrases de doute en divers endroits (p. 203, p. 218), m'avaient laissé dans une certaine perplexité, qui ne s'est dissipée que peu à peu [1], en traitant quelques problèmes particuliers d'abord, et en me faisant, par les considérations que je viens d'exposer, une idée assez précise de l'approximation du résultat.

Bien entendu, pour les périodes longues de quelques millièmes de seconde, le courant pénètre à une profondeur telle que les considérations générales qui précèdent n'ont plus aucune force.

Ce résultat est particulier à la théorie de Maxwell. M. Poincaré

---

[1] Cette évolution n'était pas encore achevée lorsque j'ai annoncé le tome II de l'Ouvrage de M. Poincaré dans la *Revue générale des Sciences pures et appliquées* du 30 avril dernier.

montre, en effet, que, dans la théorie plus générale d'Helmholtz, la force magnétique α, β, γ est négligeable à l'intérieur des conducteurs, dès que la période est assez courte; il en résulte que le courant est nul à l'intérieur dans la théorie de Maxwell (éq. I) mais non dans la théorie d'Helmholtz (éq. III); par suite, la force électromotrice totale dans l'intérieur du conducteur est nulle pour Maxwell, mais non pour Helmholtz. De là la différence des résultats quand on passe du conducteur au diélectrique en tenant compte des conditions à la surface. Resterait à discuter quelles grandeurs il faudrait attribuer aux coefficients λ, k, pour que leur influence soit appréciable.

En résumé, dans la théorie de Maxwell, *on peut presque toujours, dès que la période tombe au-dessous de millionième de seconde, traiter tout le problème relatif au diélectrique, en s'imposant comme condition à la surface des conducteurs que la force électromotrice totale soit toujours normale à la surface et cela quelles que soient la forme et la nature des conducteurs.*

On voit toute l'importance de cette proposition et la simplification qu'elle apporte dans les intégrations. On en trouvera des exemples dans la théorie de l'excitateur de Lodge, de la propagation le long d'un fil conducteur, du résonateur, etc.

Il peut arriver, dans le cas de la réflexion des ondes électromagnétiques dont la force électromotrice est perpendiculaire au plan d'incidence, que la composante normale de la force électromotrice soit rigoureusement nulle, et qu'en traitant rigoureusement le problème on trouve une force électromotrice tangentielle différente de zéro; la quantité que j'ai appelée L est ici infiniment grande par rapport à la longueur d'onde dans l'air, si le miroir métallique est indéfini. C'est ce qui arrive dans la réflexion de la lumière. Mais, pour les longueurs d'onde de Hertz, la valeur de la force électromotrice le long de la surface est tellement petite par rapport à sa valeur maximum dans le champ, qu'on peut la négliger entièrement; on a encore toute l'approximation nécessaire en appliquant la règle générale [1].

---

[1] Cela n'est plus permis dans la réflexion de la lumière, parce que le rapport de la longueur d'onde dans l'air $3.10^{8}\sqrt{T}$, à la profondeur de pénétration du courant dans le cuivre $50\sqrt{T}$ environ (si l'on prend la profondeur à laquelle le

Dans la réflexion du son sur un mur, on n'hésite pas à négliger les vibrations du mur et à le regarder comme immobile, et cela à bien moins juste titre que dans les problèmes électriques. Si l'on veut savoir ensuite ce qui se passe dans le mur, on cherche quels mouvements peuvent y faire naître les pressions périodiques exercées par l'air, auxquelles conduit la condition d'immobilité de l'air au contact du mur. De même, si l'on veut savoir quel est le mouvement de l'électricité dans la couche superficielle du conducteur, on cherchera celui qu'exige la valeur variable de force électromotrice normale et de la charge à laquelle elle correspond, au moyen de l'équation que j'ai employée plus haut.

Tous les problèmes auxquels donnent lieu les expériences de Hertz sont traités par M. Poincaré dans l'hypothèse de Maxwell. On ne peut songer à résumer tous ces Chapitres. Je me contenterai de présenter une remarque sur une locution employée par Hertz et par tout le monde à propos de la propagation dans les fils conducteurs : on parle de la *vitesse* de propagation des perturbations dans les fils, et on dit qu'elle est la même que dans l'air. Or, dans la théorie de Maxwell, on n'a pas le droit de parler de vitesse de propagation *fixe* dans les fils, pas plus que pour la chaleur qui se propage par conductibilité. Que mesurent donc les expériences? Uniquement la vitesse de propagation dans le vide, de deux manières différentes. Qu'on imagine un corps solide, élastique comme

---

courant est réduit au millième de sa valeur à la surface) est $6.10^8 T^{\frac{1}{2}}$; ce rapport diminue en même temps que T, et devient égal à 20 environ pour le violet extrême ($T = 10^{15}$); la longueur d'onde est encore grande par rapport à la profondeur de pénétration, mais elle ne l'est plus démesurément, les expériences étant précises. En outre et surtout, cette profondeur de pénétration théorique devient tellement petite, que la théorie qui suppose une surface de séparation brusque n'a plus aucun sens; il y a nécessairement une couche de passage, ou son équivalent physique : je veux dire que, quand on arrive au millionième de millimètre, il n'y a plus de surface plane physique, il n'y a plus que monts et vallées, et quand même le changement de propriétés serait absolument brusque à travers la surface effective rugueuse, il faut, pour tenir compte des rugosités, imaginer une couche de passage en même temps qu'on substitue une surface plane idéale à la surface véritable. Ce point de vue rend compte, en outre, de la rapide altération des propriétés réfléchissantes de certaines surfaces polies exposées à l'air; les creux se comblent de fines poussières d'indice intermédiaire, la discontinuité s'atténue avec le temps.

serait l'acier très fortement trempé, percé de trous de différentes formes : c'est le diélectrique. On le met en vibration par des frottements ou des pressions exercées à la surface de ces trous. Puis on perce un autre trou, rectiligne par exemple, et on le remplit d'un liquide très visqueux, comme de la vaseline : c'est le fil conducteur introduit dans le champ électrique. Les mêmes actions mécaniques mises en jeu avant et après la percée du trou rectiligne produiront des états vibratoires différents dans les deux cas, et la différence doit être attribuée à la cavité, non à ce qui la remplit; c'est un simple phénomène de réflexion, qui ne permet de mesurer que les propriétés du milieu dans lequel se fait la propagation, et non celles des cavités qu'on y peut produire. C'est un abus de parler de vitesse de propagation dans la vaseline. Si la période de vibration est rapide, elle n'a pas le temps de vibrer et réagit normalement, comme elle fait aussi au repos. Ce n'est que pour des périodes d'une lenteur suffisante que la réaction tangentielle prend de l'importance. N'en concluons pas que cette vaseline ne joue aucun rôle; elle réagit normalement, et si, en certains points, cette pression devient trop grande, il en peut résulter une fêlure dans l'acier qui l'entoure; c'est, dans l'expérience d'électricité, l'étincelle qu'on peut tirer du fil conducteur, étincelle qui nous révèle à la fois la fragilité et la plasticité du milieu diélectrique dans lequel se fait la propagation, de l'éther en un mot, malgré son extrême rigidité.

C'est ainsi que la théorie élastique de la lumière dans laquelle on suppose la vitesse de propagation des condensations extrêmement petite, mais pas tout à fait nulle, pour la stabilité de l'équilibre, présente des avantages généraux qu'on n'a pas encore assez fait ressortir. Il suffit que la loi de compressibilité cubique de l'éther ne soit pas rigoureusement linéaire pour que l'on puisse regarder un faible excès de pression comme ramenant à zéro la vitesse de propagation des condensations; cela rend possible une rupture, suivie d'une soudure aussitôt l'excès de pression disparu; le mouvement uniforme des planètes, entraînant avec elles l'éther qui les avoisine, mais déchirant constamment devant elles et laissant se refermer par derrière l'éther des espaces célestes, pourrait ainsi se produire avec une dépense de travail extraordinairement faible, peut-être rigoureusement nulle, et n'entraver en rien le

jeu de la gravitation universelle, au moins pour les planètes dont le mouvement est lent, sinon pour les comètes dont la vitesse peut devenir comparable en certains points de leur parcours à celle de la lumière; sans insister davantage, on voit tout l'intérêt qui s'attache à l'étude de cette propriété des vibrations de condensation dans l'éther, milieu qui propage les actions électromagnétiques, et par suite à l'étude des étincelles électriques, des aigrettes, et en général des limites d'équilibre des charges sur les conducteurs, considérées comme phénomènes de rupture de l'éther.

Voilà des considérations, certainement vagues encore, mais que j'espère préciser bientôt, et qui me font regarder la théorie de Maxwell, malgré ses défauts, comme plus près de la vérité que la théorie limite d'Helmholtz. On se rappelle que celle-ci conduit à une vitesse de propagation infinie des ondes de condensation. Mais a-t-on épuisé les hypothèses compatibles avec les propriétés des courants fermés; n'est-il pas possible d'en trouver une qui conduise comme limite à la théorie même de Maxwell, tout en conservant l'électrostatique?

Revenons au Livre de M. Poincaré : ceux qui ne verraient, dans la seconde moitié de son Livre, que des théories d'appareils particuliers, se méprendraient complètement sur leur portée. Ce ne sont pas les appareils qui présentent ici de l'intérêt, ce sont les phénomènes généraux qu'ils révèlent; et, comme ces phénomènes sont complexes, ils ne peuvent être employés que comme cribles, pour rejeter certaines hypothèses, en laisser passer d'autres; aussi les théories de ces phénomènes doivent-elles être faites dans toutes les hypothèses imaginables; c'est tout ce travail qui s'évanouira quand une des théories aura définitivement prévalu.

Tout en regrettant de ne pas trouver plus souvent les théories développées dans le cas général d'Helmholtz, félicitons-nous d'avoir, dans un Livre classique, un exposé clair des parties essentielles de cette théorie, et tous les éléments des calculs particuliers qu'exigent les expériences de Hertz et de ses imitateurs, avec de bons exemples de la manière de conduire ces calculs. Chemin faisant, M. Poincaré a rectifié une erreur grave échappée à Hertz dans le calcul de la période de son excitateur, et discuté le mieux possible les résultats encore assez discordants des divers observa-

teurs. Il a imaginé une explication séduisante des expériences sur la résonance multiple de de la Rive et Sarrasin, acceptée par M. Hertz, qui ne me paraît pourtant pas à l'abri de toute difficulté. Mais, chaque nouvelle expérience, il faut nous y attendre pendant longtemps encore, fera surgir plus de difficultés nouvelles qu'elle n'en résoudra. Pourtant l'avantage reste jusqu'ici nettement à la théorie de Maxwell, et on peut prévoir que la théorie définitive n'en différera que par bien peu de traits.

M. Brillouin.

MÉLANGES.

NOTE SUR UNE QUESTION DE MÉCANIQUE;

Par M. Ch. CELLÉRIER [1].

Cette question, qui offre une application singulière de la théorie des nombres, est celle du mouvement d'un point matériel pesant, attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré des distances. En plaçant l'origine à ce centre, et nommant μ l'intensité de l'attraction qu'il exerce sur la masse 1 à la distance 1, supposant l'axe des z dirigé dans le sens de la pesanteur, les équations du mouvement seront

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3} + g,\quad x^2+y^2+z^2 = r^2.$$

On en tire aisément les deux intégrales

$$(2)\qquad \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = k,$$

$$(3)\qquad \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} + 2gz + h,$$

k et h étant deux constantes arbitraires. Une troisième intégrale s'obtient par un moyen analogue à celui qu'a employé Euler en

[1] Voir *Bulletin*, XIV, p. 142.

cherchant le mouvement d'un point attiré par deux centres fixes. On tire des équations (1) et (3)

$$(4)\qquad \frac{d(r\,dr)}{dt^2} = \frac{d(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{dt^2} = \frac{\mu}{r} + 3gz + h.$$

Multiplions par $\frac{dz}{dt}$, et ajoutons

$$\frac{r\,dr}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z\,dr}{r^2\,dt} + g\frac{r\,dr}{dt};$$

il vient, en intégrant et nommant h' une constante arbitraire

$$(5)\qquad \frac{r\,dr\,dz}{dt^2} = \frac{\mu z}{r} + \frac{1}{2}g(r^2 + 3z^2) + hz + h'.$$

Nommant r', φ les coordonnées polaires de la projection du point mobile sur le plan des xy, on aura

$$x = r'\cos\varphi, \qquad y = r'\sin\varphi,$$

et les équations (2) et (3) deviendront

$$(6)\qquad r'^2\frac{d\varphi}{dt} = k, \qquad \frac{dr'^2}{dt^2} + \frac{k^2}{r'^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} + 2gz + h.$$

Multipliant la dernière par r'^2, ajoutant l'équation (5) multipliée par $2z$, et substituant $r'^2 = r^2 - z^2$, $r'\,dr' = r\,dr - z\,dz$, on aura

$$r^2\frac{dr^2 + dz^2}{dt^2} = 2\mu r + gz(z^2 + 3r^2) + h(r^2 + z^2) + 2h'z - k^2.$$

Ajoutant à celle-ci l'équation (5) multipliée par $2r$ et la soustrayant, posant $r - z = u$, $r + z = v$, on trouvera

$$(7)\qquad \frac{r^2\,du^2}{dt^2} = \mathrm{U}, \qquad \frac{r^2\,dv^2}{dt^2} = \mathrm{V},$$

en posant

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = -gu^3 + hu^2 + 2(\mu - h')u - k^2, \\ \mathrm{V} = gv^3 + hv^2 + 2(\mu + h')v - k^2. \end{cases}$$

Si l'on a $k = 0$, il résulte de l'équation (2) que le mouvement a lieu dans un plan; nous laisserons de côté ce cas particulier; si k est négatif on changera son signe en permutant entre eux les axes

des x et des y; en conséquence, nous admettrons que la constante k est positive et différente de 0; par suite, φ sera toujours croissante avec le temps, et, comme il résulte des équations (7) que U et V sont positives pendant tout le mouvement, ni u ni v ne pourra s'annuler et le point mobile ne pourra pas rencontrer l'axe des z; r étant toujours positive et numériquement plus grande que z, u et v resteront toujours positives.

La variable u ne peut cesser de croître ou de décroître qu'en atteignant une valeur pour laquelle $\frac{du}{dt} = 0$, c'est-à-dire une racine de $U = 0$; mais on peut se demander si elle continuera de varier ou restera constante. Dans ce dernier cas, l'équation (7) serait satisfaite, car elle a pour intégrale singulière $u = a$, a étant racine de $U = 0$. Pour lever cette difficulté, qui se présente aussi pour v, il faut recourir à des équations contenant $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$. Pour les obtenir, on tire des équations (1) et (5)

$$r\frac{d(r\,dz)}{dt^2} = \frac{3}{2}g(r^2 + z^2) + hz + h'.$$

En multipliant par r l'équation (4), et retranchant ou ajoutant cette dernière, on trouve

$$r\frac{d(r\,du)}{dt^2} = -\frac{3}{2}gu^2 + hu + \mu - h' = \frac{1}{2}\frac{dU}{du},$$

$$r\frac{d(r\,dv)}{dt^2} = \frac{3}{2}gv^2 + hv + \mu + h' = \frac{1}{2}\frac{dV}{dv}.$$

De là résulte que u ne peut rester pendant un temps limité égale à une constante a, à moins que celle-ci ne satisfasse à la fois aux deux conditions

$$U = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dU}{du} = 0,$$

ou ne soit une racine multiple de $U = 0$; si cela n'a pas lieu, u, après avoir atteint la valeur a, ne pourra ni rester constante, ni continuer à varier dans le même sens, parce que U changerait de signe; elle variera en sens contraire; et, de même, v variera toujours dans le même sens jusqu'à ce qu'elle atteigne une racine a' de $V = 0$, et, ensuite, si cette racine est simple, elle variera

en sens contraire. Quant au cas où la racine est double, il sera aisément résolu dans la discussion suivante.

L'équation $U = 0$ a nécessairement une racine négative $-c$; mais, pour que U soit positive pendant tout le mouvement, il faut qu'elle en ait en outre deux positives, a et b, entre lesquelles u reste toujours comprise, de sorte que, si elles sont égales, u reste constante. Mais, en laissant de côté ce cas particulier, nommant θ un angle toujours croissant avec le temps, et remarquant que

$$U = -g(u-a)(u-b)(u+c),$$

on pourra poser

$$u = a\sin^2\theta + b\cos^2\theta, \tag{9}$$

d'où

$$\frac{2r\,d\theta}{R} = dt, \qquad R = \sqrt{g(c+u)}.$$

Quant à l'équation $V = 0$, nous allons examiner en premier lieu le cas où elle n'a qu'une seule racine positive c'; on ne pourra avoir alors $v < c'$; il arrivera alors qu'à partir de sa valeur initiale, ou bien v croîtra à l'infini, ou elle décroîtra jusqu'à c' et croîtra ensuite à l'infini; on pourra toujours poser $v = \frac{c'}{\cos^2\theta'}$, θ' étant un angle, toujours croissant avec le temps, dont la valeur initiale est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ dans le premier cas, entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$ dans le deuxième cas, et qui augmente sans pouvoir atteindre la valeur $\frac{\pi}{2}$. En posant

$$V = (gv^2 + g'v + g'')(v - c'), \tag{10}$$

on trouvera

$$v = \frac{c'}{\cos^2\theta'}, \qquad \frac{2r\,d\theta'}{R'} = dt, \qquad R' = \sqrt{gc'^2 + g'c'\cos^2\theta' + g''\cos^4\theta'}. \tag{11}$$

Il résulte des équations (9), (11) et (6) qu'on aura

$$\frac{d\theta}{R} = \frac{d\theta'}{R'},$$

et, en remarquant que l'on a

$$2r^2 = u + v,$$
$$r'^2 = r^2 - z^2 = uv,$$

il viendra

$$dt = \frac{(u+v)\,d\theta}{R} = \frac{u\,d\theta}{R} + \frac{v\,d\theta'}{R'}, \quad d\varphi = k\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\frac{d\theta}{R} = k\frac{d\theta}{uR} + k\frac{d\theta'}{vR'}.$$

En nommant θ_0, θ'_0, φ les valeurs de θ, θ', φ qui correspondent à $t = 0$, on aura les intégrales

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{R} = \int_{\theta'_0}^{\theta'}\frac{d\theta'}{R'},\\ &t = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{u\,d\theta}{R} + \int_{\theta'_0}^{\theta'}\frac{v\,d\theta'}{R'},\\ &\varphi - \varphi_0 = k\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{uR} + k\int_{\theta'_0}^{\theta'}\frac{d\theta'}{vR'}. \end{aligned}\right.$$

Tous les termes de ces équations s'expriment au moyen des fonctions elliptiques; la première donne θ en fonction de θ', les deux autres t et φ. Les fonctions R, R', u restent toujours comprises entre des limites positives, finies et différentes de 0, d'où il résulte que, θ' croissant jusqu'à $\frac{1}{2}\pi$, $\int_{\theta'_0}^{\theta'}\frac{d\theta'}{R'}$, $\int_{\theta'_0}^{\theta'}\frac{d\theta'}{vR'}$ restent finies, mais $\int_{\theta'_0}^{\theta'}\frac{v\,d\theta'}{R'}$ ou $c'\int_{\theta'_0}^{\theta'}\frac{d\theta'}{R'\cos^2\theta'}$ croît indéfiniment; le temps t croîtra donc à l'infini, tandis que θ et φ approcheront sans cesse de valeurs limites θ_1, φ_1. On aura, par suite,

$$\int_{\theta}^{\theta_1}\frac{d\theta}{R} = \int_{\theta'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{R'}, \qquad \varphi_1 - \varphi = k\int_{\theta}^{\theta_1}\frac{d\theta}{uR} + k\int_{\theta'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta'\,d\theta'}{c'R'}.$$

En posant

$$\theta_1 - \theta = \delta\theta, \qquad \varphi_1 - \varphi = \delta\varphi, \qquad \frac{\pi}{2} - \theta' = \delta\theta', \qquad u_1 = a\sin^2\theta_1 + b\cos^2\theta_1,$$

on en conclut aisément que, θ' s'approchant de $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\lim\frac{\delta\theta}{\delta\theta'} = \lim\frac{R}{R'}, \qquad \lim\frac{\delta\varphi}{\delta\theta} = \lim\frac{k}{uR} = \frac{k}{u_1}\lim\frac{1}{R},$$

de plus

$$\lim\frac{\delta\theta'}{\cos\theta'} = \lim\frac{\delta\theta'}{\sin\delta\theta'} = 1;$$

et, $\lim R$ et $\lim R'$ étant finies, il en résulte que les rapports

$$(13) \qquad \frac{\delta\theta}{\cos\theta'}, \qquad \frac{\delta\varphi}{\cos\theta'},$$

convergent vers des limites γ, γ', finies et différentes de o.

Pour interpréter géométriquement ce qui précède, considérons une suite de paraboloïdes de révolution ayant pour foyer l'origine et pour axe commun celui des z; nous les nommerons de première ou de seconde espèce, suivant que le sommet est au-dessus ou au-dessous de l'origine. Si le paramètre de l'un d'eux est p, son équation sera $r - z = p$, c'est-à-dire $u = p$ s'il est de première espèce, $v = p$ s'il est de seconde; par suite, on peut en faire passer un seul de chaque espèce par chaque position du point mobile, qui sera ainsi déterminée par le système de coordonnées u, v, φ, ou par l'intersection de trois surfaces, savoir les deux paraboloïdes et en outre un plan mené par l'axe des z d'un seul côté de cet axe, dans la direction définie par l'angle φ.

Cela posé, la première surface oscille entre les paraboloïdes de première espèce de paramètre a et b, en s'approchant d'une position limite de paramètre u_1; le plan tourne toujours dans le même sens, s'approchant de la position limite qui correspond à l'angle φ_1; et nous nommerons *parabole limite* celle suivant laquelle il coupe le paraboloïde dans les positions limites. La seconde surface ou le paraboloïde de seconde espèce, ou s'abaisse constamment, ou va toucher celui qui a pour paramètre c' et s'abaisse ensuite.

Pour trouver la forme asymptotique de la trajectoire, quand θ' est fort près de $\frac{\pi}{2}$ ou v très grand, menons par le mobile M un plan horizontal coupant l'axe en O et la parabole limite en I, et menons les arcs IF, ME de centre O.

Soient r, r_1 les distances de M et I à l'origine; on aura

$$\mathrm{IE} = \sqrt{r^2 - z^2} - \sqrt{r_1^2 - z^2} = \frac{r^2 - r_1^2}{\sqrt{r^2 - z^2} + \sqrt{r_1^2 - z^2}} = \frac{(r + r_1)(u - u_1)}{\sqrt{uv} + \sqrt{u_1 v_1}},$$

u et v correspondant au point M et u_1, v_1 au point I. En supposant u très près de sa limite u_1, $r - r_1$ ou $u - u_1$ est très petit, et le rapport $\frac{r_1}{r}$ très voisin de l'unité; par suite, il en est de même

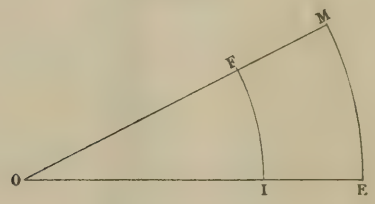
de $\frac{u_1}{u}$, $\frac{v_1}{v}$. Ainsi, en posant $\delta u = u - u_1$, on aura, avec une très petite erreur relative,

$$\mathrm{IE} = \frac{r}{\sqrt{uv}}\,\delta u = \frac{u+v}{2\sqrt{uv}}\,\delta u,$$

ou, puisque $\frac{u}{v}$ converge vers o,

$$\mathrm{EI} = \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}\,\delta u = \frac{\sqrt{c'}}{2\sqrt{u_1}}, \qquad \frac{\delta u}{\cos\theta'} = \frac{\sqrt{c'}}{2\sqrt{u_1}}\,\frac{\delta u}{\delta\theta}.$$

Fig. 1.



Comme

$$\frac{du}{d\theta} = 2(a-b)\sin\theta\cos\theta, \qquad \frac{\delta u}{\delta\theta} = -2(a-b)\sin\theta_1\cos\theta_1;$$

ainsi EI converge vers une valeur finie λ, qui sera nulle dans le seul cas où θ_1 se trouverait multiple de $\frac{\pi}{2}$.

En même temps on a, pour l'arc IF,

$$\mathrm{IF} = \mathrm{OI} \times (\varphi - \varphi_1) = -\sqrt{r_1^2 - z^2}\,\delta\varphi = -\sqrt{u_1 v_1}\,\delta\varphi,$$

et comme on a sensiblement $\frac{v_1}{v} = 1$, il en résulte, avec une très petite erreur relative,

$$\mathrm{IF} = -\sqrt{c' u_1}, \qquad \frac{\delta\varphi}{\cos\theta'} = -\gamma'\sqrt{c' u_1};$$

ainsi l'arc IF, et par suite la droite IF, converge vers une valeur fixe λ' toujours différente de o. Supposons maintenant que chaque point de la parabole limite soit déplacé dans un plan horizontal, en premier lieu de la distance λ en s'éloignant de l'axe, et ensuite de λ' dans la direction perpendiculaire à la précédente. La suite de points ainsi obtenue sera l'asymptote de la trajectoire : or elle

forme évidemment une parabole égale à la parabole limite : c'est celle de la chute finale du point mobile.

Cherchons maintenant ce que devient le mouvement quand l'équation $V = 0$ a trois racines positives; en nommant c' la plus grande, a' et b' les deux autres, il faudra ou que v soit égal ou supérieur à c' ou qu'il soit compris entre a' et b'; dans le premier cas, si c' est une racine simple, le mouvement rentre exactement dans la première forme déjà décrite et les mêmes transformations peuvent être employées; seulement l'équation (10) donnera

$$gv^2 + g'v + g'' = g(v - a')(v - b'),$$

et, par suite, dans les équations (11), on pourra prendre

$$(14) \qquad R' = \sqrt{g(c' - a'\cos^2\theta')(c' - b'\cos^2\theta')}.$$

Du reste, cette quantité sera encore toujours supérieure à la plus petite des expressions

$$\sqrt{g(c' - a')} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{g(c' - b')}$$

et, par suite, sera comprise entre des limites finies et différentes de 0.

Dans le second cas, c' étant encore supposée racine simple, v ne pourra qu'osciller entre a' et b', de façon à rester constante si ces deux racines sont égales; dans le cas ordinaire où elles sont différentes, on pourra employer la même transformation que pour u, et, en nommant θ' un angle toujours croissant avec le temps, on pourra poser

$$(15) \quad v = a'\sin^2\theta' + b'\cos^2\theta', \qquad \frac{2r\,d\theta'}{R'} = dt, \qquad R' = \sqrt{g(c' - v)}.$$

On en déduira encore les intégrales (12), mais, dans cette seconde forme de mouvement, u, v, R, R' restant comprises entre des limites finies, θ, θ', φ croîtront indéfiniment avec le temps; le mobile restera compris dans le solide de révolution, limité par les deux paraboloïdes de première espèce dont les paramètres sont a' et b'.

Il ne nous reste à examiner que le cas ou c' est une racine multiple. Supposons $b' = c'$; alors, si $v > c'$, on pourra encore em-

ployer les formules du premier mouvement; seulement la formule (14) devient

$$R' = \sqrt{gc'(c' - a'\cos^2\theta')}\sin\theta',$$

de sorte que, si θ' d'abord négatif croît vers o, il ne peut atteindre cette valeur, $\int_{\theta'_0}^{0} \frac{d\theta'}{R'}$ étant infinie, de même que $\int_{\theta'_0}^{0} \frac{v\,d\theta'}{R'}$; ainsi v converge vers la valeur c' mais emploierait un temps infini pour l'atteindre, et ce résultat subsiste lors même qu'on aurait

$$a' = b' = c';$$

mais, si v avait été d'abord croissante, elle aurait cru à l'infini comme dans le premier mouvement.

Supposons encore $b' = c'$, mais la valeur initiale de v inférieure à c'; il faut alors qu'elle soit égale ou supérieur à a', et l'on peut employer les formules du second mouvement; mais alors les équations (15) donnent

$$R' = \sqrt{g(c' - a')}\sin\theta',$$

et v ne pouvant devenir égal à c' que pour $\sin\theta' = 0$, il en résulte encore qu'il ne pourra atteindre cette valeur qu'après un temps infini.

Enfin, si l'on a $b' = c'$ et que la valeur initiale de v soit c' elle-même, v restera constante, car il résulte de l'analyse précédente qu'elle ne pourrait prendre une valeur plus grande ou plus petite qu'après un temps infini.

Parmi les divers cas que nous venons d'examiner, il en est plusieurs où u ou v conservent une valeur constante égale à une racine multiple de $U = 0$ ou de $V = 0$; si cela a lieu pour toutes les deux, le mouvement est circulaire; si c'est pour l'une seulement, le mobile reste sur un paraboloïde fixe; si on lui imprime dans une direction quelconque une petite vitesse α qui se compose avec celle qu'il avait déjà, il peut arriver, ou que celle des variables u, v qui était constante le reste sensiblement, ou qu'elle varie entre des limites qui deviennent très rapprochées quand α est très petit, ou que le mouvement change tout à fait de nature. Le mode de variation de la quantité dont il s'agit pourra être dit stable dans le premier cas, instable dans le second. Quant à u, ce mode est

toujours stable; car, si l'on a $a = b$, un petit changement dans les coefficients des équations doit laisser ces racines très peu différentes; elles ne peuvent devenir imaginaires, sans quoi, u restant le même, U serait négatif; ainsi u continuera de varier entre des limites très rapprochées. Il en sera de même pour v, si elle était égale à la racine double $a' = b'$, la troisième c' étant plus grande.

Mais, si l'on avait $v = c' = b'$, il peut arriver qu'à la suite du petit changement indiqué c' et b' deviennent imaginaires, parce que V reste positif; le mouvement prendra alors tout à coup la première forme et le mobile tombera; il en sera de même si b' et c', restant réelles et très peu différentes, sont toutes les deux inférieures à v; elles ne peuvent d'ailleurs se trouver l'une inférieure l'autre supérieure, sans quoi V serait négatif, et si toutes deux se trouvent supérieures, ce qui suppose que la racine a' ne leur est pas égale, v variera entre a' et b', et le mouvement prendra la seconde forme; il sera par suite instable dans les deux cas.

Il nous reste à résoudre une question relative au second cas du mouvement, cas dans lequel le point mobile reste circonscrit dans un espace limité; on peut se demander s'il épuise cet espace dans son mouvement, c'est-à-dire s'il finira toujours par passer aussi près qu'on voudra de tout point intérieur. Cherchons d'abord quelles conditions devraient être réalisées pour qu'il passât exactement par un point H. Posons

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{R} = p, \qquad \int_0^\pi \frac{d\theta'}{R'} = p', \qquad \int_0^\pi \frac{d\theta}{uR} = q, \qquad \int_0^\pi \frac{d\theta'}{vR'} = q',$$

et remarquons que u ou v redeviennent les mêmes, quand θ, θ' augmentent de π, ou que

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{R}, \quad \int_{\theta'_0}^{\theta'} \frac{d\theta'}{R'}$$

augmentent d'un multiple quelconque de p ou de p'; si l'on veut que θ et θ' correspondent au point H, il faudra que le rapport de chacune de ces intégrales à p ou à p' soit égal à un entier quelconque augmenté d'une fraction donnée; et, comme elles sont liées par les équations (12), il faudra qu'on ait

$$np - n'p' = p'',$$

p'' étant un nombre donné. Il faudra encore que la valeur correspondante de φ, donnée par la troisième équation (12) soit celle qui convient au point donné. Or, si θ ou θ' augmente de π, le second membre de cette équation augmente de kq ou kq', et φ d'ailleurs n'est déterminée qu'à un multiple près de 2π; il faudra donc encore que les entiers n, n' satisfassent à la condition

$$\frac{k}{2\pi}(nq + n'q') = n'' + q'',$$

q'' étant un nombre donné et n'' un entier. Éliminant n' au moyen de la première condition, posant

$$(16) \qquad \frac{p}{p'} = \rho, \qquad \frac{k}{2\pi}(q + \rho q') = \rho',$$

tout se réduit à trouver un entier n tel que

$$n\rho - f, \quad n\rho' - f'$$

aient toutes deux des valeurs entières, f et f' étant des nombres donnés. Mais, comme on ne peut point le faire rigoureusement, nous admettrons que l'erreur doive être inférieure à un petit nombre donné γ; c'est-à-dire que soit $n\rho - f$, soit $n\rho' - f'$, doivent différer d'un entier au plus de γ; c'est ce que nous nommerons, pour abréger, la condition (I) et la condition (II), et nous supposerons d'abord ρ et ρ' irrationnelles et positives.

Dans la valeur de ρ' en fraction continue, nommons $\frac{P}{Q}$ une réduite quelconque, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$, $\cdots$ les suivantes, et F l'entier le plus rapproché de $2f'$, de sorte qu'il en diffère au plus de $\frac{1}{2}$; si, dans $n\rho' - f'$, on remplace ρ' par $\frac{P}{Q}$ et f' par $\frac{F}{Q}$, cette expression est altérée au plus de

$$\frac{n}{QQ'} + \frac{1}{2Q},$$

en supposant n positive, et devient $\frac{nP - F}{Q}$; or celle-ci peut être rendue entière en donnant à n une valeur μ positive et $< Q$, et ne cessera pas de l'être en posant $n = \mu + tQ$, t étant un entier

indéterminé. L'erreur sera ainsi inférieure à

$$\frac{\mu + tQ}{QQ'} + \frac{1}{2Q}$$

ou à

$$\frac{t+1}{Q'} + \frac{1}{2Q}.$$

On voit déjà que la condition (II), si elle était la seule, pourrait être satisfaite avec une exactitude aussi grande qu'on voudrait en prenant pour $\frac{P}{Q}$ une réduite assez éloignée et supposant $t = 0$.

Pour satisfaire, en outre, la condition (I), posons $\frac{2}{\gamma} = M$, de sorte que la limite de l'erreur soit $\frac{2}{M}$, et prenons pour $\frac{P}{Q}$ la première réduite dont le dénominateur soit au moins égal à $2M^3$. Comme on aura

$$\frac{1}{Q'} + \frac{1}{2Q} < \frac{1}{M},$$

la condition (II) se réduira à

$$\frac{t}{Q'} < \frac{1}{M}.$$

En substituant $n = \mu + tQ$, et posant $f - \mu\rho = f''$, quantité indépendante de ρ, on aura

$$n\rho - f = tQ\rho - f''.$$

Dans la valeur de $Q\rho$ en fraction continue, nommons $\frac{S}{R}$ la première réduite dont le dénominateur soit au moins égal à M; et F' l'entier le plus approché de Rf''; en remplaçant $Q\rho$ par $\frac{S}{R}$, f'' par $\frac{F'}{R}$ et supposant t positive, l'expression $tQ\rho - f''$ est au plus altérée de

$$\frac{t}{R^2} + \frac{1}{2R}$$

et devient $\frac{tS - F'}{R}$; on rendra celle-ci entière en donnant à t une valeur comprise entre 0 et R; l'erreur $\frac{t}{R^2} + \frac{1}{2R}$ sera alors

$$< \frac{3}{2R} < \frac{2}{M},$$

et la condition (I) sera satisfaite; l'autre le sera aussi si $\frac{1}{Q'} < \frac{1}{M}$, ou si $R \overset{=}{<} \frac{Q'}{M}$. Si cela n'a pas lieu, à la place de $\frac{P}{Q}$, on emploiera $\frac{P'}{Q'}$, ... en suivant la même marche, c'est-à-dire en exprimant $Q'\rho$, $Q''\rho$, ... en fraction continue et nommant pour chacune $\frac{S'}{R'}$, $\frac{S''}{R''}$, ... la première réduite dont le dénominateur soit au moins égal à M, et l'on trouvera encore des solutions si $R' \overset{=}{<} \frac{Q''}{M}$, ...

Par conséquent, le seul cas qui ne serait pas résolu par la marche précédente et qui nous reste à examiner est celui où l'on aurait à la fois

$$R > \frac{Q'}{M}, \qquad R' > \frac{Q''}{M}, \qquad R'' > \frac{Q'''}{M}, \qquad \ldots,$$

cette suite d'inégalités se prolongeant à l'infini. Or, de cette suite résulte une condition satisfaite par ρ.

Pour la trouver, nommons $\frac{h}{g}$, $\frac{h'}{g'}$, ... la réduite qui précède immédiatement $\frac{S}{R}$, $\frac{S'}{R'}$, ... dans la valeur de $Q\rho$, $Q'\rho$, ... On aura

$$(17) \qquad Q\rho = \frac{h}{g} + \delta, \qquad Q'\rho = \frac{h'}{g'} + \delta', \qquad Q''\rho = \frac{h''}{g''} + \delta'', \qquad \ldots,$$

g, g', g'', ... étant inférieures à M, et δ, δ', ... à $\frac{1}{gR}$, $\frac{1}{g'R'}$, $\frac{1}{g''R''}$, ... Nommons i, i', ... les quotients incomplets qui correspondent à $\frac{P''}{Q''}$, $\frac{P'''}{Q'''}$, de sorte qu'on ait

$$Q'' = iQ' + Q, \qquad P'' = iP' + P, \qquad Q''' = i'Q'' + Q', \qquad \ldots.$$

On tirera des équations (17)

$$Q\rho + iQ'\rho - Q''\rho = 0 = \frac{h}{g} + \frac{ih'}{g'} - \frac{h''}{g''} + \frac{D}{gg'g''},$$
$$D = gg'g''(\delta + i\delta' - \delta''),$$

et il résulte de cette équation

$$D = gg'h'' - gg''ih' - g'g''h;$$

de sorte que D est un entier. D'ailleurs sa valeur est infé-

rieure à

$$\frac{g'g''}{R} + \frac{igg''}{R'} + \frac{gg'}{R''},$$

et comme g, g', g'' sont $< M$, et $R > \frac{Q'}{M}$, $R' > \frac{Q''}{M}$, ..., on aura, abstraction faite du signe,

$$D < M^3\left(\frac{1}{Q'} + \frac{i}{Q''} + \frac{1}{Q'''}\right).$$

Cette expression ne pourra qu'augmenter si l'on y remplace Q''' par $Q'' + Q'$, puis Q'' par $iQ' + Q$, et enfin Q' par Q; il en résulte

$$D < \frac{M^3}{Q}\left[2 - \frac{1}{(i+1)(i+2)}\right];$$

ainsi $D < 1$ puisque $Q \overline{\gtrless} 2M^3$; D devant d'ailleurs être un entier, il en résulte

$$D = 0;$$

en répétant ce calcul pour les équations (17), prises à un rang quelconque, il en résulte qu'on aura

$$\frac{h''}{g''} = i\frac{h'}{g'} + \frac{h}{g}, \qquad \frac{h'''}{g'''} = i'\frac{h''}{g''} + \frac{h'}{g'}, \qquad \ldots.$$

Nommons A le plus petit commun multiple de g et g', de sorte que $A < M^2$; soient B, C deux nombres tirés des équations

$$QC - PB = \frac{Ah}{g}, \qquad Q'C - P'B = \frac{Ah'}{g'},$$

dont les seconds membres sont entiers; B et C le seront aussi, leur commun dénominateur $PQ' - P'Q$ étant ± 1. On aura

$$\frac{Ah''}{g''} = i\frac{Ah'}{g'} + \frac{Ah}{g} = Q''C - P''B, \qquad \frac{Ah'''}{g'''} = Q'''C - P'''B, \qquad \ldots,$$

et les équations (17) donneront

$$A\rho = C - B\frac{P}{Q} + \frac{A}{Q}\delta,$$

$$A\rho = C - B\frac{P'}{Q'} + \frac{A}{Q'}\delta',$$

$$A\rho = C - B\frac{P''}{Q''} + \frac{A}{Q''}\delta'',$$

.....

Comme $\frac{A\delta}{Q}, \frac{A\delta'}{Q'}, \cdots$ convergent vers o, et $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \cdots$ vers ρ', cette suite de relations ne peut exister à moins que l'on n'ait exactement

$$(18) \qquad A\rho + B\rho' = C,$$

A, B, C étant des entiers positifs ou négatifs que l'on peut supposer premiers entre eux. En nommant A′, B′ la valeur numérique de A et B, nous allons voir que, si $A' + B' > \frac{1}{2\gamma}$, les conditions (I) et (II) peuvent encore être satisfaites avec une erreur inférieure à γ. En effet, en faisant varier de $-\gamma$ à $+\gamma$ deux nombres θ, θ', l'expression $A\theta + B\theta'$ prendra toutes les valeurs comprises entre les limites $\pm(A' + B')\gamma$, dont la différence dépasse un entier; on pourra donc donner à θ et θ' des valeurs moindres que γ et telles qu'on ait

$$(19) \qquad Af + Bf' + A\theta + B\theta' = D,$$

D étant un entier. On pourra ensuite trouver un nombre μ tel que $\mu\rho - f - \theta$ diffère d'un entier n' d'une erreur ε aussi petite qu'on voudra. En nommant t, t' deux entiers indéterminés, $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}$ deux réduites d'un rang très avancé dans la valeur de ρ, on posera

$$n = \mu + tQ + t'Q';$$

on aura

$$t(Q\rho - P) + t(Q'\rho - P') = \varepsilon', \qquad \varepsilon' < \frac{t}{Q'} + \frac{t'}{Q''} < \frac{t + t'}{Q'}$$

et, par suite,

$$n\rho = f + \theta + \varepsilon + n' + tP + t'P' + \varepsilon', \qquad n\rho' = \frac{nC - An\rho}{B}.$$

Substituant $n\rho$ dans la seconde et remarquant que

$$A(f + \theta) = D - B(f' + \theta'),$$

on aura

$$n\rho' = f' + \theta' + \varepsilon'' + \frac{n'' + tu + t'u'}{B},$$

en posant

$$\varepsilon'' = -\frac{A(\varepsilon + \varepsilon')}{B}, \qquad n'' = \mu C - D - n',$$

$$u = QC - PA, \qquad u' = Q'C - P'A;$$

n'' est indépendante de t, t'; le plus grand commun diviseur de u, u' divise $Pu' - P'u$, $Qu' - Q'u$ ou C et A, et, par suite, est premier à B. Donc on pourra donner à t, t' des valeurs comprises entre o et B, et telles que $n'' + tu + t'u'$ soit multiple de B. On aura alors

$$\varepsilon' < \frac{2B}{Q'};$$

on pourra donc, en prenant pour $\frac{P}{Q}$ une réduite assez avancée, faire en sorte que non seulement ε, mais ε' et, par suite, ε'' soient aussi petites qu'on voudra; θ et θ' étant inférieures à γ, il arrivera alors que les erreurs des conditions (I) et (II), c'est-à-dire $\theta + \varepsilon + \varepsilon'$, $\theta' + \varepsilon''$ le seront aussi.

Lorsque $A' + B' < \frac{1}{2\gamma}$, il ne peut y avoir en général de solution, car en nommant θ, θ' les erreurs correspondantes à un nombre n, on aurait

$$nA\rho + nB\rho' = nC, \qquad n\rho = f + \theta + \text{un entier}, \qquad \ldots.$$

et, par suite, $A(f+\theta) + B(f'+\theta')$ serait un entier. Or $Af + Bf'$ diffère de l'entier le plus rapproché de $\frac{1}{2}$ au plus; mais, en faisant varier θ et θ' de $-\gamma$ à $+\gamma$, on a toujours numériquement

$$A\theta + B\theta' < (A' + B')\gamma < \frac{1}{2},$$

de sorte que, pour certaines valeurs de f et f' au moins, l'erreur devrait être plus grande. Ainsi, en résumé, quand ρ et ρ' sont irrationnelles, la condition nécessaire et suffisante pour que, en donnant à n une valeur convenable, $n\rho - f$ et $n\rho' - f'$ ne diffèrent d'un entier que d'une fraction inférieure à γ, est qu'il n'existe pas entre ρ et ρ' une équation de la forme (18) dans laquelle A et B aient une somme numérique égale ou inférieure à $\frac{1}{2\gamma}$.

Si ρ' est rationnelle et ρ irrationnelle, ce théorème subsiste sans changement; en effet, il existe une relation de la forme (18), savoir $A\rho' = C$, A et C étant premiers entre eux, et il ne peut y en avoir une seconde, sans quoi ρ serait aussi rationnel. On a alors

$$n\rho' - f' = \frac{nC - Af'}{A},$$

et en nommant F l'entier le plus rapproché de Af', et μ un nombre tel que $\frac{\mu C - F}{A}$ soit entier, posant $n = \mu + tA$, t étant un entier indéterminé, on aura

$$n\rho - f = tA\rho - (f - \mu\rho),$$

que l'on pourra rendre aussi peu différente d'un entier qu'on voudra en donnant à t une valeur convenable; l'erreur pour la condition (I) sera fort petite, mais pour l'autre elle pourra aller jusqu'à $\frac{1}{2A}$ et ne pourrait qu'augmenter pour d'autres valeurs de n. Si l'on veut qu'elle soit $< \gamma$, il faut donc qu'on ait

$$\frac{1}{2A} < \gamma \quad \text{ou} \quad A > \frac{1}{2\gamma},$$

conformément au théorème.

Nous ne discuterons pas le cas beaucoup plus compliqué où ρ et ρ' sont toutes deux rationnelles; il n'existe alors aucune règle simple pour la limite d'erreur, si $\rho = \frac{C}{A}$, $\rho' = \frac{C'}{A'}$, et $A' = A$, on trouverait pour cette limite environ $\frac{1}{4}$; les autres cas devraient se subdiviser en une foule d'autres.

Quant à l'application à la question de Mécanique traitée en premier lieu, et dans laquelle il s'agissait de satisfaire les deux conditions avec une exactitude indéfinie, en substituant dans l'équation (18) les valeurs (16), on voit que le point mobile épuisera le solide de révolution dans lequel il est forcé de se mouvoir, s'il n'existe pas une relation de la forme

$$Ap + Bp' + C\frac{k}{2\pi}(pq' + p'q) = 0,$$

A, B, C étant des entiers. Cette équation existerait si p et p' avaient un rapport rationnel, et dans ce cas il est aisé de voir qu'à une valeur de u correspondrait un nombre limité de valeurs de v, de sorte que le mobile resterait sur une certaine surface.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ZAREMBA. — *Sur un problème concernant l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini.* In-4°, 79 p. Paris, Gauthier-Villars.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de M. le contre-amiral Mouchez. *Mémoires.* T. XIX. In-4°, 518 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 27 fr.

DANTSCER (V. v.). — *Ueber die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte.* Lex.-8°, 49 S. Leipzig, Freytag, 80 Pf.

MUIR (T.). — *The Theory of Determinants in the historical order of its Development.* Part I : *Determinants in general. Leibniz* (1693) *to Cayley* (1841). 8°, 266 p. London, Macmillan, 10 sh. 6 d.

VILLIÉ (E.). — *Compositions d'Analyse, de Mécanique et d'Astronomie données depuis* 1885 *à la Sorbonne pour la licence des Sciences mathématiques, suivies d'Exercices sur les variables imaginaires.* Enoncés et solutions. Seconde Partie. In-8°, VIII-318 p. Paris, Gauthier-Villars, 8 fr. 50 c.

FUHRMANN (A.). — *Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau u. in der Technik. Lehrbuch u. Aufgabensammlung* (In 6 Theilen) II. Theil : *Naturwiss. Anwendg. der Infinitesimalrechnung.* Gr.-8°, XI-268 S. m. 78 Holzschn. Berlin, Ernst et Korn, 5. M. 50 Pf.

HERMITE (M.). — *Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce* (*Sonderdr.*). Gr.-4°. 10 S. Prag, Rziwaatz.

KLEIN (F.). — *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, ausgearbeitet u. vervollständigt von R. Fricke.* 1. Bd. *Grundlegung der Theorie.* Lex-8°, XIX-764 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. 24 M.

SCHUBERT (H.). — *Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen u. Aufgaben.* 1. Heft. *Für mittlere Klassen.* 3. Aufl. 8°, VIII-224 S. Potsdam, Stein, 1 M. 80 Pf.; gebd, 2 M.

TISSERAND (F.). — *Traité de Mécanique céleste.* T. II : *Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation.* In-4°, XIV-352 p. Paris, Gauthier-Villars, 28 fr.

JELLETT (J.-H.). — *Die Theorie der Reibung. Deutsch bearbeitet von J. Lüroth u. A. Schepp.* Gr.-8°. X-238 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. 6 M.

MINCHIN (G.-M.). — *A Treatise on Statics, with Applications to Physics.* Vol. 1. 4e édit. 8°. 394 p, London, Frowde, 10 sh. 6 d.

BOUCHARLAT (J.-L.). — *Eléments de Calcul différentiel et de Calcul intégral.* 9e édit. In-8°, VI-448 p. et 5 pl. Paris, Gauthier-Villars, 8 fr.

DU BOIS-REYMOND (P.). — *Ueber die Grundlagen der Erkenntniss in den exakten Wissenschaften. Nach einer hinterlassenen Handschrift.* Gr.-8°, VII-130 S. m. Lichtdr.-Bild. Tübingen, Laupp, 3 M. 60 Pf.

FORSYTH (A.-R.). — *Theory of differential equations.* Part. I : *Exact equations and Pfaff's problem.* 8°, 340 p. London, Cambridge, Warehouse, 12 sh.

HASKELL (M.-W.). — *Ueber die zu der Curve* $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ *im projectiven Sinne gehörende mehrfache Ueberdeckung der Ebene.* Gr.-4°, 52 S. m. Figuren u. 2 Tafeln. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 2 M. 80 Pf.

OEHLER (G.-W.). — *Ueber die Anwendung der Neumann'schen Flächenorte zur Darstellung der Formen des regulären Systems.* Programm des Gymnasiums in Freiberg. 16 S. m. 5 Taf.

SCHLEICHER (K.). — *Darstellung und Umkehrung von Thetaquotienten, deren Characteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind.* Progr. d. Studienanstalt zu Bayreuth. 26 S. 8°.

SCHUMACHER (F.). — *Zur Theorie der algebraischen Gleichungen.* Gr.-8°, XII-137 S. Leipzig, Deichert Nachf, 3 M. 50 Pf.

MATHIEU (E.). — *Traité de Physique mathématique. Théorie de l'élasticité des corps solides.* 2e Partie : *Mouvements vibratoires des corps solides; Equilibre d'élasticité des lames courbes et du prisme rectangle.* In-4°, 188 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 9 fr.

BOBEK (K.-J.). — *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Bearb. nach System Kleyer. Gr. in-8°, VIII-268 S. m. 27 fig. Stuttgard, Maier. 6 M.

ENGEL (F.). — *Der Geschmack in der neueren Mathematik.* Antrittsvorlesungen. Gr. in-8°, 21 S. Leipzig, Alfr. Lorentz, 1 M.

GRAFE (F.). — *Auflösungen und Beweise der Aufgaben u. Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere der Flächen 2. Grades.* Gr. in-8°, XVI-353 S. Leipzig, Teubner, 8 M.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JUNKER. — Ueber algebraische Korrespondenzen. Inaugural-Dissertation. 62 p. in-8°. Tübingen, Fues; 1889.

Le Travail de M. Junker, inspiré par les recherches de M. Brill, comporte principalement des applications d'une formule de correspondance établie par ce dernier dans un important Mémoire des *Mathematische Annalen* (t. XXXI, p. 399) : les recherches de M. Junker, qui se rapportent au fond à la Géométrie numérique, ont, comme celles de son maître, un caractère nettement algébrique, en ce sens que les équations d'où dépendent les inconnues sont formées et qu'on reste ainsi sur un terrain très solide.

Le point de départ est dans la considération de la correspondance entre deux points P, P′ de coordonnées x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 appartenant à une courbe algébrique

$$A_x^m = 0,$$

et qui se correspondent l'une à l'autre en vertu d'une équation

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0,$$

dont le premier membre peut s'annuler identiquement quand on suppose les y égaux aux x, ou contenir alors A_x^m en facteur. L'auteur rappelle, d'après M. Brill, comment on peut déterminer alors les points où P et P′ coïncident, la *courbe des coïncidences* qui détermine sur A_x^m ces points de coïncidence, et enfin le nombre des coïncidences *propres*, c'est-à-dire de celles qui se font en dehors des points singuliers de A_x^m.

L'auteur fait une première application de ces résultats aux points déterminés sur une courbe F par un faisceau linéaire de courbes du n^{ieme} ordre, deux quelconques de ces points étant considérés comme correspondants; on peut se proposer de déterminer les coïncidences, ou, ce qui revient au même, les courbes du faisceau qui touchent F; l'étude, aux environs d'un point singulier de F, du déterminant jacobien relatif à la courbe F et à

deux courbes du faisceau, conduit M. Junker à la proposition suivante qui complète ce que l'on savait à cet égard : Si les trois courbes F, f, φ ont un point commun, si f et φ étant de même degré n, F a au point commun un point multiple d'ordre α, f et φ des points multiple d'ordre γ, la jacobienne aura en ce point un point multiple d'ordre $\alpha + 2\gamma - 2$ dont α branches seront tangentes aux α branches de F et l'on en conclut que le nombre des coïncidences propres est

$$m(m + 2n - 3) - \Sigma\alpha(\alpha + 2\gamma - 1).$$

Des résultats de la même nature peuvent s'obtenir en considérant, au lieu d'un faisceau linéaire, les courbes dans l'équation desquelles un paramètre entre d'une façon entière. M. Junker passe ensuite à l'étude du nombre de courbes d'un réseau

$$f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0.$$

qui sont osculatrices à une courbe fixe $F = 0$: ce problème avait déjà été traité par MM. Brill, Gundelfinger, Lindemann. Il s'occupe ensuite du problème analogue sur les courbes d'un système linéaire triplement infini qui rencontrent une courbe fixe en quatre points confondus.

Dans la seconde Partie de son travail, il traite des courbes du réseau

$$y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) = 0.$$

qui touchent une courbe donnée, et telles que le point y_1, y_2, y_3 appartienne à une autre courbe donnée; enfin il établit, au moins sous certaines restrictions, la belle proposition qui suit, obtenue par M. Zeuthen par des considérations de Géométrie numérique [1] : Si F et G sont deux courbes, de genre p et p', entre lesquelles existe une correspondance et telles qu'à un point de la première correspondent M′ points de la seconde, et à un point de la seconde correspondent M points de la première, si enfin on désigne par C et C′ le nombre des coïncidences sur l'une et l'autre

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. III, p. 153-156.

courbe, on aura

$$C - C' = 2M'(p-1) - 2M(p'-1);$$

dans les nombres C, C′ doivent être comptées les coïncidences qui se font aux points de rebroussement. J. T.

MÉLANGES.

NOTE SUR LA DÉTERMINATION D'UN MINIMUM GÉOMÉTRIQUE REMARQUABLE;

PAR M. CH. CELLERIER.

1. *Préliminaires.* — On demande de choisir la forme d'un système de surfaces qui forment dans l'espace un nombre donné n de cavités entièrement fermées, dont chacune ait un même volume v. Il faut, en même temps, que l'étendue totale des surfaces, soit extérieures, soit de séparation des cavités (en ne comptant celles-ci qu'une fois) soit la plus petite possible.

La question est fort difficile à résoudre rigoureusement, même lorsque n est un petit nombre tel que 3, mais qu'on veut trouver la forme de toutes les cavités, même de celles qui sont contiguës à l'espace extérieur. Il en serait de même pour celles qui sont entourées de toutes parts d'autres cavités s'il fallait démontrer *a priori* que, lorsque le système de surfaces minimum est obtenu, toutes ces cavités doivent être entièrement convexes. Toutefois, il semble qu'il ne peut guère en être autrement, et nous admettrons ce principe comme un postulat.

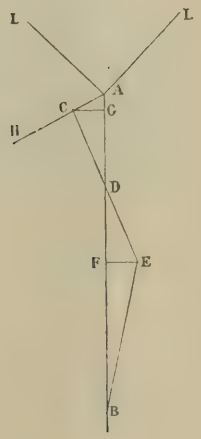
2. *Valeur des dièdres.* — Supposons donc obtenu le système de surfaces demandé et cherchons ce que peut être la forme d'une des cavités. Le nombre de celles-ci étant supposé fort grand, il est évident qu'il s'en trouvera qui ne touchent point à l'espace extérieur; or l'une de celles-là ne peut être adjacente en toutes ses parties à une même cavité, car celle-ci ne serait pas convexe; elle le sera à plusieurs, et pour la même raison, les surfaces de séparation

ne peuvent être que des plans. Ainsi nous voyons déjà que chacune est un polyèdre fermé et convexe, dont chaque face est adjacente à une cavité voisine et une seule ; et de même chaque angle d'un des polygones ainsi formés est le point de réunion d'au moins trois cavités.

Nous n'excluons pas toutefois le cas où deux faces seraient dans un même plan, et celui où deux côtés d'un polygone seraient le prolongement l'un de l'autre, ce qui arriverait si, en un point de concours de plusieurs cavités, se trouvait pour l'une d'elles sur une de ses faces un angle intérieur de 180°. Il suffit pour la convexité qu'aucun angle ne puisse dépasser 180°.

Considérons maintenant dans l'espace une droite suivant laquelle se réunissent au moins trois plans de séparation (*fig.* 1).

Fig. 1.



Représentons-la pour simplifier comme verticale, projetée en A sur le plan de la figure, regardé comme horizontal ; soient AL, AH, AB, les traces des divers plans sur celui de la figure. Nous admettons qu'on puisse, sans atteindre la limite d'aucune des faces, s'éloigner du point A dans le sens horizontal d'une distance l sur une quelconque d'entre elles, et d'une hauteur h dans le sens vertical au-dessus ou au-dessous, de sorte que chacune comprenne dans son étendue un rectangle de base l et de hauteur $2h$; on pourra

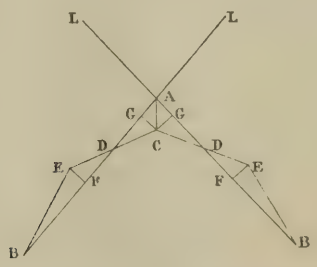
toujours le supposer en attribuant à l et h des valeurs assez petites, mais finies.

Cette donnée étant ainsi posée, soit pour la figure précédente, soit pour les deux suivantes, nous allons prouver qu'un des dièdres tel que BAH ne peut être aigu. En effet, s'il en était ainsi, prenons $AB = l$, et soit AC une très petite distance que nous ferons diminuer indéfiniment, prenons $AD = \frac{1}{3}AB$, prolongeons CD d'une longueur $DE = \frac{1}{2}CD$. Dans les triangles ACD, BDE, en comparant les hauteurs EF, on voit que $EF = \frac{1}{2}CG$: donc ils sont équivalents. Nommons A′, F′ les points qui, dans l'espace, sont situés à une hauteur h au-dessus de A et F. Supposons que l'on enlève dans la paroi les triangles F′DB, A′AD, et qu'on la remplace par une autre surface formée des triangles F′EB, F′ED, A′CD, puis qu'on répète symétriquement la même construction au-dessous du plan de la figure; les nouvelles parois ainsi tracées sépareront complètement les mêmes cavités que l'ancienne; celles-ci, de plus, ont le même volume parce que les pyramides ajoutées et retranchées de part et d'autres sont équivalentes; quant à l'étendue des parois, nous allons voir qu'elle serait diminuée. En effet, comme nous regarderons AC comme un infiniment petit de premier ordre, si nous convenons de négliger les quantités du deuxième ordre, ou celles qui sont le produit de $\overline{AC}^2$ par une quantité finie, nous voyons d'abord que les hauteurs des nouveaux triangles, ou les perpendiculaires abaissées de F′ sur BE, DE et de A′ sur CD peuvent être remplacées par F′F et A′A ou h; puis, quant aux bases, comme F est à peu près au milieu de AB, on peut remplacer de même BE par BF, DE par DF, CD par GD, et en tout il en résulte pour tout changement (le résultat devant être doublé par suite de la construction inférieure) une diminution $2h \times AG$ qui est du même ordre que AC, ce qui justifie la négligence des termes précédents. Ainsi le système de surfaces supposé ne serait pas le plus petit; et nous pouvons conclure déjà que tous les dièdres sont droits ou obtus.

Nous pouvons vérifier par un raisonnement tout semblable qu'il ne peut y avoir plus de trois plans se réunissant suivant une même droite, car alors il y en aurait seulement quatre, et tous les dièdres devraient être droits (*fig.* 2); mais, en prenant les mêmes données

que dans la première figure, portant une très petite longueur AC sur la bissectrice de l'un de ces dièdres BAB, et répétant les mêmes constructions que précédemment sur les deux plans, et aussi au-dessous du plan de la figure, sauf l'addition d'une petite portion de paroi A'AC, nous verrions, comme ci-dessus, qu'en négligeant les quantités très petites du second ordre il aurait été ajouté au-dessus ce triangle A'AC et supprimé deux triangles A'AG, et, comme on peut leur donner pour hauteur h, il aurait été retranché au-dessus et au-dessous $h(2\,AG - AC)$ ou $h\,AC(\sqrt{2} - 1)$, de sorte que la surface aurait encore diminué.

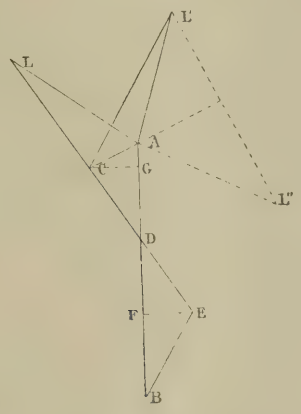
Fig. 2.



Enfin, nous pouvons vérifier que, non seulement il n'y a que trois plans se réunissant suivant une même droite, mais encore que chacun est le prolongement du plan bissecteur des deux autres. En effet, si les traces de ces plans sur celui de la figure, en admettant les mêmes données qu'au commencement de ce paragraphe sont AL, AL', AB (*fig.* 3), soit AC la bissectrice de l'angle extérieur des deux premiers; si AB ne lui est pas perpendiculaire, que BAC soit aigu; prenons encore des longueurs AB, AL, AL', finies, toutes plus petites que l, et telles qu'en prenant $AD = \frac{1}{3}AB$, on ait le triangle $ACL = ACD$; on le pourra évidemment, et la grandeur de AL et AB sera indépendante de AC que nous prendrons, du reste, infiniment petit; prenons aussi $AL' = AL$ et par suite $AL'C = ALC$. Cela fait, prolongeons CD de $DE = CD$, menons CG, EF, perpendiculaires à AB; nommons A', F' les points situés à une hauteur verticale h au-dessus de AF. Enlevons comme précédemment des parois les triangles F'BD, A'AD et de plus A'AL, A'AL' et remplaçons-les par F'BE, F'DE, A'CD, A'CL, A'CL';

alors, en répétant au-dessous des constructions symétriques, il est clair que les parois seront complètement fermées et qu'aucune des cavités n'aura changé de volume, puisque les surfaces BDE, 2 ACD et DAC + CAL′ sont égales; quant aux triangles ajoutés ou re-

Fig. 3.



tranchés, nous pourrons encore leur donner pour hauteur commune h, puis, en négligeant les infiniment petits du second ordre, la diminution est

$$h(\mathrm{AG} + \mathrm{AL} + \mathrm{AL}' - \mathrm{CL} - \mathrm{CL}'),$$

laquelle se réduit à $h \times \mathrm{AG}$, puisqu'en nommant L″ le point symétrique de L′ par rapport à AC, on a

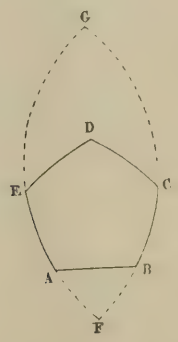
$$\mathrm{AL} + \mathrm{AL}' = \mathrm{LAL}'', \qquad \mathrm{CL} + \mathrm{CL}' = \mathrm{LCL}'',$$

et que la différence LCL″ — LL″ est du second ordre de petitesse. Ainsi la surface serait encore diminuée, ce qui est impossible; et, puisque chacun des trois plans doit être bissecteur des deux autres, il faut que les trois dièdres soient de 120°.

3. *Nature des angles solides d'une cavité.* — En prenant le sommet o d'un de ces angles pour centre d'une sphère, il déterminera sur celle-ci un polygone sphérique convexe ou tel qu'il forme une ligne fermée dont tous les angles, pris d'un même côté, soient $< 180°$; ce côté est celui de l'intérieur. Réciproquement il est facile de voir que, si un polygone sphérique ABCDE (*fig.* 4) satis-

fait à ces dernières conditions, il est entièrement situé d'un même côté du plan de l'un de ses côtés. En effet, si l'on joint (*fig.* 4) le point A à un point mobile parcourant EDCB, et cela par un arc qu'on dirige à partir du point mobile du côté intérieur, il est aisé de voir que, dans le voisinage du point de départ, cet arc est en-

Fig. 4.



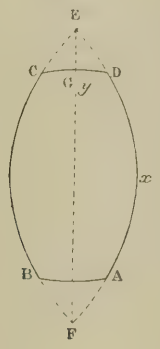
tièrement intérieur et de plus $< 180^\circ$. Or ces deux choses ne peuvent cesser d'avoir lieu pendant le mouvement, car si, à un certain instant, l'arc mobile cessait d'être en entier intérieur, c'est-à-dire renfermait un côté ou un angle du polygone avant d'avoir atteint AB, il est clair qu'il y aurait des angles intérieurs $> 180^\circ$; dès lors il est aisé de prouver aussi que l'arc mobile est moindre que 180°, et on peut en dire autant de tout arc intérieur joignant deux points quelconques d'un polygone convexe.

On en conclut aussi que celui-ci est entièrement compris dans le fuseau formé par AE et AB prolongées, de sorte qu'il est tout entier du même côté du plan d'un de ses côtés : donc il est aussi entièrement compris dans le fuseau de deux quelconques de ces côtés prolongés, par exemple GF.

Revenons maintenant à l'angle solide d'une cavité; le polygone de n côtés qu'il détermine sur la sphère a tous ses dièdres de 120° ou $\frac{4}{3}$ de droit, et sa surface exprimée en huitièmes de sphère étant par suite $\frac{4n}{3} - (2n - 4)$, il faut que $n < 6$ pour qu'elle soit positiée, donc $n = 5$, ou 4, ou 3. Si le polygone est un triangle, il est équilatéral, sa forme est déterminée. Si c'est un quadrilatère ABCD (*fig.* 5), en prolongeant les côtés AD, BC, le triangle DEC est

isoscèle, ayant deux angles de 60°, AEB l'est aussi, donc AD = BC; on prouverait de même que AB = DC. Enfin, il en résulte que les triangles AFB, DEC sont égaux.

Fig. 5.



Nommant x, y les deux côtés du quadrilatère, G le milieu de CD, on aura, dans le triangle rectangle GED,

$$\operatorname{tang} GD = \operatorname{tang} DE \cos EDG,$$

et, comme

$$x + 2\,ED = 180, \qquad EDG = 60,$$

il en résulte

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} x \operatorname{tang} \frac{1}{2} y = \frac{1}{2}.$$

Telle est la relation qui lie constamment deux côtés d'un quadrilatère et, quand deux arcs la satisfont, nous dirons pour abréger que l'un est le côté complémentaire de l'autre; il est clair que, quelle que soit la valeur du premier, son complémentaire existe toujours.

Avant de passer aux pentagones, nous devons rappeler le principe suivant : si deux triangles sphériques ont deux angles égaux, mais que le côté compris soit plus grand dans le premier que dans le deuxième, le troisième angle est aussi plus grand. Cela résulte évidemment de la formule connue

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

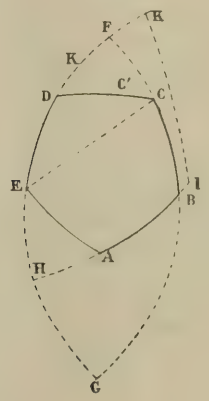
car, si, B et C restant les mêmes, on fait varier a, il est clair que, $\sin B \sin C$ étant positifs, $\cos A$ et $\cos a$ varient dans le même sens, et il en est de même de a et A.

Nous n'exprimerons point par des formules les conditions que doivent remplir cinq arcs pour pouvoir former un pentagone dont tous les angles soient de 120°. Les remarques suivantes nous suffiront, le pentagone étant ABCDE (*fig.* 6) :

1° Sur deux côtés donnés et adjacents AE, AB, on ne peut décrire qu'un seul pentagone, car les arcs EF, BF sont déterminés de direction ; donc l'angle F est aussi déterminé, et par suite aussi le triangle FCD dont les angles C et D sont de 60°.

2° Si les deux côtés donnés AE et AB sont égaux, il est clair

Fig. 6.



qu'on a aussi ED = BC et réciproquement. Nous dirons dans ce cas que le pentagone est symétrique par rapport à l'angle A.

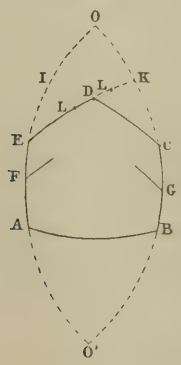
3° De deux côtés adjacents quelconques, chacun est toujours inférieur au complémentaire de l'autre. Car si, par exemple, CD dépassait le complémentaire de DE ou lui était égal, en prenant DC′ égal à ce complémentaire, le triangle DEC′ serait la moitié d'un quadrilatère ; ainsi les angles DEC′ + DC′E auraient une somme égale à 120° ; puis, le triangle DEC étant égal ou plus grand, on aurait DEC + DCE = ou > 120° ; donc AEC + BCE = ou < 120° ; donc, dans le quadrilatère ABCE, la somme des angles serait = ou < 360°, ce qui est absurde.

4° Aucun côté d'un pentagone ne peut être égal à un côté du triangle équilatéral dont les angles sont 120°, ou plus grands : en effet, si DC′ était le côté du triangle et qu'on eût DC = ou > DC′,

alors, en comparant le triangle équilatéral au triangle DCG, on aurait $G \geqq 120^\circ$, et par suite l'angle $HFB \geqq 120^\circ$; or, en nommant AI le côté complémentaire de AE, lequel est plus grand que AB, et supposant complété le quadrilatère EAIK (le point K pouvant tomber d'un côté ou de l'autre de F), on trouvera, au contraire, en comparant les triangles HBF, HIK, que l'angle $HFB < HKI$ ou $< 120^\circ$.

5° Il n'est pas possible de former deux pentagones ayant un côté égal AB, et tels que les côtés adjacents AE, BC du premier soient tous les deux plus grands que les côtés adjacents AF, BG du second (*fig.* 7). En effet, complétons le fuseau OO′, et soit H le cinquième angle du second pentagone. Le côté GH ne peut venir rencontrer l'arc EO′ entre E et O′, sans quoi le second pentagone serait entièrement compris dans le premier, tandis qu'il a la même surface. Donc il coupe cet arc en I entre E et O; donc il coupe l'arc EK dans l'intérieur du fuseau, en un point L (d'un côté ou de l'autre

Fig. 7.

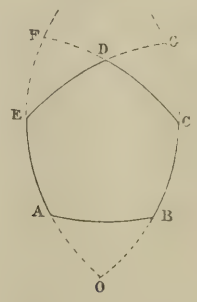


de D, et, en comparant les triangles KDC, KMG, on aurait l'angle $KDC < KLG$, ou $< ILE$; puis, en comparant les triangles ILE, IHF, on aurait l'angle $ILE < IHF$, d'où $KDC < IHF$, ce qui est absurde, puisque ces deux angles sont de 60°.

De là résulte que, si, à un premier pentagone ABCDE (*fig.* 8), on en compare un second pour lequel AB soit le même, mais AE plus grand, BC sera plus petit, puis il résulte de la considération des triangles OCF et OGE que l'angle OEC sera plus petit, et l'angle OGE plus grand. Enfin il résulte des triangles EFD, CGD,

que le côté ED deviendra plus petit, et CD plus grand; ainsi, quand on change la forme d'un pentagone en laissant un côté constant, deux autres côtés adjacents quelconques varient toujours en sens inverse.

Fig. 8.



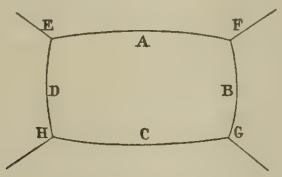
4. *Description générale des modes d'assemblage des angles solides.* — Si en un point se réunissent les angles solides convexes de diverses cavités, en prenant ce point comme centre d'une sphère, chacun des angles solides déterminera sur celle-ci un polygone tel que ceux que nous venons de décrire, et leur assemblage devra recouvrir toute la sphère; or il est aisé de voir que la surface d'un des pentagones, dont l'excès sphérique est $\frac{2}{3}$ de droit, sera $\frac{1}{12}$ de la surface de la sphère; la surface d'un des quadrilatères en est $\frac{1}{6}$, et celle d'un des triangles $\frac{1}{4}$ (en supposant tous les angles de 120°), de sorte que, si l'on nomme n le nombre des pentagones, n' celui des quadrilatères et n'' celui des triangles, on aura $n + 2n' + 3n'' = 12$.

Nous nommerons, pour abréger, *carré* le quadrilatère dont les deux côtés sont égaux, et, avant d'entrer dans le détail des modes d'assemblage, nous devons faire deux remarques qui en limitent le nombre.

Supposons que, sur les quatre côtés A, B, C, D d'un quadrilatère (*fig.* 9) se trouvent construits des pentagones dont les côtés adjacents soient E, F, G, H. Supposons $A > B$. Il est impossible de supposer $E > G$, car, en comparant les pentagones construits sur F et B, F et A, le côté F étant le même et le côté $A > B$, on devrait avoir $E < G$; on verrait de même, en comparant les pentagones construits sur C et D, qu'on ne peut avoir $G > E$; donc $G = E$, ce qui est aussi impossible, puisque les pentagones con-

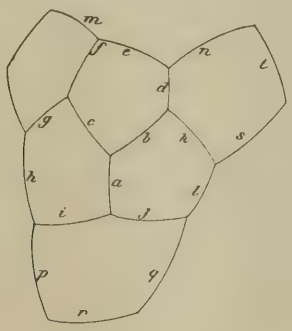
struits sur A et B auraient un côté inégal entre côtés égaux. Donc un quadrilatère ne peut être adjacent à quatre pentagones que s'il est carré ou si $A = B$, et, dans ce cas, on a évidemment $E = G$, $H = F$.

Fig. 9.



Ensuite nous allons démontrer que la surface de la sphère ne peut être partagée en douze pentagones à angles de 120°, à moins qu'ils ne soient réguliers. En effet, nommons δ le côté du pentagone régulier; si, dans un autre pentagone construit sur b et c par exemple (*fig.* 10), ces deux côtés sont tous deux $> \delta$ ou l'un égal l'autre plus grand, il résulte du paragraphe précédent que f et d seront $< \delta$, et $e > \delta$; l'inverse aura lieu si b et c sont tous l'un $= \delta$ et l'autre $< \delta$.

Fig. 10.



Démontrons, en premier lieu, qu'il y a impossibilité à ce que, de trois côtés a, b, c, partant d'un même angle (*fig.* 10), aucun ne soit $= \delta$. En effet, si tous trois sont $> \delta$, on aura f, g, d, $k < \delta$, et, par suite, m, e, $n > \delta$; or il ne peut y avoir, dans un pentagone, trois côtés successifs $> \delta$: on vérifierait de même qu'on ne peut avoir à la fois a, b et $c < \delta$. Supposons $a < \delta$, b et $c < \delta$.

On ne peut admettre que g et k soient tous deux $< \delta$, car f et d

sont $< \delta$, et l'on aurait encore m, e, $n > \delta$. On ne peut admettre non plus que g et k soient $\gtreqless \delta$, car alors on aurait l et $h < \delta$, i et $j > \delta$, p et $q < \delta$, et le pentagone construit sur le côté r aurait ce côté et les deux adjacents $> \delta$. Ainsi, des deux côtés g, k, l'un, par exemple le premier, doit être $> \delta$, l'autre $< \delta$.

On ne peut supposer $l \gtreqless \delta$, car alors $j > k$, de même que i; h, p, q, l étant $< \delta$, le pentagone construit sur r serait encore impossible.

Donc $l > \delta$, donc puisque d et $k < \delta$, n et $s >$ et $t < \delta$; puis, comme s et l, n et e, sont $> \delta$, on voit que le pentagone adjacent à t aurait ce côté et les deux adjacents $< \delta$, ce qui est impossible.

On vérifierait de même que l'on ne peut supposer que, des trois côtés a, b, c, l'un soit $> \delta$ et les deux autres $< \delta$. Donc il faut que l'un au moins soit $= \delta$. Mais il est impossible qu'il n'y en ait qu'un seul a. En effet, si b et c sont tous deux $> \delta$, ou tous deux $< \delta$, on verra qu'aucun des côtés k, b, d partant d'un même angle n'est $= \delta$, ce qui est impossible. Supposons donc $b <$ et $c < \delta$. On aura $k <$ et $l > \delta$: donc il faut que $s = \delta$, donc $d > \delta$, aucun des côtés b, d, k n'est $= \delta$.

Il est impossible également que deux seulement des trois côtés a, b, c soit $= \delta$, par exemple b et c, car, si $a > \delta$ ou $< \delta$, on aurait que i et j sont tous deux $<$ ou $> \delta$, et des trois côtés a, i, j, aucun ne serait $= \delta$. Donc enfin tous les côtés de tous les pentagones doivent être égaux à δ.

Il nous reste à examiner toutes les dispositions par lesquelles on peut partager la surface de la sphère en triangles, quadrilatères pentagones, et nous supposerons toujours, cela va sans dire, que les angles sont de 120°. Nous aurons surtout, pour chaque disposition, à mesurer les côtés de longueurs diverses qui entrent dans les divers polygones.

5. *Dispositions où entrent des triangles.* — Nommons a le côté d'un triangle équilatéral; les angles étant connus, on en déduit

$$\cos a = -\frac{1}{3}, \qquad a = 109^\circ 28' 20.$$

Un triangle ne peut être adjacent à un pentagone. Si deux triangles sont adjacents, on ne peut placer qu'un triangle sur les

deux côtés a qui forment un angle rentrant, chacun dépassant le côté supplémentaire de l'autre et, cela fait, il ne reste que la place d'un triangle.

Si, au contraire, sur chaque côté d'un triangle, se trouve un quadrilatère, le premier côté de celui-ci étant a, le second a' sera le côté supplémentaire, et les côtés opposés a des trois quadrilatères formeront encore un triangle. De là résulte que :

La première disposition ne contient d'autres côtés que a : elle se compose de quatre triangles;

La seconde disposition contient a et a', elle se compose de deux triangles séparés par trois quadrilatères égaux. On a d'ailleurs

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a' \operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \frac{1}{2},$$

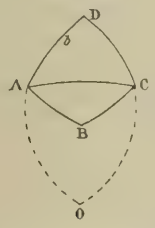
$$\frac{1}{2}a = 54^\circ 44' 10'',$$

$$\frac{1}{2}a' = 19^\circ 28' 20'',$$

$$a' = 38^\circ 56' 40''.$$

6. *Dispositions où n'entre aucun triangle, mais bien un carré.* — La diagonale AC d'un carré ABCD (*fig.* 11) est $= a$,

Fig. 11.



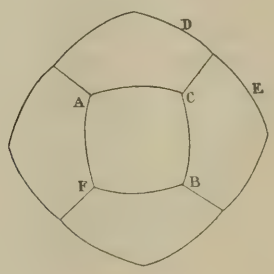
parce qu'elle forme un triangle équilatéral avec AD et CD prolongés. En nommant b le côté d'un carré, nous avons trouvé

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}, \qquad \cos b = \frac{1}{3}, \qquad b = 180 - a = 70^\circ 31' 40''.$$

Si deux carrés sont adjacents, on ne peut placer qu'un carré sur l'un des angles rentrants ainsi formés et il en est de même des suivants; il est aisé de voir qu'il en résulte que la troisième disposition, où n'entre que l'arc b, est formée de six carrés.

Si à un carré aucun autre n'est adjacent, il faudra que ce soit quatre pentagones (*fig.* 12) et cela de façon que l'arc A = B, et C = F; ainsi les pentagones CE, CD sont égaux par renversement. Si à ces quatre pentagones aucun carré n'est adjacent, alors quatre autres se placent dans les angles rentrants tels que DE, et, comme D = E, chacun de ceux-là est symétrique. Ils ne laissent d'ailleurs plus de place que pour un quadrilatère qui ne peut être qu'un carré, et, puisqu'ils sont symétriques, les arcs partant des

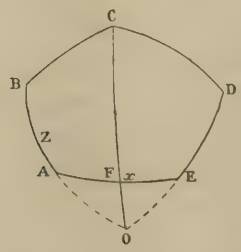
Fig. 12.



angles du carré sont égaux : les quatre nouveaux pentagones sont donc égaux, d'où résulte que les anciens doivent l'être aussi. Donc :

La quatrième disposition se compose de deux figures égales à la précédente, formée d'un carré adjacent à quatre pentagones symétriques et égaux entre eux. Elle en contient, outre le côté b, deux autres b' et b''; mais il est préférable de chercher directement les

Fig. 13.



côtés y et z d'un pentagone symétrique par rapport à l'angle C (*fig.* 13) et construit sur un côté quelconque x; ensuite, en supposant $x = b$, nous aurons pour b' et b'' les valeurs de y et z;

or nous aurons

$$\cos y = \frac{\cos AOC + \cos B \cos OCB}{\sin B \sin OCB} = \frac{4 \cos AOC - 1}{3}, \qquad AFO = 90^\circ,$$

$$\cos AOF = -\cos OAF \cos AFO$$
$$+ \sin OAF \sin AFO \cos AF = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \frac{1}{2} x,$$

$$\cot OB \sin y = \cot BCO \sin B + \cos B \cos y = \frac{1 - \cos y}{2},$$

$$\operatorname{tang} OB = 2 \cot \frac{1}{2} y,$$

$$\cot AO \sin AF = \cot AFO \sin OAF + \cos AF \cos OAF,$$

$$\operatorname{tang} AO = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x.$$

Dans le cas actuel,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} x,$$

$$\cos \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\cos y = \cos b' = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3},$$

puis ensuite

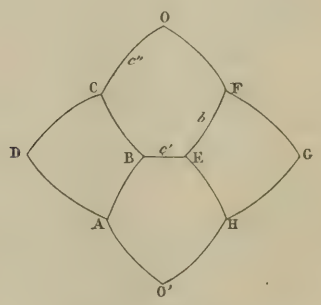
$$\operatorname{tang} OB = 2 \cot \frac{1}{2} b', \qquad \operatorname{tang} AO = \sqrt{2}, \qquad z = b'' = BO - AO;$$

$$b' = 52^\circ 27' \ 0'',$$
$$\frac{1}{2} b' = 26^\circ 13' 30'',$$
$$BO = 76^\circ \ 0' 50'',$$
$$OA = 54^\circ 44' 10'',$$
$$b'' = 21^\circ 25' 40''.$$

Il nous reste à examiner la disposition où, après avoir placé un pentagone sur chaque côté d'un carré ABCD, ceux-là ne se trouveraient pas adjacents uniquement à des pentagones, c'est-à-dire que l'un des angles rentrants tels que FEH (*fig.* 14) se trouverait occupé par un quadrilatère, lequel d'ailleurs ne pourrait être qu'un carré puisque EF = EH. Dans ce cas, le pentagone OBE serait par suite symétrique et, dans les angles OFG, OCD, on ne pourrait placer que deux autres pentagones égaux au précédent; de même, autour du point O′ devraient se grouper trois autres pentagones aussi égaux aux précédents, et ces six-là ne laisseraient plus

de place que pour un troisième carré. De là on conclura aisément que la cinquième disposition est formée en menant, par deux points O, O′ diamétralement opposés, trois demi-grands cercles faisant entre eux des angles de 120°. Le grand cercle dont O, O′ sont les pôles coupera ceux-là en trois points qu'on prendra pour les

Fig. 14.



centres des trois carrés, en plaçant les diagonales de ceux-ci sur les cercles. Les parties restantes de ces derniers, jointes aux côtés des carrés, formeront six pentagones égaux et symétriques. Cette disposition renferme les côtés b, c', c''; mais il est clair que $3c' + 3$ diagonales du carré $= 360$, $2c'' + 1$ diagonale $= 180°$, et, comme la diagonale $= a$, on aura

$$c' = 120° - a, \qquad c'' = 90° - \frac{1}{2}a;$$

$$\frac{1}{2}a = 54°14'10''.$$
$$c'' = 35°15'50''.$$
$$c' = 10°31'40''.$$

7. *Dispositions où n'entrent ni triangles ni carrés.* — Commençons par celle que nous avons déjà étudiée :

La sixième disposition se compose de douze pentagones réguliers. Elle ne contient que le côté d du pentagone régulier. En nommant O le centre du pentagone (*fig.* 15), AB le côté, C son milieu, on a

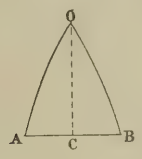
$$ACO = 90°,$$

$$\cos AC = \frac{\cos AOC + \cos OAC \cos OCA}{\sin OAC \sin OCA} = \frac{\cos 36°}{\cos 30°} = \cos\frac{1}{2}d.$$

$$d = 41°48'40''.$$

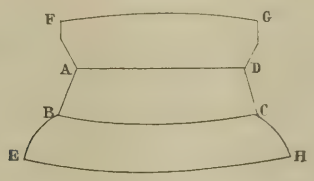
Il ne nous reste d'autres dispositions à examiner que celles où entrent des quadrilatères à côtés inégaux tel que ABCD (*fig.* 16); nous savons qu'il n'est pas possible de construire un pentagone sur chaque côté : il n'est pas possible non plus de placer un qua-

Fig. 15.



drilatère sur le petit côté AB, parce que le côté adjacent au point A, étant égal à AD, ou supérieur au complémentaire de AD, on ne pourrait construire sur ces deux-là ni quadrilatère ni pentagone. Il faut donc qu'un quadrilatère soit adjacent au premier le long de l'un des grands côtés tels que AD.

Fig. 16.



Examinons d'abord le cas où la figure ainsi formée ne serait pas entourée de toutes parts de pentagones, c'est-à-dire, serait encore adjacente à un troisième quadrilatère, ce qui ne pourrait avoir lieu que suivant un des grands côtés, tel que BC. Alors un seul pentagone devrait avoir pour côtés les arcs égaux FA, AB, BE et, par suite, ce ne pourrait être qu'un pentagone régulier; le côté qui suit AF étant encore égal, on ne pourrait placer sur FG qu'un quadrilatère, et ensuite il ne resterait de place que pour un cinquième. Ainsi :

La septième disposition est formée d'un pentagone régulier, de côté d, sur chaque côté duquel on a construit un quadrilatère; les côtés opposés de ceux-ci forment un second pentagone. Cette disposition, outre le côté d, contient son côté complémentaire d'. On

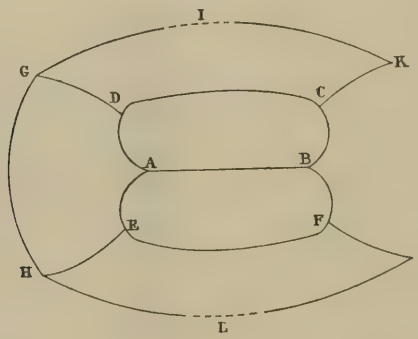
a donc

$$\cot\frac{1}{2}d' = 2\tang\frac{1}{2}d, \qquad l\cot\frac{1}{2}d' = 9^\circ 88' 30'' 638,$$

$$\frac{1}{2}d = 20^\circ 54' 20'', \qquad \frac{1}{2}d' = 52^\circ 37' 20'', \qquad d' = 105^\circ 14' 40''.$$

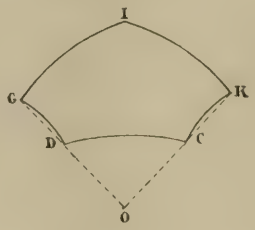
Enfin il nous reste à examiner le cas où la figure CDEF, formée de deux quadrilatères (*fig.* 17) serait de toutes parts adjacente à

Fig. 17.



des pentagones; dans ce cas le pentagone AGH est symétrique parce que AD = AE, le pentagone construit sur CBF lui est égal; donc CK = GD = EH; donc les pentagones AGH, ICD ont deux côtés non adjacents égaux; donc le côté compris ne peut être différent; il faut donc que GH = CD, et, par suite, IG = IK = AD; ainsi la question est ramenée à trouver une ligne CD = e (*fig.* 18)

Fig. 18.



telle qu'en construisant sur celle-ci un pentagone symétrique, le côté opposé GI se trouve être le complémentaire de CD. Mais, ce résultat obtenu, le pentagone construit sur AD et AE aura bien le

côté GH = CD, puis sur GI et GH on ne pourra placer qu'un quadrilatère égal aux deux premiers et il ne restera la place que d'un second autre égal. Ainsi :

La huitième disposition sera formée de deux figures composées chacune de deux quadrilatères CDEF et de deux pentagones LEF, ICD; elle contient trois côtés e, e', e'', en posant GI $= e'$, GD $= e''$. Par la formule du n° 6, on aura, en posant $\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}e = x$,

$$\cos e' = \frac{2x-1}{3};$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}e' = \frac{2-x}{1+x}, \qquad \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}e = \frac{3-x^2}{x^2},$$

et, par suite, pour que e et e' soient des côtés complémentaires, il faut que

$$\left(\frac{2-x}{1+x}\right)\left(\frac{3-x^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4},$$

ou

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 8 = 0.$$

Le premier membre étant > 0 pour $x = 1$ et < 0 pour $x = \sqrt{3}$, on voit qu'il y a une racine réelle négative, une autre positive $> \sqrt{3}$, qui toutes deux doivent être rejetées, et une comprise entre 1 et $\sqrt{3}$; en posant $1 - x = z$, on aura

$$z^3 - 7z - 2 = 0,$$

dans laquelle on doit chercher seulement la plus petite (numériquement) des deux racines négatives. Celles-ci se trouvent en posant $z = 2m\cos\frac{\varphi}{3}$, et disposant de m et φ de manière à identifier le résultat avec l'équation

$$4\cos^3\frac{1}{3}\varphi - 3\cos\frac{1}{3}\varphi - \cos\varphi = 0,$$

d'où résulte

$$m = \sqrt{\frac{r}{3}}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{m^3};$$

en prenant pour φ l'angle aigu donné par cette équation, on aura

pour les trois racines

$$z = 2m\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$z = 2m\cos\left(120^\circ + \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$z = 2m\cos\left(120^\circ - \frac{\varphi}{3}\right),$$

et c'est la dernière que nous devrons choisir; comme

$$\cos\frac{1}{2}e = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1-z}{\sqrt{3}},$$

il en résulte

$$\cos\frac{1}{2}e = \frac{2m\sin\left(30^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) + 1}{\sqrt{3}}.$$

Ensuite on aura

$$\cot\frac{1}{2}e' = 2\tang\frac{1}{2}e,$$

puis

$$e'' = \mathrm{OG} - \mathrm{OD},$$

$$\tang\mathrm{OG} = 2\cot\frac{1}{2}e' = 4\tang\frac{1}{2}e, \qquad \tang\mathrm{OD} = 2\tang\frac{1}{2}e,$$

ou

$$\mathrm{OD} = 90^\circ - \frac{1}{2}e'.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{OG} &= 74^\circ 25' 50'',\\
\mathrm{OD} &= 60^\circ 52' 20'',\\
e'' &= 13^\circ 33' 30'',\\
e &= 83^\circ 48' \ 0'',\\
e'' &= 58^\circ 15' 20''.
\end{aligned}$$

8. *Réduction des huit dispositions à trois seulement.* — Nous transcrivons ci-dessous le Tableau des côtés qui entrent dans les huit dispositions, puis celui de leurs valeurs numériques, puis celui de leurs suppléments, rangés par ordre de grandeur et désignés par les lettres majuscules correspondantes.

Première disposition...	a	Cinquième disposition..	b, c', c''
Deuxième » ...	a, a'	Sixième » ..	d
Troisième » ...	b	Septième » ..	d, d'
Quatrième » ...	b, b', b''	Huitième » ..	e, e', e''

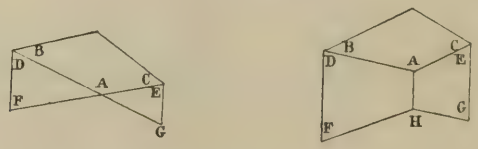
$a = 109°28'20''$,	$C' = 269°28'20''$,
$a' = 38°56'40''$,	$E'' = 166°26'30''$,
$b = 70°31'40''$,	$B'' = 158°34'20''$,
$b' = 52°27'0''$,	$C'' = 144°44'10''$,
$b'' = 21°25'40''$,	$A' = 141°3'20''$,
$c' = 10°31'40''$.	$D = 138°11'20''$,
$c'' = 35°15'50''$,	$B' = 127°33'0''$,
$d = 41°48'40''$,	$E' = 121°44'40''$,
$d' = 105°14'40''$,	$B = 109°28'20''$,
$e = 83°48'0''$,	$E = 96°12'0''$,
$e' = 58°15'20''$,	$D' = 74°45'20''$,
$e'' = 13°33'30''$,	$A = 70°31'40''$.

Remarquons maintenant que les polygones formant les diverses faces d'une cavité ne peuvent avoir d'autres angles plans que l'un des précédents a, a', etc.; quelle que soit la manière dont ils sont distribués dans un même polygone, il faut que la somme des angles extérieurs ou la somme d'un certain nombre des suppléments C', E'', etc., soit 360°; or, si l'on essaye d'ajouter un ou deux angles C' avec un ou plusieurs des suivants, on verra que cela est toujours impossible, d'où l'on conclura qu'aucun angle solide ne peut contenir l'angle C', ou que la cinquième disposition est impossible, et que, par suite, l'angle C'' qui n'entre que dans celle-là ne peut se rencontrer; en excluant donc C' et C'' de la série des douze suppléments, nous verrons de même qu'on ne peut faire 360° en associant un ou deux angles E'' avec d'autres et, par suite, que E, E', E'' et la huitième disposition doivent être exclus; on fera la même vérification pour B'', d'où résulte l'exclusion de B'' et B', puis pour D, d'où résulte celle de D et D'; de sorte que, en définitive, les trois premières dispositions se trouvent seules possibles; ou bien il ne peut y avoir d'autres angles solides que ceux qui sont formés de trois angles a, ou de quatre angles b, ou de deux a et a' opposés. Quant aux faces, elles ne pourront être qu'un triangle formé d'un angle a' et de deux angles b, ou un parallélogramme ou un trapèze formé de deux angles a et de deux angles b.

9. *Description du solide déterminé par les conditions précédentes.* — Parmi les faces appartenant à une même cavité se trouvera nécessairement un parallélogramme. En effet, s'il s'y trouve un triangle DAF (*fig.* 19), à celui-ci un autre est contigu par le

sommet A, et dans la face BAC adjacente l'angle $A = a$, et $B = C = b$; elle est donc bien un parallélogramme. S'il s'y trouve un trapèze AF, alors, dans la face adjacente suivant AH, aucun des angles A, H ne peut être $= a'$, parce que l'autre devrait être $= b$

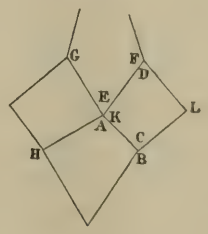
Fig. 19.



et, en même temps, serait adjacente à un angle $= a$, ce qui est impossible; par suite, ces deux angles sont $= a$, et la nouvelle face est un trapèze; par suite BAC est encore un parallélogramme. Nous voyons, de plus, que, dans deux faces trapèzes ou triangles ainsi placées, les côtés opposés DF, GE sont parallèles; c'est évident pour le trapèze, et, pour les triangles, cela résulte de ce que l'intersection de leurs deux plans fait des angles égaux avec AD et AF et, par suite, est parallèle à DF; elle l'est de même à GE.

Soit maintenant BH une face parallélogramme, où l'angle $A = b$ (*fig.* 20); trois autres se réunissent en ce point, mais celles qui

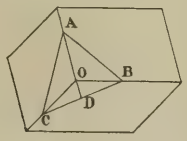
Fig. 20.



sont contiguës à AB, AH ne peuvent être toutes deux des triangles ou des trapèzes, car, pour la première par exemple, comme $B = a$, on aurait, ou $C = a'$ et, par suite, $D = b$ (en supposant dans ce cas le point L coïncidant avec C), ou $C = a$, et, la face devant être un trapèze, il faudrait encore que $D = b$: donc on aurait $F = b$, et on trouverait de même $G = b$; la face GF aurait ainsi trois angles b, ce qui est impossible. Il existe donc au moins deux faces parallé-

logrammes adjacentes telles que AOC, BOC (*fig.* 21), et il est clair que, dans la troisième face AOB, l'angle O $= a$, et les deux adjacents $= b$; ainsi il existe au moins trois faces parallélogrammes assemblées en un même trièdre O formé de trois angles a. Avant

Fig. 21.



d'aller plus loin, cherchons les angles α, β, que forment soit les arêtes soit les faces avec le plan ABC, qui joint trois points des arêtes situés à une même distance de O. Prenons, par exemple, cette distance $= 1$. Nous aurons

$$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2OB.OC\cos a = \frac{8}{3}, \qquad \overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BD}^2 = \frac{1}{3};$$

puis, dans la projection de ces diverses lignes sur le plan ABC puis pour celui de la figure, nous aurons

$$OB = \cos\alpha, \qquad OD = \sqrt{\frac{1}{3}} - \cos\beta, \qquad OD = \frac{1}{2}OB, \qquad \overline{BC}^2 = 3\overline{OB}^2,$$

d'où

$$OB = \sqrt{\frac{8}{9}} = \cos\alpha, \qquad \cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

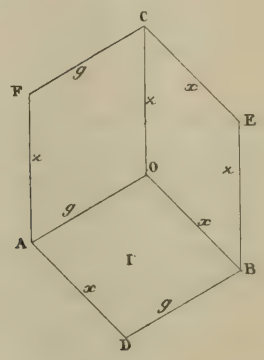
Revenons maintenant à la description du solide, et plaçons les trois parallélogrammes OAB, OAC, OBC, de façon que l'intersection commune des plans bissecteurs des dièdres OA, OB, OC soit verticale, le point O étant censé au-dessus, et regardant le plan de la figure comme horizontal.

Nommons x, y, z les longueurs des projections des trois arêtes, il est clair que celles des trois faces ont pour contour un hexagone : donc les côtés opposés sont égaux et ont pour valeur x, y, z tandis que tous les angles sont de 120°.

Soit que les faces contiguës suivant AD, BD (*fig.* 22) soient des trapèzes, ou des triangles, ou des parallélogrammes, nous savons que les arêtes partant de A, B, et opposées à OA, OB, sont

parallèles; d'ailleurs, à cause de la forme symétrique des angles solides A, B, ces arêtes doivent être contenues dans les plans bissecteurs des dièdres OA, OB; donc elles sont parallèles à l'intersection de ces plans, ou verticales; ainsi les plans des deux nouvelles faces sont verticaux, et l'on en peut dire autant des six faces adjacentes aux trois que représente la figure; les arêtes partant de six

Fig. 22.



points A, B, C, D, E, F sont donc toutes verticales; désignons par les mêmes lettres accentuées leurs extrémités inférieures. Si la face AA′D est un triangle ou un trapèze, nous savons qu'il en est de même de BB′D, les angles adjacents à BB′ étant $= b$; donc il en sera de même de BB′E, etc., et par suite des six faces, puis, les angles solides A′ et A étant de même espèce que B′ et B, la face A′D′B′ ne pourra être qu'un parallélogramme; et en nommant O′ son angle opposé, l'arête A′O′ étant comprise dans le plan bissecteur du dièdre AA′, lequel est vertical, se projettera sur AO; B′O′ sur BO, et par suite O′ sur O; en raisonnant de même pour les autres faces, on voit que ce sont trois parallélogrammes ayant même projection que les trois faces supérieures et qui ferment la cavité. Nous n'avons pas besoin de discerner le cas où se trouvent des triangles ou des trapèzes; nous pouvons supposer que ces derniers existent seuls, et si la face ADA′, par exemple, est un triangle, ou que D′ coïncide avec D, nous pouvons regarder ce cas comme rentrant dans le précédent, la longueur de DD′ étant infiniment petite.

Supposons maintenant que la face AA′D soit un parallélogramme, alors les angles A et A′ sont de nature opposée : donc il en est de même de D et D′, etc., et les six faces sont parallélogrammes. Au point A′ une troisième seulement leur est adjacente, et, en nommant O′ son angle opposé à A′, on verra de même que O′D′, O′F′ se projettent sur la figure, suivant les bissectrices des angles D et F, de sorte que O′DAF est un parallélogramme, et, O′D étant égal et parallèle à BE, on en conclut que O′E le sera à BD, ou sera $= x$, et bissectrice de l'angle E, les faces nouvelles sont ainsi trois parallélogrammes dont la projection a le même contour apparent que les trois supérieures; mais les arêtes OA, etc., sont remplacées par les bissectrices des angles D, E, F. Nous disons que le solide que nous venons de décrire est de première espèce, et celui où entrent des trapèzes de la seconde espèce. Dans tous les cas, nommons h la différence de hauteur des points O, O′. L'abaissement du point A au-dessous de O est $x \operatorname{tang} \lambda$, ou $\frac{x}{2\sqrt{2}}$, ceux de B, D sont de même $\frac{y}{2\sqrt{2}}$, $\frac{x+y}{2\sqrt{2}}$; puis, si le solide est de première espèce, la hauteur de A′ au-dessus de O′ est de même $\frac{y+z}{2\sqrt{2}}$, et par suite l'arête $AA' = h - \frac{x+y+z}{2\sqrt{2}}$, ou bien, en posant $x+y+z=p$, toutes les arêtes verticales sont $h - \frac{p}{2\sqrt{2}}$.

Si le solide est de seconde espèce, les différences de niveau de O et A, O′ et A′ sont les mêmes, comme aussi celles de O et D, O′ et D′; d'où l'on déduit aisément, pour la longueur des arêtes longues telles que AA′,

$$h - \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad h - \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad h - \frac{z}{\sqrt{2}},$$

et pour celles des arêtes courtes telles que DD′,

$$h - \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad h - \frac{y+z}{\sqrt{2}}, \quad h - \frac{x+z}{\sqrt{2}}.$$

Il est évident que, si l'on donne quatre lignes quelconques x, y, z, h, on peut sur ces quatre lignes construire la figure précédente, et par suite le solide, soit qu'on le veuille de première ou de se-

conde espèce, pourvu que les valeurs précédentes des arêtes ne soient pas négatives.

Cherchons maintenant le volume V et la surface S du solide. Pour cela comparons-le à un prisme hexagonal ayant même projection, mais prolongé jusqu'aux plans horizontaux menés par O, O′. Pour le volume nous devrons retrancher du prisme, en premier lieu, la portion projetée sur OADB, et qui a pour mesure cette projection xy sur 120° multipliée par l'abaissement du point I, centre de la face, au-dessous du point O, c'est-à-dire par $\frac{x+y}{4\sqrt{2}}$ ou $\frac{p-z}{4\sqrt{2}}$ ce qui donne

$$\frac{(pxy - xyz)\sqrt{3}}{8\sqrt{2}};$$

en ajoutant les solides placés sur les deux autres faces, et posant $xy + xz + yz = q$, nous aurons en tout

$$\frac{(pq - 3xyz)\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}.$$

Le volume à retrancher à la partie inférieure étant le même, nous aurons en tout

$$V = \frac{hq\sqrt{3}}{2} + \frac{(pq - 3xyz)\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Quant à la surface, nous devons retrancher d'abord de la surface convexe du prisme, ou $2ph$, les deux trapèzes compris entre les arêtes BD, CF et le plan supérieur, c'est-à-dire le produit de $\frac{1}{2}x$ par la somme des abaissements des points B, D, C, F, au-dessous du point O, ou par

$$\frac{y}{2\sqrt{2}} + \frac{x+y}{2\sqrt{2}} + \frac{z}{2\sqrt{2}} + \frac{x+z}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{\sqrt{2}}.$$

En y joignant les quatre autres trapèzes supérieurs, nous aurons en tout $\frac{p^2}{2\sqrt{2}}$, et les six trapèzes à retrancher en bas ont la même somme; quant aux faces non verticales, la projection des trois supérieures étant $\frac{q\sqrt{3}}{2}$, leur surface est $\frac{q\sqrt{3}}{2\cos\beta}$ ou $\frac{3q}{2\sqrt{2}}$; les trois

inférieures ont la même surface, d'où résulte

$$S = 2ph - \frac{p^2}{\sqrt{2}} + \frac{3q}{\sqrt{2}}.$$

10. *Détermination complète de la forme du solide.* — La cavité dont nous venons de trouver la forme ne peut être isolée, d'autres lui sont adjacentes de toutes parts. Si elle est de seconde espèce, il est aisé de voir que le milieu des six arêtes verticales et celui de OO′ sont dans un même plan horizontal. Une autre cavité contiguë à la première suivant un trapèze aura aussi six arêtes verticales, et pour celle-là le milieu de OO′ sera à la même hauteur que pour la première. En raisonnant de même pour les cavités suivantes, on voit qu'une cavité de seconde espèce ne peut que faire partie d'une couche ou assise horizontale, qui se projetterait en un assemblage d'hexagones remplissant complètement le contour extérieur de l'assemblage, et sur chacun desquels est placée une seule cavité. De plus, le milieu de toutes celles-ci serait au même niveau.

De là résulte que, dans un assemblage de cavités, considéré comme indéfini, il ne peut se trouver nulle part deux trapèzes tels que les bases parallèles des premières et celles des secondes soient non parallèles entre elles; car, pour les deux assises auxquelles ces faces appartiendraient, le plan que nous avons considéré comme horizontal ne serait pas le même; ces deux plans se couperaient, et il devrait arriver pour les cavités communes à ces deux assises, que des faces parallélogrammes seraient adjacentes à des trapèzes des cavités voisines. Ainsi donc, dans l'assemblage total, ou bien il ne se trouvera que des cavités de première espèce, ou bien, s'il s'en trouve de la seconde, celles-ci formeront des assises parallèles, soit qu'elles soient contiguës ou séparées par des cavités de première espèce.

Dans tous les cas, il est clair que des solides tels que nous les avons décrits peuvent être aisément assemblés ainsi; mais il est clair que, pour un solide isolé, il y a certains rapports de grandeur entre les lignes x, y, z, h dont il dépend, et qui rendent la surface minima pour un même volume. Il est clair aussi que, si nous arrivons pour ce minimum à une forme déterminée, et telle

qu'on puisse assembler une infinité de solides semblables, cette forme devra être celle de nos cavités.

Nous allons voir d'abord que, si x, y, z sont différents, on peut toujours modifier la forme du solide, de manière qu'ils aient une même valeur r et que la surface soit diminuée; en effet, choisissons cette valeur r de manière que la quantité q reste la même, de sorte que $q = 3r^2$; donc nommons p' ce que devient p, de sorte que $p' = 3r$; on aura

$$p > p';$$

en effet

$$\begin{aligned} p^2 - p'^2 &= p^2 - qr^2 \\ &= p^2 - 3q = (x+y+z)^2 - 3(xy+xz+yz) \\ &= \frac{(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2}{z} > 0. \end{aligned}$$

De plus, la somme des quantités xy, xz, yz, n'ayant pas changé tandis qu'elles sont devenues égales, leur produit $x^2y^2z^2$ et, par suite, xyz n'a pu qu'augmenter.

Enfin choisissons le solide nouveau de même espèce que l'ancien, et prenons sa hauteur h' telle que l'on ait

$$h' - \frac{p'}{2\sqrt{2}} = h - \frac{p}{2\sqrt{2}}.$$

Ce nouveau solide sera toujours possible, car, s'il est de première espèce, il suffit pour cela que l'on ait $h' > \frac{p}{2\sqrt{2}}$, et, comme on a déjà $h > \frac{p'}{2\sqrt{2}}$, cette condition est bien satisfaite; s'il est de seconde espèce, ses arêtes verticales n'ont que deux valeurs $h' - \frac{r}{\sqrt{2}}$ et $h' - r\sqrt{2}$. Il suffit donc que l'on ait $h' > r\sqrt{2}$; or, en désignant par z la plus petite des lignes x, y, z, on a

$$3z < x + y + z,$$

ou

$$z < \frac{p}{3}, \qquad x + y = p - z > \frac{2p}{3};$$

puis nous savons que $h > \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, donc

$$h' - \frac{p'}{2\sqrt{2}} = h - \frac{p}{2\sqrt{2}} > \frac{2p}{3\sqrt{2}} - \frac{p}{2\sqrt{2}} = \frac{p}{6\sqrt{2}} > \frac{p'}{6\sqrt{2}},$$

ou

$$h' - \frac{3r}{2\sqrt{2}} > \frac{r}{2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad h' > r\sqrt{2}.$$

Maintenant nous avons trouvé

$$V = \left(h - \frac{p}{2\sqrt{2}}\right)\frac{q\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}xyz,$$

$$S = 2\left(h - \frac{p}{2\sqrt{2}}\right)p + \frac{3q}{\sqrt{2}};$$

et puisque, par la substitution du second solide au premier, q et $h - \frac{p}{2\sqrt{2}}$ restent les mêmes, tandis que p diminue et que xyz augmente, il est clair que S diminue et V augmente; puis, en faisant décroître dans le même rapport toutes les dimensions du solide jusqu'à ce que le volume soit redevenu le même, la surface sera encore diminuée.

Supposant maintenant $x = y = z = r$, nous aurons

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(hr^2 - \frac{r^3}{\sqrt{2}}\right), \qquad S = 6hr.$$

Faisons maintenant varier r et h de manière que le volume ne change pas ou que $hr^2 - \frac{r^3}{\sqrt{2}} = k$, k étant une constante, et supposant toutefois $h > r\sqrt{2}$ ou $\frac{3r}{2\sqrt{2}}$ pour que le solide soit possible, nous aurons

$$S = b\left(\frac{k}{r} + \frac{r^2}{\sqrt{2}}\right), \qquad \frac{dS}{dr} = b\left(\frac{r^3\sqrt{2} - k}{r^2}\right).$$

Ainsi S est minimum lorsque

$$r^3 = \frac{k}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\frac{h}{r} = \frac{k\sqrt{2} + r^3}{r^3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

et cette valeur satisfait bien à la condition

$$h > r\sqrt{2} > \frac{3r}{2\sqrt{2}};$$

ainsi le solide, soit de première, soit de seconde espèce est possible.

En donnant à la figure la même disposition que précédemment, la vraie longueur d'une arête partant d'un sommet est $\frac{r}{\cos\alpha} = \frac{3r}{2\sqrt{2}}$; c'est aussi la longueur d'une arête verticale pour la première espèce : ainsi toutes les faces de celles-ci sont des losanges. L'abaissement des extrémités des trois arêtes partant de ce sommet au-dessous de O est $\frac{r}{2\sqrt{2}}$, celui des points diamétralement opposés à O dans les trois faces parallélogrammes est $\frac{r}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{1}{3}h$, d'où l'on conclura aisément le tracé des projections horizontale et verticale du solide dans la position précédente.

Examinons spécialement la première espèce, dont les faces sont douze losanges égaux. Si nous considérons en particulier les longues diagonales des quatre faces qui se réunissent en un même point O, elles forment une pyramide régulière dont la base ABCD est elle-même formée de quatre diagonales et est par suite un carré; la même pyramide se répétant au-dessous de la figure, nous voyons que les douze grandes diagonales forment les douze arêtes d'un tétraèdre régulier. On voit, dans la même figure, que les diagonales courtes des quatre mêmes faces forment aussi un carré, et par suite les trois diagonales qui se réunissent en un même point sont à angle droit, d'où l'on conclut aisément que les douze diagonales courtes des faces sont les douze arêtes d'un cube. Le solide est donc formé d'un cube sur chaque face duquel, comme base, on aurait placé une pyramide régulière ayant les plans des faces à 45° avec la base, de sorte que deux faces triangulaires de ces pyramides, qui sont contiguës à une même arête du cube, sont dans un même plan et se réunissent pour former un losange.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GILBERT (Ph.). — Cours de Mécanique analytique. Partie élémentaire. 3e édition. 1 vol. in-8°; IX-526 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; Bruxelles, Société belge de librairie; 1891.

Nous sommes heureux d'annoncer la troisième édition du Cours de Mécanique de M. Ph. Gilbert; l'auteur y a apporté maintes améliorations de détail et y a introduit des développements assez considérables, qui, primitivement, devaient trouver place dans un second volume; sans doute, on peut regretter que l'auteur ne prévoie « pas le moment où il lui sera permis de rédiger ce volume complémentaire »; mais l'excuse de M. Gilbert (s'il en avait besoin) se trouverait assurément dans le soin même qu'il apporte à ses publications, et d'ailleurs la grande importance des matières qu'il a cru devoir faire entrer dans cette nouvelle édition justifie entièrement leur introduction dans un Cours élémentaire.

L'étude du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe a été développée dans le sens des recherches de M. Darboux (Notes de la *Mécanique* de Despeyrous). L'auteur y a décrit le mécanisme qu'a fait construire M. G. Kœnigs pour réaliser ce mouvement. Signalons aussi le soin avec lequel a été étudié le gyroscope de Foucault.

Le Chapitre sur les équations générales de la Mécanique a été complété par l'introduction des théorèmes fondamentaux de Jacobi, d'Hamilton et de Poisson.

Dans l'exposition de l'Hydrodynamique, M. Gilbert a fait entrer les propositions essentielles relatives au mouvement des *vortex*.

Enfin les dernières pages du Livre sont consacrées à la théorie de l'attraction et du potentiel, soit que la masse attirante soit contenue dans un volume, soit qu'elle soit distribuée sur une surface. Cette étude est dirigée dans le sens de la Physique mathématique; on y remarquera, en particulier, la façon dont sont traités les relations entre le potentiel d'une masse à trois dimensions et le potentiel d'une couche superficielle, et les théorèmes de Gauss sur la répartition de la matière attirante sur une surface, d'après

des conditions imposées à son potentiel. L'étude de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point est faite d'après la méthode de Gauss.

ÉMILE MATHIEU. — THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES, 2e Partie. 1 vol. in-4°; IV-184 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890.

Il y a quelques mois, nous avons rendu compte, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, de la première Partie du Traité d'élasticité de M. É. Mathieu; nous souhaitions, en terminant ce compte rendu, que la seconde Partie ne se fît pas trop longtemps attendre; nos souhaits ont été réalisés; il nous est donné aujourd'hui de résumer les principaux résultats contenus dans ce second Volume qui, bien plus que le premier, porte la trace des recherches personnelles de l'auteur.

Le premier Chapitre est intitulé *ondes sonores et vibrations des tiges*. L'auteur y expose d'abord les intégrations d'équations aux dérivées partielles d'où se déduit l'expression de la vitesse du son dans les différents milieux.

On sait que les diverses variables (potentiel des vitesses, composantes de la vitesse, dilatation cubique) que l'on a à considérer dans l'étude des petits mouvements des fluides vérifient une même équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

D'Alembert, puis Lagrange avaient déjà montré comment on pouvait intégrer cette équation dans le cas où φ dépend seulement d'une coordonnée, c'est-à-dire dans le cas où le son se propage par ondes planes; Euler avait ensuite montré comment à ce cas se ramenait celui où le son se propage par ondes sphériques; mais c'est un des beaux titres de gloire de Poisson d'avoir trouvé l'intégrale générale de cette équation et d'en avoir déduit les lois de la propagation du son dans un milieu indéfini.

Les trois composantes de la vitesse dans un corps solide isotrope sont déterminées par trois équations aux dérivées partielles simultanées du second ordre; s'appuyant sur l'intégration générale de

l'équation des petits mouvements dans les fluides, Poisson est parvenu à intégrer d'une manière générale l'équation des petits mouvements des corps isotropes. De cette intégration, il a déduit une conséquence capitale : tout petit mouvement qui se propage dans un solide isotrope se décompose en deux autres : l'un n'entraîne ni contraction ni dilatation du milieu; l'autre n'est accompagné d'aucun mouvement tourbillonnaire; ces deux mouvements se propagent avec des vitesses différentes.

Ce partage d'un petit mouvement en deux autres se propageant avec des vitesses différentes, Poisson l'a mis en évidence dans les cordes, dans les membranes, dans les corps élastiques; c'est l'une des lois les plus importantes de la Mécanique physique et l'une des plus grandes découvertes de l'illustre géomètre qui a fait faire tant de progrès à cette branche de la science; cependant la plupart des Traités de Physique semblent l'ignorer et parlent de la vitesse du son dans les solides comme s'il n'y en avait qu'une.

C'est par l'exposé de ces théories que débute le livre de M. É. Mathieu.

Le premier Chapitre continue par une étude très approfondie des diverses espèces de mouvements vibratoires d'une tige droite et d'une plaque plane. On remarquera particulièrement, dans cette dernière partie du Chapitre, l'étude de la propagation des diverses espèces de mouvements vibratoires dans une tige et dans une plaque; puis la discussion, d'une part par la méthode de Poisson, d'autre part, par la méthode de G. Kirchhoff, du mouvement vibratoire d'une tige cylindrique à section circulaire.

Au Chapitre suivant, M. É. Mathieu expose l'*équilibre d'élasticité et le mouvement vibratoire d'une lame courbe*. L'équilibre d'élasticité de la lame est, après l'équilibre des fils, le premier problème d'élasticité qui ait été mis en équation. C'est Jean Bernoulli qui a, le premier, posé les conditions de cet équilibre. Depuis, un grand nombre de géomètres se sont occupés de ce même problème, et M. É. Mathieu l'a traité avec de grands développements, dans un Mémoire inséré au LIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

M. É. Mathieu en reprend l'exposé très détaillé dans le Livre dont nous rendons compte. Il applique les principes posés au problème intéressant de la déformation d'une voûte cylindrique

en métal chargée de la même manière tout le long d'une même génératrice, mais d'une manière variable d'une génératrice à l'autre.

En 1882, dans le Mémoire inséré au LIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* dont nous avons déjà fait mention, M. É. Mathieu a donné une théorie complète du *mouvement vibratoire des cloches*, c'est-à-dire des lames de révolution dont l'épaisseur varie d'une manière quelconque le long d'un méridien; la formule de ce méridien est elle-même quelconque. L'exposé de ce beau problème fait l'objet du IXe Chapitre du Livre de M. É. Mathieu.

Il serait difficile de résumer ici ce Chapitre: bornons-nous à indiquer quelques-uns des principaux résultats qui y sont obtenus.

Le mouvement de chacun des points d'une cloche qui vibre se décompose, dans tous les cas possibles, en un déplacement normal à la surface de la cloche et en un déplacement tangentiel.

On peut toujours s'arranger pour que le mouvement de chaque point de la cloche ait lieu dans le plan tangent à la cloche; c'est ce qui arrive lorsqu'on met la cloche en branle en en frottant le bord, comme on le fait si aisément sur un verre à pied en cristal. Dans ce cas, chacun des points de la cloche se meut sur le parallèle qui passe par ce point. Ce mouvement, M. É. Mathieu l'étudie d'une manière complète.

Peut-on faire vibrer une cloche d'une manière différente, et, cependant, de telle sorte que le mouvement de chaque point ait encore lieu dans le plan tangent à la cloche? Cela ne se peut, comme le montre M. É. Mathieu, que pour une cloche sphérique ayant en tout point la même épaisseur. Le mouvement le plus général d'une semblable cloche est étudié jusqu'à ses derniers détails dans le Chapitre que nous analysons.

Le dernier Chapitre de l'Ouvrage est consacré à l'*équilibre d'élasticité d'un prisme rectangle.*

Lamé, qui n'aimait pas les solutions approchées dont on se contente dans beaucoup d'applications de la théorie de l'élasticité, recherchait curieusement les cas où l'on sait intégrer d'une manière entièrement rigoureuse les équations de l'élasticité. Ces cas ne sont pas très nombreux; ils l'étaient encore moins du temps de

Lamé, alors que de Saint-Venant n'avait pas donné son admirable méthode pour intégrer les problèmes relatifs à la flexion et à la torsion des prismes.

Lamé aurait désiré que l'on pût donner la solution rigoureuse du problème de l'élasticité dans un cas moins particulier que ceux que l'on avait traités jusque-là. Le problème qui le préoccupait était l'équilibre d'élasticité d'un parallélépipède rectangle soumis, sur ses six faces, à des pressions quelconques.

Mais c'est en vain qu'il chercha longtemps à résoudre ce problème; en vain également que, de 1846 à 1858, il le fit proposer comme sujet de prix à l'Académie des Sciences.

En 1881, dans le XLIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* M. É. Mathieu aborda à son tour ce problème et, sans en obtenir la solution générale, il parvint cependant à le résoudre dans un cas particulier assez étendu. Il a encore généralisé cette solution dans le Livre dont nous rendons compte, en sorte que le dernier Chapitre de ce Livre est consacré à l'intégration des équations de l'élasticité dans le cas particulier suivant :

« Un prisme droit à base rectangulaire a ses deux bases appuyées contre deux murs parallèles et fixes; des pressions normales données sont exercées sur les quatre faces latérales de ce prisme. De plus, les pressions sont les mêmes sur une même face, tout le long d'une ligne parallèle aux arêtes latérales. »

Tel est le beau problème dont M. É. Mathieu a donné la solution complète, poussée jusqu'aux valeurs numériques.

En résumé, les deux parties du Livre de M. É. Mathieu forment le Traité d'élasticité le plus largement conçu que l'on possède jusqu'ici. Par la netteté du plan, par l'uniformité et la généralité des méthodes, il nous semble surpasser de beaucoup le Traité de Clebsch, dont il conserve d'ailleurs toutes les qualités. Ajoutons que l'impression si claire que MM. Gauthier-Villars lui ont consacrée n'est pas sans quelque importance dans un Livre où se manipulent des formules aussi compliquées. Ces deux Volumes ne forment certes pas la moins remarquable des parties dans l'œuvre considérable entreprise par M. É. Mathieu.

Pourquoi faut-il que cette œuvre, entreprise et continuée avec tant d'activité, demeure inachevée! La théorie de l'élasticité des corps solides appelait, comme suite naturelle, une *Théorie de*

l'élasticité de l'éther, où fût exposée l'enchaînement des lois de l'Optique, conformément aux principes posés par Fresnel, et développés avec une unité et une harmonie admirables par F.-E. Neumann, Mac Cullagh, Green, Lamé et G. Kirchhoff. Au moment où M. É. Mathieu commençait la rédaction de ce Traité, la mort est venu le ravir et il a eu la douleur d'abandonner son Livre trop peu avancé pour qu'il soit possible de le publier.

Tous ceux qui s'intéressent à la Physique mathématique regretteront vivement que le savant professeur de la Faculté de Nancy n'ait pas assez vécu pour achever son œuvre. Mais, toute découronnée qu'elle est, cette œuvre suffit à rendre témoignage de l'activité intellectuelle et de l'habileté analytique de son auteur; elle suffira aussi à ramener l'attention des mathématiciens et des physiciens sur cet ensemble de théories si belles, et pourtant si délaissées, où leurs recherches se rencontrent et s'unissent.

P. Duhem.

MÉLANGES.

LES AUTOGRAPHES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE;

Par M. Paul TANNERY.

TROISIÈME ARTICLE.

La Lettre inédite de novembre 1629 à Mersenne.

La plus ancienne Lettre inédite de Descartes à Mersenne, que renferme le Ms. fr. n. a. 5160 de la Nationale (f° 48), est particulièrement intéressante au point de vue scientifique.

La date en est facile à déterminer à huit jours près, car il est aisé de reconnaître que celle à laquelle, ainsi que nous le verrons, se réfère Descartes comme écrite un mois auparavant est la première connue de lui à Mersenne, savoir celle du 8 octobre 1629 (Clerselier, II, 112; Cousin, VI, p. 53). Notre lettre inédite est

donc soit du 5, soit du 12 novembre (lundi étant le jour du courrier d'Amsterdam pour la France).

Rappelons qu'au commencement de juillet 1629, Gassendi avait communiqué à deux amis de Descartes à Amsterdam, Waessenaer et Reneri, une description du phénomène de la parhélie d'après une observation faite près de Rome à Frascati; il y joignit l'explication qu'il donnait de ce phénomène. Reneri demanda aussitôt à Descartes, alors à Franeker, qu'elle serait sa théorie à ce sujet. Rentré à Amsterdam, Descartes, dans une Lettre perdue, pria Mersenne de lui adresser, à titre de contrôle, une description de la parhélie que le Minime possédait de son côté. En lui accusant réception de cette description, le 8 octobre, il lui annonce qu'il avait l'intention de développer ses idées dans un petit Traité, dont le cadre, tel qu'il l'expose, correspond à celui de l'Essai sur les *Météores*, qu'il publia en 1637 avec le *Discours de la Méthode*, la *Dioptrique* et la *Géométrie*. Il songeait déjà à l'impression qu'il voulait faire faire à Paris. Dans la Lettre de novembre, le programme auquel il devait finalement revenir est abandonné pour un autre plus vaste; Descartes vient de concevoir le plan de ce fameux *Traité du monde*, que la condamnation de Galilée lui fit délaisser et peut-être même détruire en partie.

Voici en effet le début de la Lettre [1] :

Monsieur et Révérend Père,

« Je suis bien marri de la peine que je vous ai donnée de m'envoyer ce phénomène, car il est tout semblable à celui que j'avois vu; je ne laisse pas de vous en avoir très-grande obligation et encore plus de l'offre que vous me faites de faire imprimer ce petit Traité que j'ai dessein d'écrire. Mais je vous dirai qu'il ne sera pas prêt de plus d'un an, car, depuis le temps que je vous avois écrit il y a un mois, je n'ai rien fait du tout qu'en tracer l'argument et, au lieu d'expliquer un phénomène seulement, je me suis résolu d'expliquer tous les phénomènes de la nature,

---

[1] J'adopte, pour la plus grande commodité du lecteur, l'orthographe du dernier siècle. Au reste, le texte complet des autographes inédits sera publié cette année avec l'orthographe de Descartes, dans l'*Archiv für Geschichte der Philosophie* (Berlin, Reimer).

c'est-à-dire toute la Physique, et le dessein que j'ai me contente plus qu'aucun autre que j'aie jamais eu, car je pense avoir trouvé un moyen pour exposer toutes mes pensées, en sorte qu'elles satisferont à quelques-uns et que les autres n'auront pas occasion d'y contredire. »

Ce qui suit se rapporte au passage ci-après, quelque peu obscur, de la lettre du 8 octobre.

« De diviser les cercles en 27 et 29, cela se peut mécaniquement, mais non point géométriquement. Il est vrai qu'il se peut en 27 par le moyen d'un cylindre, encore que peu de gens en puissent trouver le moyen, mais non pas en 29, et si l'on m'en veut envoyer la démonstration, j'ose vous promettre de faire voir que cela n'est pas exact. »

La lettre de novembre prouve que, par cette division géométrique du cercle en 27 au moyen d'un cylindre, Descartes entend une trisection répétée dans laquelle interviendrait une section cylindrique, c'est-à-dire une ellipse.

« L'invention de M. Gaudey [1] est très bonne et très exacte en pratique : toutefois, afin que vous ne pensiez pas que je me fusse mépris de vous mander que cela ne pouvoit être géométrique, je vous dirai que ce n'est pas le cylindre qui est cause de l'effet comme vous m'aviez fait entendre, et qu'il n'y fait pas plus que le cercle ou la ligne droite, mais que le tout dépend de la ligne hélice que vous ne m'aviez point nommée et qui n'est pas plus une ligne reçue en Géométrie que celle qu'on appelle *quadratricem*, pource qu'elle sert à quarrer le cercle et même à diviser l'angle en toutes sortes de parties égales, aussi bien que celle-ci, et à beaucoup d'autres usages que vous pourrez voir dans les Éléments d'Euclide commentés par Clavius. Car, encore qu'on puisse trouver une infinité de points par où passent l'hélice et la quadratrice, toutefois on ne peut trouver géométriquement aucun des

---

[1] Le nom, ainsi écrit très lisiblement par Descartes, est évidemment celui qui revient, sous la forme *Gandais*, dans l'édition de ses Lettres par Clerselier (II, 97, à Mersenne, du 9 février 1639). On voit qu'il avait fait une invention ayant quelque rapport avec nos machines à diviser.

points qui sont nécessaires pour les effets désirés tant de l'une que de l'autre, et on ne les peut tracer toutes entières que par la rencontre de deux mouvements qui ne dépendent point l'un de l'autre, ou bien l'hélice, par le moyen d'un filet, car, tournant un filet de biais autour du cylindre, il décrit justement cette ligne-là; mais on peut, avec le même filet, quarrer le cercle, si bien que cela ne nous donne rien de nouveau en Géométrie. Je ne laisse pas d'estimer bien fort l'invention de M. Gaudey et ne crois pas qu'il s'en puisse trouver de meilleure pour le même effet. »

La suite de notre lettre inédite est beaucoup plus importante que ce qui précède pour l'histoire des idées de Descartes en Mécanique.

Mersenne avait demandé à Descartes quelle relation existait entre la longueur d'un pendule et la durée de ses oscillations. Descartes répondit le 8 octobre, en supposant un mouvement dans le vide.

« Si la corde est longue d'un pied et qu'il faille au poids un moment pour passer de C jusqu'à B (du point le plus élevé au plus bas), la corde étant longue de 2 pieds, il lui faudra $\frac{4}{3}$ de moment seulement; si la corde est de 4 pieds, $\frac{16}{9}$ de moment; si de 8 pieds, $\frac{64}{27}$; si de 16 pieds, $\frac{256}{81}$; et ainsi à l'infini. »

Dans sa Lettre postérieure du 18 décembre 1629 (Clerselier, II, 105), Descartes suppose, pour la chute des corps, une relation tout à fait analogue entre les temps et l'espace parcouru.

« D'où il suit certainement que, si vous laissiez tomber une boule dans un espace tout à fait vide de 50 pieds de haut, de quelque matière qu'elle puisse être, elle emploierait justement trois fois autant de temps à descendre les 25 premiers pieds que les 25 derniers. Mais, dans l'air, c'est tout autre chose. »

Le raisonnement qui précède, se référant de fait à celui de notre lettre inédite de novembre, est d'ailleurs trop succinct pour avoir attiré l'attention. La plupart des historiens de Descartes ont donc simplement vu, dans ces passages, des énoncés qu'ils ont confondus avec celui des lois de Galilée, quoiqu'ils en diffèrent essentiellement; ils y étaient, à vrai dire, comme autorisés par

Descartes lui-même qui, le 14 août 1634 (Clerselier, II, 77), écrivait à Mersenne au sujet des *Massimi Sistemi* de Galilée, imprimés en 1632 :

« Je veux pourtant bien avouer que j'ai rencontré en son livre quelques-unes de mes pensées, comme, entre autres, deux que je crois vous avoir écrites ; à savoir que l'espace que parcourent les corps pesants qui descendent, sont l'un à l'autre comme les quarrés du temps qu'ils emploient à descendre ; comme si une balle emploie 3 moments à descendre depuis A jusques à B, qu'elle n'en emploiera qu'un à continuer de B jusques à C, ce que je disois avec beaucoup de restriction ; car, en effet, il n'est jamais entièrement vrai, comme il pense le démontrer. La seconde est que les tours et retours d'une même corde se font tous à peu près en pareil temps, encore qu'ils puissent être beaucoup plus grands les uns que les autres. »

Descartes avait évidemment lu bien superficiellement le *Dialogue* de Galilée pour identifier la relation établie par l'illustre Pisan avec celle que lui-même proposait à Mersenne cinq ans auparavant ([1]). Cette dernière suppose en effet que, si l'espace e est une fonction f du temps t, on a constamment,

$$f(4t) = 2f(3t).$$

Si l'on détermine $f(t)$ par cette condition, on arrive à la relation

$$e = k\,t^{\frac{L_2}{L_4 - L_3}}$$

L'exposant de t est environ 2,41

Cette inadvertance assez singulière ne peut s'expliquer que par cette circonstance que, dès 1634, Descartes avait abandonné la considération des mouvements dans le vide, qui lui avait servi autrefois de point de départ. Désormais il croyait que, dans le vide absolu, il n'y aurait pas de pesanteur ; les raisonnements de Galilée lui semblaient donc d'autant plus manquer de fondement qu'il en avait fait autrefois de plus ou moins analogues,

([1]) D'après Galilée, pour deux temps égaux consécutifs, les espaces parcourus sont dans le rapport de 1 à 3 ; d'après l'énoncé de Descartes, pour deux espaces égaux parcourus consécutivement, les temps sont dans le rapport de 3 à 1.

maintenant sans valeur à ses yeux. La loi de Galilée ne lui parut dès lors jamais contenir une vérité théorique, mais seulement une approximation empirique, acceptable tant que la vitesse restait modérée, singulièrement fausse pour les grandes vitesses. C'est à ce point de vue qu'il se place dans le reste de sa correspondance postérieure, notamment dans l'examen des *Discorsi* de 1638 (II, 91), où il répète d'ailleurs, toujours à tort, que l'opinion de Galilée a été la sienne autrefois.

« Il suppose que la vitesse des poids qui descendent s'augmente toujours également, ce que j'ai cru autrefois comme lui, mais je crois maintenant savoir par démonstration qu'il n'est pas vrai. »

Descartes ne semble pas, au reste, depuis 1634, avoir cherché à exprimer mathématiquement la loi de la chute des corps. La résistance du milieu, qu'il lui aurait fallu faire intervenir, compliquait évidemment trop le problème et il manquait de données suffisantes pour l'aborder.

La lettre inédite de novembre 1629 nous donne, au contraire, une tentative pour résoudre *a priori* la question de la loi de la chute des graves dans le vide.

Si, comme nous le savons déjà, cette tentative aboutit à un résultat erroné, elle en est d'autant plus intéressante à examiner que Descartes, comme il l'affirme, avait admis le point de départ théorique de Galilée, sans aucunement connaître les travaux de ce dernier.

Remarquons en effet qu'en 1629 ni Mersenne ni Descartes n'en avaient le moindre soupçon. Il n'y a aucun motif pour révoquer en doute ce que dit Descartes en 1638 (Clerselier, II, 91), qu'il n'a jamais vu Galilée, qu'il n'a eu aucune communication avec lui. Quant à Mersenne, il est aisé de voir qu'en 1629, s'il discute avec Descartes d'autres opinions en Mécanique, ce sont celles d'Isaac Beeckman, qui paraît avoir soulevé, avec le Minime, les questions sur lesquelles fut consulté notre grand philosophe; or ces opinions étaient en partie empruntées à Descartes et en tout cas essentiellement différentes de celles de Galilée.

Enfin il est certain que la tentative de Descartes pour déter-

miner *a priori* la loi de la chute des corps doit être très antérieure aux interrogations de Mersenne ([1]).

Voyons donc comment il s'exprime dans la lettre inédite :

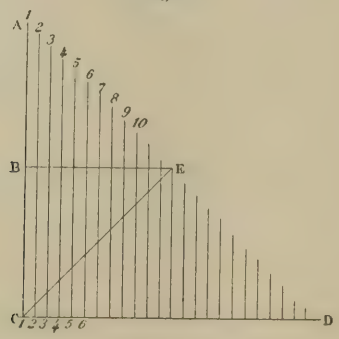
« Pour ce que vous me demandez, sur quel fondement j'ai pris le calcul du temps que le poids emploie à descendre, étant attaché à une corde de 2, 4, 8 et 16 pieds, encore que je le doive mettre en ma Physique, je ne veux pas vous faire attendre jusques-là et je tâcherai de l'expliquer.

» Premièrement, je suppose que le mouvement qui est une fois imprimé en quelque corps y demeure perpétuellement, s'il n'en est ôté par quelque autre cause, c'est-à-dire que ([2]) ce qui, dans le vide, a une fois commencé à se mouvoir, continue à se mouvoir toujours avec une égale vitesse. »

Nous voyons là énoncer d'une façon très nette le principe de l'inertie, auquel Descartes est au reste demeuré fidèle toute sa vie.

« Supposez donc qu'un poids, étant en A (*fig.* 1) soit poussé par sa

Fig. 1.



gravité vers C; je dis que si, aussitôt qu'il a commencé à se mouvoir, sa gravité l'abandonnait, il n'en continueroit pas moins son même

([1]) *Lettres de Descartes* (Clerselier, II, 105, à Mersenne du 18 décembre 1629, p. 483). « Il (Beeckman) suppose... que, dans le vide, la vitesse du mouvement est continuellement augmentée, selon la proportion que j'ai marquée ci-dessus et que je lui ai expliquée il y a dix ans; car j'en trouve la remarque dès ce temps là dans mes recueils. »

([2]) A partir de là, la Lettre est en latin. Descartes copie sans aucun doute une rédaction antérieure. Je traduis pour la commodité du lecteur.

mouvement jusques à ce qu'il parvienne en C. Mais alors il ne descendroit ni plus lentement ni plus rapidement de A à B que de B à C. Or, comme il n'en est pas ainsi, mais qu'il a une gravité qui le pousse en bas et qui à chaque moment ajoute de nouvelles forces à celle qu'il a pour descendre, il en résulte qu'il parcourra beaucoup plus vite l'espace BC que l'espace AB; en effet, dans le second parcours, il retient tout l'élan avec lequel il se mouvoit dans l'espace AB et de plus il en reçoit un nouveau par la gravité qui le pousse à chaque moment de nouveau.

» Quant à la proportion suivant laquelle augmente cette vitesse, on la peut montrer dans le triangle ABCDE, dont la première ligne marque la force de la vitesse imprimée au premier moment; la seconde ligne, la force imprimée au second moment; la troisième, celle donnée au troisième et ainsi de suite.

» De là résulte le triangle ACD qui représente l'augmentation de la vitesse du mouvement dans la descente du poids depuis A jusques à C, et ABE qui représente l'augmentation de la vitesse dans la première moitié de l'espace parcouru par le poids, et le trapèze BCDE qui représente l'augmentation de la vitesse dans la seconde moitié de l'espace parcouru par le poids, savoir BC. Or le trapèze BCDE est évidemment trois fois plus grand que le triangle ABE, donc le poids descendra trois fois plus vite de B à C que de A à B; c'est-à-dire que, s'il descend en trois moments de A à B, il n'en emploiera qu'un seul pour descendre de B à C.

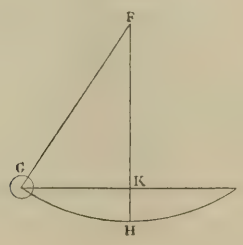
» Ainsi en quatre moments, il fera deux fois plus de chemin qu'en trois; et par conséquent en douze moments, deux fois plus qu'en neuf; et en seize moments, quatre fois plus qu'en neuf et ainsi de suite.

» Maintenant, ce qui a été démontré pour la descente du poids en ligne droite s'applique au mouvement du poids suspendu à une corde; en effet, dans son mouvement, en tant qu'à la force par laquelle il se meut, il ne faut pas considérer l'arc GH (*fig.* 2) suivant laquelle il se meut, mais bien le sinus (verse) KH en raison duquel il descend; c'est donc la même chose que s'il descendait en ligne droite de K à H, au moins pour ce qui concerne le mouvement dépendant de la gravité. Mais, si vous considérez l'empêchement de l'air, il est autre et beaucoup plus fort dans le

mouvement oblique de G à H que dans le direct de K à H [1].

» Or pour cet empêchement de l'air, duquel vous me demandez la justesse, je tiens qu'il est impossible d'y répondre et *sub scientiam non cadit* [2], car, s'il est chaud, s'il est froid, s'il est sec, s'il est humide, s'il est clair, s'il est nébuleux et mille autres circonstances peuvent changer l'empêchement de l'air et, outre cela, si le poids est de plomb, de fer ou de bois, s'il est rond, s'il est quarré ou d'autre figure, et mille autres choses peuvent changer cette proportion ce qui se peut dire généralement de toutes les questions où vous parlez de l'empêchement de l'air. »

Fig. 2.



Si l'on considère l'ensemble du passage ci-dessus, il est aisé de voir que Descartes a touché à la solution du problème qu'il s'était posé; il est moins facile de reconnaître par suite de quelle erreur il l'a manquée, mais on peut dire que, de même qu'à partir de 1634, ses conceptions sur la Physique lui ont fait à tort abandonner dans cette question une des règles de sa méthode, la division des difficultés, et par suite la considération des mouvements dans le vide, de même dans la démonstration ci-dessus, qui doit remonter, d'après ses dires, avant 1619, il n'a pas observé son autre règle encore plus importante, de n'accepter que des notions parfaitement claires et distinctes.

Le paralogisme commis est d'autant plus intéressant à constater qu'il vient d'un homme qui, sans parler de ses traits de génie postérieurs, sait déjà ramener le problème du pendule à celui de la chute des graves, et qui, en même temps est en possession,

---

(1) Le reste du texte est en français dans l'original.

(2) Il n'est pas objet de science.

bien avant toute publication de Cavalieri, du principe de la méthode des indivisibles.

Cette dernière circonstance est particulièrement remarquable, précisément parce que Descartes n'a rien publié dans cet ordre d'idées ; mais on ne peut plus douter que le principe en question ne lui ait singulièrement été utile pour la solution de nombreux problèmes mathématiques traités dans sa correspondance.

Il est vrai que, dans le cas particulier dont il s'agit ici, le principe est appliqué d'une façon qui dénote une connaissance insuffisante des conditions de son emploi. D'après les prémisses de Descartes (et ainsi qu'il le reconnaît nettement dans la lettre suivante, Clerselier, II, 105, p. 482), la vitesse (ce qu'il appelle *vis celeritatis*) doit varier proportionnellement au temps. Or, d'une part il prend, dans la construction, l'espace, non le temps comme variable ; de l'autre, il prend le résultat de la sommation des vitesses pour une vitesse (*augmentum celeritatis*). Cette dernière ne peut dès lors suivre la loi de proportionnalité et elle ne représente d'ailleurs aucune notion mathématique claire et distincte. La suite du raisonnement ne représente dès lors aucune conclusion logique.

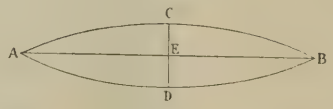
Je crois inutile d'insister davantage sur cette question, malgré tout l'intérêt qu'elle offre. J'arrive à la fin de la lettre inédite après avoir rappelé que, dans sa lettre du 8 octobre, Descartes admettait que les oscillations d'un pendule dans le vide seraient toujours d'égale amplitude. « Mais », disait-il, « ce qui fait cesser le mouvement d'une corde de luth que l'on a pincée est tout à fait différent de ce qui fait cesser celui d'une corde qui est pendue en un plancher, en sorte que j'estime qu'une corde de luth pourroit peut-être cesser plus tôt de se mouvoir dans le vide que dans l'air. »

La fin de la lettre inédite développe les idées de Descartes à ce sujet :

« Pour les tours et retours d'une corde tirée d'un pouce hors de la ligne droite, je dis qu'*in vacuo* (dans le vide) ils diminuent en proportion géométrique, c'est-à-dire si CD (*fig.* 3) est 4 la première fois, et au retour 2, au troisième il ne sera qu'un. S'il est 9 la première fois et 6 au second coup, il sera 4 au troisième

et ainsi de suite. Or, en suite de cela, la vitesse de son mouvement diminuera toujours à même proportion, si bien qu'il lui faudra autant de temps pour chacune des dernières allées et venues que pour les premières (¹). Je dis *in vacuo,* mais *in aere,* je crois qu'elles seront un peu plus tardives à la fin qu'au commencement, pource que, le mouvement ayant moins de force, il ne surmonte pas l'empêchement de l'air si aisément. Toutefois de ceci je ne suis pas assuré et peut-être aussi que l'air au contraire lui aide à

Fig. 3.



la fin, pource que le mouvement est circulaire. Mais vous le pouvez expérimenter avec l'oreille en examinant si le son d'une corde ainsi tirée est plus aigu ou plus grave à la fin qu'au commencement; car, s'il est plus grave, c'est à dire que l'air la retarde; s'il est plus aigu, c'est que l'air la fait mouvoir plus vite.

» Et ensuite les questions que vous me proposez, combien une corde doit être plus longue et de quel poids elle doit être tendue, afin que ces tours et retours soient deux..... »

L'original s'arrête ici, en bas de la page, le feuillet suivant faisant défaut. La suite de la correspondance connue ne nous apprend pas si Descartes avait ou non cherché à résoudre la dernière question posée par son correspondant. (*A suivre.*)

SOPHIE DE KOWALEVSKI (²);

PAR Mme E. DE KERBEDZ.

Parmi les vrais deuils qui viennent de frapper le monde scientifique, la mort de Mme Sophie de Kowalevski, née Corvin-Krukowski, professeur d'Analyse supérieure à l'Université de Stock-

(¹) On voit que Descartes admet l'isochronisme des oscillations.

(²) Extrait du tome V (1891) des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.*

holm, décédée le 10 février dernier, occupe certainement l'une des premières places. A peine âgée de 37 ans, dans la plénitude de son développement intellectuel, arrivée à l'entière maîtrise de ses facultés, Sophie de Kowalevski n'avait guère eu, dans sa trop brève carrière, que le temps de donner la mesure de sa valeur. Les œuvres qu'elle laisse, quoique très peu nombreuses, suffisent pour lui assurer une place marquante parmi les plus éminents analystes de notre époque. Ce qu'elle a produit laisse entrevoir ce qu'elle aurait pu donner, et ne peut qu'augmenter le regret douloureux de tous ceux qui, désireux du progrès de la Science, jugent avec impartialité et voient clairement la lacune si grande que cette mort inattendue vient de créer. D'ailleurs, il serait inutile d'insister sur les mérites de Sophie de Kowalevski, sur ses connaissances et ses facultés exceptionnelles, si bien connus dans le monde savant, et qui, déjà en 1888, recevaient de la part de l'Académie des Sciences de Paris la sanction d'un témoignage éclatant.

Ayant concouru pour le prix Bordin sur la question suivante : *Perfectionner en un point important la théorie du mouvement d'un corps solide,* Sophie de Kowalevski l'emportait par son *Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps.* Et, dans la séance publique annuelle du lundi 24 décembre 1888, le Président de l'Académie, M. Janssen, en proclamant les vainqueurs des prix décernés, s'exprimait en ces termes :

« Messieurs, parmi les couronnes que nous allons donner, il en est une des plus belles et des plus difficiles à obtenir qui sera posée sur un front féminin.

» Mme de Kowalevski a remporté cette année le prix Bordin [1]. Nos Confrères de la section de Géométrie, après examen du Mémoire présenté au concours, ont reconnu dans ce travail, non seulement la preuve d'un savoir étendu et profond, mais encore la marque d'un grand esprit d'invention.

» Mme de Kowalevski est professeur à l'Université de Stockholm,

---

[1] Non pas le Grand Prix des Sciences mathématiques, comme il a été imprimé, par erreur, dans les *Comptes rendus*, t. CVII (2e semestre 1888), p. 1036.

où elle forme de savants élèves. Elle descend du roi de Hongrie, Mathias Corvin, qui non seulement fut un grand guerrier, mais qui fut encore un protecteur éclairé des Sciences, des Lettres et des Arts.

» Ce sont évidemment ces dernières qualités dont Mme de Kowalevski a tenu à hériter de son illustre ancêtre, et nous l'en félicitons. »

Voici encore le rapport de la Commission du prix Bordin pour l'année 1888 (Commissaires : MM. Maurice Lévy, Phillips, Resal, Sarrau, Darboux rapporteur), dont les conclusions furent adoptées par l'Académie :

« L'Académie avait proposé pour sujet du prix Bordin à décerner en 1888 la question suivante :

» *Perfectionner en un point important la théorie du mouvement d'un corps solide.*

» A l'unanimité, la Commission décerne le prix au Mémoire inscrit sous le n° 2 et portant la devise : *Dis ce que tu sais, fais ce que dois, advienne que pourra.* Ce remarquable travail contient la découverte d'un cas nouveau, dans lequel on peut intégrer les équations différentielles du mouvement d'un corps pesant, fixé par un de ses points. L'auteur ne s'est pas contenté d'ajouter ainsi un résultat du plus haut intérêt à ceux qui nous ont été transmis sur ce sujet par Euler et par Lagrange : il a fait de la découverte que nous lui devons une étude approfondie dans laquelle sont employées toutes les ressources de la théorie moderne des fonctions. Les propriétés des fonctions Θ à deux variables indépendantes permettent de donner la solution complète sous la forme la plus précise et la plus élégante ; et l'on a ainsi un nouvel et mémorable exemple d'un problème de Mécanique dans lequel interviennent ces fonctions transcendantes, dont les applications avaient été bornées jusqu'ici à l'Analyse pure ou à la Géométrie.

» La Commission émet le vœu que le Mémoire couronné soit imprimé dans le Recueil des *Mémoires des Savants étrangers* (1). »

---

(1) *Comptes rendus*, t. CVII, p. 1042. Sur ce Mémoire *voir* aussi : PICARD, *Revue annuelle d'Analyse* (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 1re année, n° 22, 30 novembre 1890, et les *Rendiconti*, t. V, 1891, p. 80-90). § II.

Il serait téméraire d'entreprendre, dès à présent, une notice complète des travaux mathématiques de Sophie de Kowalevski. Ses futurs biographes n'hésiteront pas à ranger cette femme, vraiment supérieure, à côté de ses illustres devancières, telles que la marquise du Châtelet (1), Mlle Agnesi (2) et Mlle Sophie Germain (3), dont s'honorent les Sciences mathématiques. En attendant, qu'il nous soit permis de venir payer notre tribut de regrets et d'admiration à la mémoire de Sophie de Kowalevski en empruntant à une courte notice nécrologique de l'un de nos plus illustres géomètres contemporains, M. L. Kronecker, professeur à l'Université de Berlin, ces quelques mots, écrits dix jours après la mort de la savante mathématicienne russe :

« Sophie de Kowalevski (d'après ses dernières cartes de visite Sonja Kovalevski) réunissait, à un talent hors ligne pour les spéculations mathématiques générales et les connaissances techniques, nécessaires pour les recherches spéciales, une persévérance infati-

---

(1) Émilie Le Tonnelier de Breteuil, marquise du Châtelet, née à Paris en 1706, morte en ladite ville en 1749. Elle fut liée avec les hommes les plus distingués de son temps, principalement avec Clairaut, qui l'eut pour disciple, avec Saint-Lambert et avec Voltaire qui l'appelle dans ses vers la *docte Uranie*. On lui doit des *Institutions de Physique*, avec une *Analyse de la philosophie de Leibnitz* (1740), une traduction des *Principes* de Newton, publiée par Clairaut (1756), avec son éloge par Voltaire.

(2) Maria Gaetana Agnesi, née à Milan le 16 mars 1718, morte en ladite ville le 9 mars 1799. Son père, professeur de Mathématiques à Milan, l'initia de bonne heure à l'étude des Sciences exactes. Elle y réussit si bien qu'en 1750 le pape Benoît XIV l'autorisa à remplacer son père dans son cours public. Elle a publié en latin des *Institutions analytiques*, qui ont été traduites par d'Anthelmy, sous les yeux de Bossut, et imprimées, avec des notes de ce dernier, sous ce titre : *Traités élémentaires du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (1775).

(3) Marie-Sophie Germain, née à Paris le 1er avril 1776, morte en ladite ville le 27 juin 1831. Elle avait développé ses heureuses dispositions pour les Mathématiques par l'étude des Ouvrages de Lagrange, de Legendre, de Gauss, de Fourier, et dans ses entretiens avec ces grands géomètres. Bien qu'elle ne connût pas personnellement Gauss, elle correspondait avec lui, sous le pseudonyme de Le Blanc, ancien élève de l'École Polytechnique. Dans la séance du 8 janvier 1816, l'Académie des Sciences de Paris lui décerna un grand prix sur une des questions de Physique mathématique les plus nouvelles et les plus ardues : la théorie des surfaces élastiques (Commissaires : Poisson, Laplace, Legendre, Poinsot, Biot). Mlle Sophie Germain fut plus profondément mathématicienne que la marquise du Châtelet et que Mlle Agnesi, et elle avait l'esprit philosophique de cette dernière. (*Voir* CHASLES, *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, Paris, 1870.)

gable. Elle avait toujours su rester femme et conserver, malgré une activité spéciale intense, un intérêt très vif pour toutes les choses de l'esprit. Cela lui fit gagner et captiver la sympathie générale de tous ceux même qui se trouvaient en dehors de son cercle d'action. L'histoire des Mathématiques parlera certainement d'elle comme de l'un des phénomènes le plus merveilleux et de l'une des plus rares investigatrices. Et, tandis que les ouvrages, peu nombreux, mais très importants, qu'elle nous laisse, feront durer sa mémoire dans le monde mathématique, le souvenir de sa remarquable et sympathique personnalité vivra toujours dans les cœurs de tous ceux qui ont eu le bonheur de la connaître [1]. »

Sophie de Kowalevski naquit à Moscou le $\frac{15}{27}$ décembre de l'année 1853. Son père, le général d'artillerie Basile Corvin-Krukowski, y était alors commandant de l'Arsenal. Il fut transféré dans une petite ville de la Russie occidentale et quitta bientôt après le service actif pour aller se retirer dans sa terre patrimoniale de Palibino, située dans le gouvernement de Vitebsk, district de Névél, où Sophie de Kowalevski passa son enfance et sa première jeunesse, jusqu'à l'âge de 15 ans. Elle y commença son éducation, d'abord sous la direction d'une gouvernante anglaise, ensuite, de 8 à 15 ans, sous celle d'un pédagogue remarquable, M. J. Malévitsch, dont le zèle éclairé et le dévouement infatigable ont exercé une influence décisive sur le développement rapide de ses brillantes facultés. Le père de Sophie de Kowalevski, homme intelligent et instruit, et sa mère, fille du général mathématicien Schubert, directeur du corps des topographes, et petite-fille de l'astronome du même nom, femme supérieurement cultivée, régentaient et contrôlaient la marche de ses études. Aussi il est probable que ce milieu intelligent et sérieux où elle a grandi, l'éducation rationnelle et soignée qu'elle a reçue, ne manquèrent pas de contribuer à l'éclosion générale, presque simultanée, des aptitudes vraiment exceptionnelles dont cette nature privilégiée était dotée. Voici pourquoi, dans l'œuvre de Sophie de Kowalevski nous trouvons, à côté de travaux mathématiques d'une très grande importance,

---

(1) *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, Bd. CVIII, Heft I (18 März 1891).

des ouvrages littéraires, publiés récemment, où l'illustre mathématicienne se révèle comme écrivain de premier ordre.

D'ailleurs ses capacités littéraires étaient si marquées, dès son enfance, que son professeur J. Malévitsch rêvait pour elle la gloire littéraire. Ce n'est que vers la quatorzième année que sa vocation pour les Sciences mathématiques se décida définitivement. Elle put la satisfaire et obtint de ses parents l'autorisation de venir étudier à Saint-Pétersbourg. Elle y fit la connaissance du jeune paléontologue de Kowalevski, qu'elle épousait, à peine âgée de 15 ans, en 1868, et partait avec lui, l'année suivante 1869, pour continuer ses études à l'étranger. Elle suivit d'abord, en 1869-1870, les cours de l'Université de Heidelberg, revint en Russie, puis retourna à l'étranger en 1871, à Berlin cette fois. Ici trouvant l'Université fermée aux femmes, elle étudia les Mathématiques sous la direction de M. Weierstrass, dont elle reçut, pendant quatre années consécutives, de 1871 à 1874, des leçons privées.

Au bout de cette période, en 1874, âgée de 21 ans, sans examen oral et sur seule présentation de thèse écrite, Sophie de Kowalevski obtenait le grade de docteur en philosophie et de maître ès arts à l'Université de Gœttingue ([1]). Depuis lors Sophie de Kowalevski continua chez elle ses recherches mathématiques, et ce n'est qu'après la mort de son mari, qui se suicida en 1883 à la suite de grands revers de fortune, qu'elle accepta, à l'Université de Stockholm, la chaire de Mathématiques supérieures (spécialement créée pour elle par les soins de M. Mittag-Leffler, qui obtint du gouvernement suédois les fonds nécessaires), à laquelle elle fut appelée en juin 1884, à la condition qu'elle ferait son cours en allemand la première année, en suédois les années suivantes. Elle le fit, avec beaucoup de succès, jusqu'au 6 février dernier, quand, ayant repris son cours après les vacances de Noël, elle tombait malade le soir même et succombait, au bout de quatre jours, le 10 février 1891, à une attaque de pleurésie foudroyante.

Depuis 1885, Sophie de Kowalevski faisait partie du comité de

---

([1]) Depuis la fondation de l'Université de Gœttingue (*Georgia augusta*), par le roi George II de Hanovre en 1737, ce titre n'a été conféré qu'à deux femmes, dont la première fut la fille de l'historien Schloezer, la savante Dorothée Schloezer, et la seconde est Sophie de Kowalevski.

rédaction des *Acta mathematica* de M. Mittag-Leffler. Dernièrement elle avait été nommée membre correspondant de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.

Liste des travaux de Sophie de Kowalevski (¹).

TRAVAUX MATHÉMATIQUES.

I. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Inaugural-Dissertation, 1874). 1875

Journal für die reine und angewandte Mathématik, t. LXXX, p. 1 (32 pages).

II. Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3ten Ranges auf elliptische Integrale. 1884

Acta mathematica, t. IV, p. 393 (22 pages).

III. Om ljusets fortplantning uti ett kristalliniskt medium. 1884

Ofversigt af svenska vetenskapsakademiens förhandlingar, t. XLI, p. 119 (3 pages).

IV. Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé. 1884

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. XCVIII, p. 356 (2 pages).

V. Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln (²). 1885

Acta mathematica, t. XI, p. 249 (56 pages).

VI. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe. 1885

Astronomische Nachrichten, t. CXI, p. 37 (12 pages).

(¹) Les années indiquées sont celles de la publication.

(²) Les pages 254-279 de ce travail contiennent un Mémoire inédit de M. Weierstrass : *Eine Integrationsmethode für lineare partielle Differentialgleichungen*. Les résultats contenus dans le Mémoire V ont été signalés préalablement dans les Notes III et IV (*voir* ENESTRÖM, *Table des matières des tomes I-X des Acta mathematica*).

VII. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (1). 1889

Acta mathematica, t. XII, p. 177 (56 pages).

VIII. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (2). 1890

Acta mathematica, t. XIV, p. 81 (13 pages).

IX. Sur un théorème de M. Bruns. 1890

Notes et Mémoires présentés à la conférence de Mathématiques de l'Université de Stockholm, t. I. — *Acta mathematica,* t. XV.

X. Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps (3). 1890

Recueil des Savants étrangers, t. XXX, p. 1 (66 pages).

TRAVAUX LITTÉRAIRES.

I. Réminiscences sur George Elliot (en russe). 1885

Rouskaïa Mysl (Pensée russe), juillet 1885.

II. Væ Victis. 1889

Nouvelle publiée en suédois dans le journal *Jul Almanach,* 1889.

III. Souvenirs d'enfance (en russe) (4). 1890

Vestnik Evropy (Messager de l'Europe), liv. 7 et 8, 1890.

---

(1) Ce Mémoire est un résumé du Mémoire X.

(2) Les Mémoires VII et VIII ont été récompensés d'une somme de 1500 couronnes (2115fr) par l'Académie des Sciences de Stockholm.

(3) Mémoire auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin, élevé de 3000fr à 5000fr en raison du service tout à fait extraordinaire rendu à la Physique mathématique par l'œuvre de Sophie de Kowalevski.

(4) Est une œuvre d'une grande portée esthétique, et mériterait, grâce à la profondeur de l'analyse psychologique, la fraîcheur du coloris, la vérité des descriptions, d'être rangée à côté de « L'enfance » et de « L'adolescence » de S. Tolstoï. Ces Mémoires, qui s'arrêtent à la quinzième année, date du mariage de Sophie de

IV. Systrarna Rajevsky (Sœurs Rajevsky). 1890

Les mêmes souvenirs d'enfance publiés sous forme de roman, en volume séparé, en suédois et en danois.

V. La famille des Vorontsoffs. 1890

Roman écrit en suédois sous le pseudonyme de Tanja Rajevsky, dont les premiers chapitres seulement ont paru dans les derniers numéros du journal suédois *Nordisk Tidskrift*.

VI. Lutte pour le bonheur. 1890

Sous ce titre, deux drames, basés sur deux données différentes, écrits en collaboration avec Mme A. C. Leffler.

Kowalevski, doivent être continués maintenant par son amie Mme A. C. Leffler (mariée à M. P. del Pezzo, duc de Cajanello, professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Naples) qui en a accepté le pieux héritage.

Nous y trouvons une anecdote assez caractéristique sur l'enfance de Sophie de Kowalevski qui mérite d'être rapportée :

Elle avait alors dix ans et demeurait dans la maison de campagne de son père. La maison eut besoin d'être réparée, et l'on fit venir de Saint-Pétersbourg des papiers de tenture. Mais il se trouva qu'il n'y en eut point pour la chambre des enfants, dont les murs furent recouverts avec le cours lithographié d'Ostrogradski sur l'Analyse mathématique, cours qui provenait des années d'étude de son père; et la petite Sophie, qui dévorait toutes les feuilles imprimées qui lui tombaient sous la main, au grand désespoir de sa gouvernante anglaise, passait son temps à lire ces dissertations mathématiques, mêlées d'incompréhensibles hiéroglyphes. « Il est assez étrange, dit-elle dans ses Mémoires, que, lorsque à seize ans je commençais l'étude du Calcul différentiel, mon professeur fut étonné de la rapidité avec laquelle je le compris, comme si j'avais une réminiscence d'avoir déjà connu ce qu'il me disait. La continuelle lecture des papiers collés sur les murs avait certainement laissé des traces inconscientes dans mon esprit d'enfant. »

Palerme, 11 avril 1891.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

APOLLONII PERGÆI QUÆ GRÆCE EXSTANT CUM COMMENTARIIS ANTIQUIS. — EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST I.-L. HEIBERG, DR. PHIL. — Vol. I. Leipzig, Teubner, 1891. XII-451 p. in-16.

Le savant danois, qui nous a déjà donné des éditions critiques d'Archimède et d'Euclide, a entrepris maintenant celle d'Apollonius. Elle doit comprendre deux Volumes : le premier, qui vient de paraître, renferme les trois premiers Livres des *Coniques;* le second contiendra le quatrième Livre, les fragments grecs des autres Ouvrages d'Apollonius, les lemmes de Pappus et les commentaires d'Eutocius. Quant aux écrits qui ne nous ont été conservés que par les Arabes, notamment les Livres V, VI, VII des *Coniques,* M. Heiberg a décliné la tâche de s'en occuper, mais il nous fait espérer qu'elle sera remplie à bref délai par un arabisant suffisamment compétent.

L'œuvre d'Apollonius, qui est le seul traité qui nous reste des Grecs sur les sections coniques, n'a pas été connue en Occident avant la traduction latine des quatre premiers Livres publiée, en 1537, par un noble vénitien, J.-B. Memmi. Cette traduction, pleine d'erreurs grossières, fut bientôt effacée par celle de Commandin (Bologne, 1566), qui servit aux géomètres du XVIIe siècle. Les trois Livres V à VII ne furent révélés qu'en 1661 (édition de Florence) par une traduction latine, accompagnée d'un commentaire de Borelli et faite par *Abraham Ecchellensis* sur la version arabe d'Aboul-Fath d'Ispahan.

Une seconde traduction, d'ailleurs presque inutilisable, parut huit ans après (Kiel, 1669) par les soins de Ravius, qui la fit sur une autre version arabe d'Abd-el-Melek de Chiraz.

Quant au texte grec des quatre premiers Livres, il n'avait été publié, avant la présente édition, qu'en 1710 (Oxford) par Halley; ce dernier ne fit d'ailleurs que terminer sous ce rapport un travail déjà commencé par Gregory et il se contenta de corriger la version de Commandin au lieu de la refondre. Mais, pour les Livres V à VII, après avoir, dit-on, appris l'arabe dans ce but, il travailla sur une version plus ancienne et plus complète, celle de

Thabith-ben-Corra. Il tenta enfin, d'après les lemmes de Pappus, une restitution du Livre VIII, qui est complètement perdu.

Cette édition d'Halley est aujourd'hui devenue très difficile à se procurer, et, à cet égard, celle de M. Heiberg mérite encore plus un favorable accueil de la part des mathématiciens que son Archimède ou son Euclide, d'autant que, pour ces derniers, il existe des traductions en langue moderne, tandis qu'elles font défaut pour Apollonius.

M. Heiberg a établi son texte sur un manuscrit du Vatican, gr. 206 du XIIe ou du XIIIe siècle. Les recherches qu'il a faites lui ont permis de démontrer que les autres manuscrits connus n'ont de valeur qu'autant qu'ils se rapprochent de ce type, et il suffit de comparer les premières pages de son texte avec celui de Halley pour reconnaître combien ce dernier était défectueux.

Mais, au lieu de m'arrêter sur ce point, je crois plus intéressant pour le lecteur de donner ici une traduction de la courte préface mise par Apollonius en tête du Livre I des *Coniques* et d'y ajouter quelques observations sur l'histoire de cette théorie dans l'antiquité.

« Apollonius a Eudème (1), salut.

» Si ta santé est bonne et si tout le reste va comme tu le désires, je te félicite; quant à nous, nous allons passablement. Je t'ai vu, pendant le temps que j'ai passé à Pergame avec toi, très désireux de prendre connaissance de nos travaux sur les coniques; je t'envoie donc le premier Livre après l'avoir corrigé; les autres suivront, lorsque nous en serons satisfaits; tu n'as pas, je pense, dû oublier ce que je t'avais dit : que j'ai fait ce traité sur la demande du géomètre Naucrate (2), à l'époque où il était venu à Alexandrie et partageait nos occupations; qu'ayant rédigé en tout huit Livres, nous lui en avons aussitôt donné communication, mais qu'étant pressés parce qu'il était sur le point de s'embar-

(1) Personnage d'ailleurs inconnu, que le roi Attale devait s'être attaché, à l'imitation de ce que faisaient les Ptolémées pour les savants du Musée d'Alexandrie.

(2) C'est ce géomètre dont les Arabes, par un anachronisme singulier, ont fait le père d'Euclide et qu'ils ont considéré comme le Tyrien dont parle Hypsiclès dans la préface du Livre XIV des *Éléments*.

quer, nous n'avons pu les perfectionner, qu'au contraire nous avions écrit tout ce qui se présentait à notre esprit, avec l'intention de revenir dessus plus tard. Nous publions donc ces Livres, maintenant que nous avons le temps, au fur et à mesure de leur correction. Mais, comme il se trouve que plusieurs de ceux qui sont en relations avec nous ont eu également communication du premier et du second Livre avant qu'ils eussent été retouchés, ne t'étonne pas si tu les rencontres avec d'autres rédactions.

» De ces huit Livres, les quatre premiers suivent une marche élémentaire; le premier renferme la génération des trois sections et des opposées ([1]), ainsi que leurs propriétés capitales, le tout exposé plus amplement et avec plus de généralité que dans les autres traités sur la matière. Le second Livre concerne les diamètres et les axes des sections, les asymptotes et d'autres questions d'un usage général ou indispensable pour les *limitations* ([2]); tu sauras par le premier Livre quelles sont les lignes que j'appelle *diamètres* et celles que j'appelle *axes* ([3]). Le troisième contient un grand nombre de théorèmes singuliers qui servent soit pour la synthèse des lieux solides ([4]), soit pour les limitations; la plupart et les plus beaux sont nouveaux; en les recherchant, nous avions conscience qu'Euclide n'avait pas effectué la synthèse du lieu à trois et quatre lignes, mais seulement celle au hasard d'une partie de ce lieu, et cela d'une façon assez malheureuse; c'est qu'il n'était pas possible de faire la synthèse complète, sans ce que nous avons trouvé de nouveau. Le quatrième Livre détermine en combien de manières les sections coniques peuvent se rencontrer entre elles et avec une circonférence de cercle et résout, en outre, d'autres questions, dont aucune n'a été traitée par ceux qui nous ont précédés, en combien de points une section conique ou une circonférence de cercle rencontre des sections opposées.

([1]) Apollonius considère encore comme des sections distinctes (qu'il appelle *opposées*) les deux branches d'une même hyperbole; mais c'est à lui surtout que l'on doit de les avoir considérées pour généraliser sans exception les théorèmes sur les coniques.

([2]) Détermination des conditions sous lesquelles un problème est possible.

([3]) Les définitions du premier Livre étaient nouvelles en tant qu'elles introduisaient la notion de diamètres et d'axes relatifs à des sections *opposées*.

([4]) Lieux géométriques du second degré.

» Les derniers Livres appartiennent à des théories plus recherchées; l'un traite, en effet, avec développement des minima et maxima, l'autre de l'égalité et de la similitude des sections coniques, le suivant de théorèmes de limitations, le dernier, enfin, de problèmes déterminés sur les coniques. Au reste, quand tous seront publiés, il sera loisible à ceux qui les étudieront de les apprécier selon ce qu'ils en jugeront. Salut. »

La mention d'Euclide et du lieu à trois et quatre droites, qui est faite dans cette préface, soulève des questions qui ont été en grande partie élucidées par Zeuthen (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum;* Kopenhagen, Köst und Sohn, 1886), mais que l'on ne peut encore considérer comme complètement résolues.

Je rappelle tout d'abord qu'avant Apollonius il existait, sur les coniques, deux Ouvrages considérables : l'un, en cinq Livres, des *Lieux solides,* composé par Aristée l'ancien, était le premier en date et il resta classique pendant toute l'antiquité; l'autre en quatre Livres, des *Coniques,* dû à Euclide, qui comprenait les éléments de la théorie, disparut au contraire devant les quatre premiers Livres d'Apollonius, conçus sans doute suivant le même plan, mais présentant une supériorité incontestable.

Aristée doit avoir, en général, procédé analytiquement; néanmoins, son Ouvrage faisait sans aucun doute connaître un certain nombre de propriétés des coniques qu'Euclide et Apollonius, les considérant comme complètement traitées, ne reprirent pas dans leur exposition. Je citerai, comme exemple notable, la propriété du foyer de la parabole, dont Apollonius ne fait aucune mention. Aristée avait sans aucun doute recherché le lieu des points à égale distance d'une droite et d'un point fixes et, l'ayant déterminé comme une parabole, il avait probablement aussi démontré que, pour toute courbe de ce genre, il y avait une droite et un point tels que chaque point de la parabole en fût également distant.

S'il eût traité de la sorte complètement tous les problèmes qu'il avait abordés, l'œuvre d'Euclide eût été évidemment inutile; mais il n'en était pas ainsi et, en général, la synthèse restait à faire. Les lacunes de la méthode analytique étaient, entre autres, particulièrement apparentes pour le lieu à quatre droites, qu'on

peut définir comme représenté par l'équation

$$AB - \lambda CD = 0,$$

où λ représente une constante et où l'on suppose que

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0$$

sont les équations de quatre droites données. Les anciens énonçaient le problème en disant que le rectangle des distances du lieu à deux des droites données devait être dans un rapport constant avec celui de ses distances aux deux autres droites.

Or Apollonius, qui reproche à Euclide de ne pas avoir fait la synthèse complète du lieu à quatre droites, ne l'a lui-même nullement abordée dans ses *Coniques*. Il a même donné si peu d'indications à ce sujet, qu'au XVIIe siècle, le problème, dont l'énoncé n'était connu que par Pappus, parut tellement ardu qu'en le résolvant analytiquement dans sa *Géométrie*, Descartes put se vanter d'avoir commencé là où Apollonius s'était arrêté.

L'étude du Livre III des *Coniques* permet toutefois de reconnaître que, d'une part, la lacune comblée par Apollonius dans les connaissances antérieures résultait de ce qu'avant lui chaque branche isolée d'hyperbole était considérée comme une section complète; que, d'un autre côté, il est facile de déduire immédiatement de ses propositions la solution du lieu à trois droites (cas où deux droites données, soit A et B, soit C et D, coïncident) et de fait cette solution, telle que l'indique M. Zeuthen est identique avec celle de Fermat [1] récemment retrouvée et qui, conçue tout à fait dans le goût ancien, est évidemment le fruit des méditations du grand géomètre sur les *Coniques* d'Apollonius.

M. Zeuthen a montré, d'autre part, qu'il est relativement facile de ramener le lieu à quatre droites au cas où le quadrilatère inscrit ABCD est un trapèze; il rattache cette réduction au seul porisme d'Euclide dont Pappus nous ait conservé l'énoncé complet, et il admet qu'elle pouvait déjà avoir été opérée par Aristée. Il a fait voir enfin que, dans les divers cas que présente le lieu aux quatre côtés d'un trapèze, la solution complète peut également se

---

[1] *Œuvres de Fermat*. Paris, Gauthier-Villars, 1891, p. 87 et suiv.

déduire, plus ou moins directement, de lemmes renfermés dans le Livre III d'Apollonius.

Il n'en reste pas moins surprenant, même en admettant qu'Apollonius ait tenu à n'introduire dans son exposition systématique des propriétés des coniques aucune recherche propre à faciliter la détermination directe d'un lieu, qu'il se soit également abstenu de démontrer qu'en général, pour toute conique et tout quadrilatère inscrit, il existe un rapport constant entre les rectangles des distances d'un point de la courbe aux côtés opposés du quadrilatère. Cette abstention paraîtra d'autant plus singulière que ce théorème était certainement au moins supposé vrai dès avant Apollonius, quoique, sans doute, la détermination du rapport pût être renvoyée, comme il résulterait des remarques de M. Zeuthen, aux théories dépendant des *Porismes* d'Euclide.

En tout cas, je ne puis mieux faire que de recommander, en général, l'Ouvrage précité de M. Zeuthen, à tous les mathématiciens qui peuvent désirer profiter de l'édition procurée par M. Heiberg pour se familiariser avec les méthodes d'Apollonius. La traduction latine que renferme cette édition et dans laquelle sont adoptées des notations suffisamment modernes est d'une lecture relativement aisée; mais, pour discerner l'ordre des idées et en retrouver la suite, un guide est nécessaire, et il n'en est point de meilleur que M. Zeuthen. PAUL TANNERY.

RESAL. — EXPOSITION DE LA THÉORIE DES SURFACES. 1 vol. in-8°, XIII-171 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891.

Ce petit Livre contient le développement des leçons sur la *Théorie des surfaces* que l'auteur a été amené à faire en enseignant la Mécanique; il complète ainsi, de ce côté, ce que le lecteur a pu déjà trouver tant dans le *Traité de Cinématique pure* que dans le *Traité de Mécanique générale* de M. Resal. Il comprend dix Chapitres et quatre Notes.

Les deux premiers Chapitres se rapportent aux propositions fondamentales de la théorie des courbes gauches et des surfaces :

formules de Serret-Frenet, théorème de Meusnier, étude des rayons de courbure principaux, etc.; un paragraphe est consacré à l'étude des faisceaux de droites et, en particulier, au théorème de Malus. Dans les Chapitres III et IV, M. Resal s'occupe des courbures et des lignes asymptotiques; on y trouvera, outre l'étude d'un certain nombre de surfaces simples (hélicoïde gauche, surfaces de révolution, surface canal, surface moulure, etc.), l'examen du nombre de lignes de courbure qui passent par un ombilic et des formules qui donnent l'expression de la courbure d'une ligne de courbure et d'une ligne asymptotique. Le Chapitre suivant est consacré aux lignes de plus grande pente. Dans le Chapitre VI, relatif aux lignes géodésiques, M. Resal a introduit d'importants extraits des Mémoires classiques de M. O. Bonnet (courbure géodésique des trajectoires orthogonales, équation des lignes géodésiques en coordonnées curvilignes, expression en coordonnées quelconques de la courbure géodésique d'une ligne, etc.). Dans le Chapitre VII, l'auteur établit d'une façon très simple les formules qui se rapportent à la torsion et à la différentielle de la courbure d'une ligne tracée sur une surface; il étudie, en particulier, la torsion des lignes asymptotiques. Deux Chapitres sont ensuite consacrés à la déformation des surfaces et à l'étude des surfaces applicables. Enfin, dans le dernier Chapitre, on trouvera l'étude du système de variables employées par M. Bonnet dans la théorie des surfaces, avec l'application aux lignes de courbure, lignes asymptotiques, lignes géodésiques, etc., et principalement à la détermination des surfaces minima.

Les Notes sont consacrées aux sujets suivants :

I. Sur la courbure et la torsion de la coordonnée d'une surface de révolution. II. Impossibilité de trouver sur une surface deux séries de lignes géodésiques qui se coupent à angle droit. III. Sur quelques propriétés, dues à M. Bonnet, des trajectoires orthogonales et des lignes géodésiques. IV. Sur l'intégration, par la méthode de Legendre, de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. J. T.

LES AUTOGRAPHES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE;

PAR M. PAUL TANNERY.

QUATRIÈME ARTICLE.

II.

La lettre du 4 mars 1641.

En suivant l'ordre des dates, la seconde pièce du MS. fr. n. a. 5160 de la Nationale qui contienne de l'inédit est la lettre autographe de Descartes à Mersenne du 4 mars 1641.

La plus grande partie de cette lettre constitue une réponse à une épître latine adressée par Hobbes à Mersenne, le 7 février 1641 (Clerselier, III, 31), et contenant des objections contre la théorie cartésienne de la réfraction. Cette partie a été imprimée dans les lettres de Descartes (Clerselier, III, 35); mais l'original contient en plus une dizaine de lignes au début et près de quatre pages à la fin qui doivent être substituées au dernier alinéa de quatre lignes donné par Clerselier.

Il convient de plus d'observer que le début français de la lettre imprimée est profondément modifié dans l'original et que celui-ci ne contient pas la version (p. 161 à 164 de Clerselier) de la réfutation en latin de l'épître de Hobbes. Mais je commencerai mon extrait à l'endroit où Descartes cesse de parler du philosophe anglais :

« Quoique M. de Roberval ne soit pas de ceux qui me favorisent, la vérité veut pourtant que je tienne son parti en ce qu'il dit d'un grand arc : à savoir que, si la flèche va aussi vite lorsqu'elle commence à en partir que lorsqu'elle commence à partir d'un moindre, elle ira plus loin. Mais notez que je dis *lorsqu'elle commence à partir*, car la corde du grand arc, poussant plus longtemps cette flèche que celle du petit, fera qu'elle ira plus vite avant qu'elle la quitte, si elle a été aussi vite au commencement,

et ensuite qu'elle ira plus loin. Mais, si on suppose que la flèche va également vite au moment qu'elle s'éloigne de la corde du grand arc que du petit, elle ne pourra aucunement aller plus loin; et ainsi vous avez eu, je crois, tous raison, mais il a considéré le moment auquel la flèche commence d'être poussée, et non celui auquel elle achève d'être poussée. Mais je ne vois point pourquoi il conclut de cela que *quod semel motum est sponte postea cessat moveri, etsi non impediatur* (1).

» Il est certain que la chute d'un fort grand poids aura bien plus de force, pour faire entrer un pieu en terre, que le mouvement cent fois plus vite d'un poids qui n'aurait que la centième partie de la pesanteur du premier, à cause qu'elle agira beaucoup plus longtemps (2). »

Suit un passage curieux sur l'opinion de Descartes relative à Fermat :

« Je voudrois bien que vous n'eussiez point envoyé de copie de ma Métaphysique (3) à M. Fermat et, si vous ne l'avez encore fait, je vous prie de vous en excuser sur ce que je vous ai prié très expressément de n'en envoyer aucune copie hors de Paris, et même à Paris de n'en mettre la copie entre les mains de personne qui ne vous promette de la rendre, comme en effet je vous en prie, afin de me retenir la liberté d'y changer ou ajouter tout ce que je jugerai à propos pendant qu'elle ne sera point imprimée. Et, entre nous, je tiens M. Fermat pour l'un des moins capables d'y faire de bonnes objections; je crois qu'il sait des Mathématiques, mais, en Philosophie, j'ai toujours remarqué qu'il raisonnoit mal. Et enfin, je vous ai envoyé cet écrit pour en avoir le jugement de Messieurs de la Sorbonne, et non pour m'arrêter à disputer contre tous les petits esprits qui se voudront mêler de me faire des objections. Toutefois, si quelque fier-à-bras s'en

---

(1) « Ce qui a été une fois mis en mouvement cesse ensuite de soi-même de se mouvoir, quand même il ne subirait aucun empêchement ». Roberval aurait donc nié le principe de l'inertie, admis par Descartes.

(2) La question paraît mal posée; en tout cas, il est évident que les lois qui régissent le choc des corps n'étaient pas encore soupçonnées.

(3) Il s'agit des *Méditations*, que Descartes faisait alors imprimer à Paris par les soins de Mersenne.

veut mêler, à la bonne heure; je ne refuserai pas de lui répondre, si l'on juge que ce qu'il proposera vaille la peine d'être imprimé. Pour ceux qui ont fait les premières ([1]), ils m'ont obligé et, s'il leur plaît de répartir à mes réponses, je dupliquerai aussi fort volontiers.... »

La lettre continue en parlant des objections d'Arnauld et de corrections à faire subir au texte des *Méditations*.

La fin concerne les essais de Florimond de Beaune pour tailler des verres de lunette suivant les idées de Descartes.

« Je fus si pressé de vous répondre lorsque j'ai reçu votre paquet, il y a quinze jours ([2]), que j'oubliai tout à fait la lettre de M. de Beaune que vous m'aviez envoyée. Je vous prie de l'assurer que je suis extrêmement son serviteur, et que je suis bien glorieux du témoignage qu'il rend de ma Géométrie, car je crois qu'il est en cela plus croyable lui seul, vu la preuve qu'il en donne par la solution de toute sorte de problèmes, que ne seroit un million de tels que ceux qui l'ont blâmée, vu qu'aucun d'eux n'y a rien entendu.

» Pour les lunettes, je m'étonne de la difficulté qu'il trouve pour le côté plat, car je crois que, si le convexe étoit aussi exactement taillé que la superficie plate de tous les miroirs, nous aurions des lunettes très excellentes; le tourneur qui avoit commencé ici ([3]) à y travailler n'en est pas venu à cela près, car il n'a pu tailler aucun verre qui ne parût à l'œil plus épais d'un côté que d'autre, ou qui n'eût deux centres et une infinité de cercles, et toutefois, il en a fait qui, tous troubles et mal taillés en cette sorte, faisoient autant que les lunettes ordinaires. Si je fusse allé en France, nous eussions peut-être fait ensemble quelque chose,

---

([1]) Descartes faisait imprimer, en même temps que les *Méditations*, six séries d'objections faites sur le manuscrit, et ses réponses. Les premières objections sont du belge Caterus (de Caters), alors prêtre catholique à Alcmaer. Celles d'Arnauld sont les quatrièmes.

([2]) Ceci montre que la lettre Clerselier, II, 53 = Cousin VIII, p. 491, doit être datée du 18 février 1641 et non du 28, comme l'a supposé l'annotateur anonyme de l'exemplaire de l'Institut.

([3]) *Comparer* la Lettre de Descartes à Ferrier (Clerselier, III, 102; Cousin VI, p. 45). — Ces essais doivent avoir été faits chez Pollot, ami de Descartes.

mais il est impossible par lettres, à cause que les petites difficultés ne se peuvent écrire [1]....

III.

Les trois questions d'avril 1643.

Les questions de Dynamique du genre de celles qui avaient amené entre Roberval et Mersenne la discussion sur laquelle Descartes fut consulté en 1641, ainsi que nous l'avons vu, continuèrent à s'agiter à Paris. Le MS. fr. n. a. 5160 de la Nationale nous fournit à cet égard un curieux témoignage dans la pièce suivante, qui n'est malheureusement qu'une copie où n'ont pas été indiqués les noms des deux signataires de l'original :

« Après avoir considéré que nous ne pouvons tomber d'accord des trois difficultés suivantes, quelque considération que nous ayons pu apporter, et après avoir gagé et convenu de bonne foi que nous nous tiendrions à ce qu'en diroit M. Descartes, nous les avons ici mises intelligiblement comme il suit :

» Savoir si deux missiles égaux en toutes choses, c'est-à-dire en matière, grandeur et figure, partant de même vitesse dans un même air, par une même ligne, doivent nécessairement aller aussi loin l'un que l'autre. Sur quoi l'un soutient qu'il se peut faire que l'un aille plus loin, comme il prétend, lorsque l'impression qu'on lui a donnée a été plus longtemps à s'imprimer, et qu'il arrive qu'un grand arc, pour avoir été bandé plus loin, quoiqu'avec moins de force, envoie la flèche beaucoup plus loin qu'un arc plus petit qui se bande néanmoins avec beaucoup plus de force.

» L'autre, qu'il est impossible que deux vitesses égales, de quelque part et par quelque impression qu'elles se puissent engendrer dans un même ou égal missile, allant par le même air et par la même ligne, c'est-à-dire à même élévation sur le plan horizontal, fassent des effets différents, c'est-à-dire que l'une des flèches aille plus loin que l'autre.

» La seconde, à savoir s'il est nécessaire que le corps qui imprime un mouvement à un autre corps se meuve aussi vite que celui auquel il imprime ce mouvement. Par exemple, soient les

---

[1] Descartes répète à peu près ici ce qu'il avait déjà écrit à Mersenne en janvier 1641 (Clerselier, II, 52).

deux boules A et B parfaitement dures, dont la plus grosse A roule sur un plan bien poli, et que la moindre B, étant de repos, soit rencontrée par la grosse A; ou bien que cette rencontre se fasse dans l'air libre.

» L'un dit qu'il est impossible que la grosse A, bien qu'elle fût cent fois plus grosse que B, donne à B plus de vitesse que celle avec laquelle elle roule, puisqu'elle ne peut donner ce qu'elle n'a pas. L'autre maintient que plusieurs observations montrent le contraire, et croit que cela arrive à cause que plusieurs parties d'une même vitesse épandues dans la grosse se ramassent dans la petite, et que, comme 2 et 2 font 4, 2 degrés et 2 degrés de vitesse de la plus grosse A mettent 4 degrés de vitesse dans la petite.

» La troisième difficulté est savoir si l'impression par laquelle on jette un missile périroit peu à peu, quoique l'air n'empêchât en aucune façon le missile et que la terre ne l'attirât point à soi. L'un soutient qu'il y a deux sortes de qualités, les unes qui ne périssent point, comme celle par laquelle la pierre va vers le centre et le cœur bat, les autres qui périssent, comme la chaleur produite dans l'eau et dans le fer par le feu, et que l'impression donnée aux missiles est de cette nature. L'autre, que le mouvement ou l'impression donnée au missile ne peut périr, quoiqu'elle soit *minimæ entitatis,* pour parler avec les philosophes, si quelque contraire ne lui ôte cette impression.

» Quoi qu'il en soit, nous nous en tiendrons à ce qu'en jugera M. Descartes, lequel nous prions d'en faire l'examen à son loisir. En foi de quoi nous mettons ici nos seings.

» Ce 4 avril 1643, à Paris. »

IV.

La lettre du 26 avril 1643.

Les réponses de Descartes à ces trois questions se trouvent imprimées assez exactement à la fin de la lettre Clerselier II, 116 (à partir de la page 553, ligne 5 en remontant), dont elles n'ont certainement pas fait partie [1].

---

[1] Le texte de cette lettre, mutilé dans les éditions de Clerselier et de Cousin, a été publié, d'après l'original, par Libri dans le *Journal des Savants* de septembre 1839. Elle est du 23 mars 1643, par conséquent antérieure aux questions.

Elles ont, au contraire, été envoyées à Mersenne en même temps que la lettre inédite suivante du 26 avril 1643 :

« Mon Révérend Père,

» Je vous remercie de ce que vous avez encore fait l'expérience de peser une lame de cuivre à mon occasion. Puisqu'elle ne se trouve point plus légère chaude que froide, et qu'une poire de cuivre se trouve plus légère, c'est une marque très assurée que cela vient de l'air enfermé dans la poire, lequel est pesant en dépit des péripatéticiens [1].

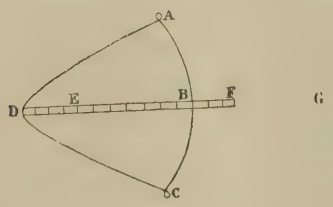
» Vous trouverez ma réponse à ce que vous demandez des arcs de bois et d'acier dans le papier de la gageure, où, si je ne me suis pas assez expliqué, je répéterai encore ici les deux raisons que j'y ai mises.

» L'une, que la flèche du grand arc étant plus grande et plus légère à proportion, elle ne descend pas si vite.

» L'autre, que, si on se servoit d'une flèche aussi légère en l'arc d'acier qu'en celui de bois, la grande force dont cette flèche seroit frappée feroit que le bout proche de la corde iroit plus vite que l'autre auquel l'air fait de la résistance.

» Soit l'arc AB (*fig.* 3), je dis que la corde pousse le bout de

Fig. 3.



la flèche D avec tant de vitesse que l'air qui est autour de F fait de la résistance et empêche que ce bout F ne s'avance si promptement vers G; de façon que, si cette flèche est de bois léger et poreux,

---

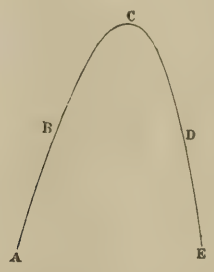
[1] Comparer *Lettres de Descartes*, Clerselier, II, 109, p. 513 dernier alinéa, du 7 décembre 1642, et p. 514, premier alinéa, où commence une lettre du 2 février 1643.

elle se raccourcit et, incontinent après qu'elle n'est plus touchée de la corde, elle se rallonge vers D, ce qui lui ôte beaucoup de sa vitesse. Mais une qui est de bois plus dur et plus solide, sort véritablement plus vite de l'arc d'acier que ne fait l'autre de l'arc de bois, et elle a aussi beaucoup plus de force à une médiocre distance, mais elle ne va pas plus loin, à cause qu'étant plus pesante, elle a plus d'inclination à descendre.

» Quand une flèche monte en l'air, elle va plus vite au commencement qu'à la fin, et, au contraire, en descendant elle va plus vite à la fin qu'au commencement; mais cette proportion n'est pas égale, car en montant la vitesse diminue toujours de même façon, et en descendant son augmentation est plus grande au commencement qu'à la fin.

» Par exemple, une flèche qui monte de A vers C (*fig.* 4) va

Fig. 4.



extrêmement vite d'A jusques à B et beaucoup plus lentement de B jusques à C; mais, en descendant de C jusques à D, elle augmente quasi sa vitesse en raison double des temps [1], mais depuis D jusques à E, elle l'augmente beaucoup moins, d'où il suit que, si la flèche monte fort haut, comme d'A vers C, elle doit employer beaucoup moins de temps à monter qu'à descendre. Mais, si elle monte moins, comme de B, je ne doute point qu'elle n'emploie toujours un peu moins de temps à monter, mais la différence ne sera pas si grande.

» Je n'ai rien trouvé de ce que vous me mandez du flux et du

---

[1] C'est-à-dire, suivant la loi de Galilée, reconnue ici comme approximativement vraie.

reflux, tiré des écrits de l'Anglois ([1]), qui soit à mon usage, sinon qu'il dit que *habente Lunâ latitudinem borealem, citius implentur tempora quam habente australem* ([2]). Ce que j'avois jugé devoir être vrai il y a longtemps, mais je n'avois point su qu'on en eût fait aucune expérience.

» Pour la plus grande force d'une épée, je ne doute point qu'elle ne fût au centre de gravité, si, en donnant le coup, on la laissoit aller de la main, et au contraire qu'elle ne fût tout au bout de l'épée, si on la tenoit parfaitement ferme, car ce bout est mû plus vite que le reste. Mais, pour ce qu'on ne la tient jamais extrêmement ferme et aussi qu'on ne la laisse pas aller tout à fait, cette plus grande force est entre le centre de gravité et le bout de l'épée, et approche plus ou moins de l'un que de l'autre selon que celui qui s'en sert a la main plus ou moins ferme.

» Je ne sais pas ce que me demande M. de Vitry-la-Ville touchant les grandeurs inexplicables, car il est certain que toutes celles qui sont comprises dans les équations s'expliquent par quelques signes, puisque l'équation même qui les contient est une façon de les exprimer. Mais, outre celles-là, il y en a une infinité d'autres qui ne peuvent pas même être comprises en aucune équation, et, entre celles qui sont comprises dans les équations, il y en a qui ne peuvent être expliquées par les signes $\sqrt{}$ ou $\sqrt{C}$ (c'est-à-dire racine quarrée ou racine cubique) hors de l'équation. Comme si j'ai un cube égal à trois racines plus trois, je ne saurois exprimer la valeur de cette racine par les signes de racine quarrée ou cubique, et toutefois elle n'est pas plus incommensurable que celles qui s'y expliquent.

» Il y a 10 ou 12 jours que le Cicéron pour M. Hardy est parti par mer, et je vous l'ai adressé sans lettre, à cause que je n'avois pas alors loisir d'écrire. Vous l'aurez peut-être avant celle-ci.

» Je suis

Mon Révérend Père

Votre très humble et très obéissant serviteur.

Du 20 avril 1643. DESCARTES.

([1]) Hobbes?

([2]) Lorsque la Lune a une latitude boréale, le moment arrive plus tôt que lorsqu'elle a une latitude australe.

On remarquera que, par une inadvertance évidente, Descartes a mal choisi l'équation qu'il prend pour exemple dans sa réponse à Vitry-la-Ville :

$$x^3 = 3x + 3,$$

puisque cette équation appartient au cas réductible et que sa racine réelle peut dès lors s'exprimer sous forme algébrique. On peut supposer qu'il voulait prendre un exemple comme

$$x^3 = 3x + 1.$$

MÉTHODE DIRECTE FONDÉE SUR L'EMPLOI DES SÉRIES POUR PROUVER L'EXISTENCE DES RACINES DES ÉQUATIONS ENTIÈRES A UNE INCONNUE PAR LA SIMPLE EXÉCUTION DE LEUR CALCUL NUMÉRIQUE;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. La possibilité de trouver au moins une racine à toute équation entière, par suite, de décomposer exactement en facteurs linéaires un polynôme entier quelconque à une seule variable, est un principe fondamental, caractéristique même, de l'Analyse moderne, si bien qu'au fond la conception des quantités imaginaires, en elle-même si étrange, n'a pas d'autre objet que d'en assurer l'existence. Depuis qu'il a été aperçu, ce principe semble avoir rarement cessé de préoccuper les géomètres, car les démonstrations connues sont déjà fort nombreuses, signées souvent des noms les plus illustres, et quelques-unes sont des monuments de l'art tantôt le plus puissant comme la seconde de celles de Gauss (1), tantôt le plus ingénieux comme celle toute récente de M. Walecki (2).

Ces démonstrations sont cependant sujettes à des critiques variées, témoin les efforts de chaque auteur pour surpasser ses devanciers et lui même quelquefois. Toutes en particulier (et je

(1) *Demonstratio nova altera*, etc. (*Werke*, Bd. III).

(2) *Démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des équations algébriques* (*Comptes rendus*, t. XCVI, p. 779; 1883).

n'excepte pas celle que j'ai proposée en 1872 dans mon *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*) ont le défaut commun d'être extrêmement indirectes et de laisser dans l'obscurité la plus profonde tout ce qui touche au calcul effectif des racines, ce côté de la question ayant été jusqu'ici entièrement abandonné au hasard d'artifices praticables ou bien, en leur absence, à l'empirisme des opérations numériques.

Telle n'est plus (me semble-t-il tout au moins) celle que j'ai pu instituer en faisant du principe en question un simple corollaire de la théorie générale des fonctions implicites, assise sur les développements en séries dans mon Ouvrage cité plus haut et simplifiée par mes dernières recherches; elle a cet autre avantage de ne supposer rien de connu sur l'équation binôme qu'elle embrasse comme les autres. Je viens même d'apercevoir que la convergence des séries à employer peut être établie par des moyens élémentaires. Cette dernière circonstance est celle qui va me permettre d'exposer séparément cette nouvelle démonstration; au rang où je la place parmi les propriétés des fonctions déduites successivement de celles des séries entières, elle se fait en peu de mots sans exiger avant elle aucun lemme spécial; ici toutefois je dois entrer dans quelques considérations préparatoires.

2. Une série entière en x, y, ... douée de rayons de convergence tous différents de 0 est une fonction qui, à l'intérieur de cercles ayant des rayons égaux ou mieux moindres, jouit de toutes les propriétés générales d'un polynôme entier en x, y, ... *n'impliquant pas la notion de son degré;* en outre, on les démontre par les mêmes moyens exactement, sauf la complication ajoutée au raisonnement par la discussion de la convergence que chaque fois il faut opérer avant tout.

Les propriétés en question, y compris les principes du calcul (même inverse) des dérivées, constituent une matière des plus limpides dont l'exposition méthodique se trouverait au besoin dans mon Ouvrage déjà cité. Je les supposerai donc connues; mais je traiterai sommairement certains points de questions plus vastes qui sont indispensables à nos recherches.

3. Soient $U(x, y, \ldots)$, $V(x, y, \ldots)$, ... plusieurs fonctions

des mêmes variables $x, y, \ldots$ représentables par les séries entières

$$(1)\quad \begin{cases} U(x, y, \ldots) = {}^{(1,0,\ldots)}Ux + {}^{(0,1,\ldots)}Uy + \ldots + {}^{(m,n,\ldots)}Ux^m y^n \ldots + \ldots \\ V(x, y, \ldots) = {}^{(1,0,\ldots)}Vx + {}^{(0,1,\ldots)}Vy + \ldots + {}^{(m,n,\ldots)}Vx^m y^n \ldots + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

admettant les mêmes quantités positives $R_x, R_y, \ldots$ pour rayons de convergence et ayant leurs termes constants tous $= 0$, puis $f(u, v, \ldots)$ une fonction de $u, v, \ldots$ représentable aussi par une série entière

$$(2)\qquad f(u, v, \ldots) = {}^{(0,0,\ldots)}f + {}^{(1,0,\ldots)}fu + {}^{(0,1,\ldots)}fv + \ldots,$$

admettant les autres quantités positives $R_u, R_v, \ldots$ pour rayons de convergence.

On peut évidemment assigner de nouvelles quantités positives $r_x < R_x$, $r_y < R_y, \ldots$ telles que, pour toutes valeurs de $x, y, \ldots$, dont les modules ne les surpassent pas, les sommes des modules des termes des séries (1) soient inférieures à $R_u, R_v, \ldots$; pour de pareilles valeurs de $x, y, \ldots$ on peut donc substituer $U(x, y, \ldots)$, $V(x, y, \ldots), \ldots$ à $u, v, \ldots$ dans la série (2), développer tous les termes de celle-ci en séries entières par rapport à $x, y, \ldots$, réduire les termes semblables de ces séries partielles et, par suite, faire finalement de la quantité $f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots]$ la somme d'une série entière en $x, y, \ldots$

$$F(x, y, \ldots) = {}^{(0,0,\ldots)}F + {}^{(1,0,\ldots)}Fx + {}^{(0,1,\ldots)}Fy + \ldots,$$

admettant au moins $r_x, r_y, \ldots$ pour rayons de convergence.

La nouvelle fonction de $x, y, \ldots$ engendrée par cette opération est une fonction *composée* de la *composante* (2) et des fonctions *simples* (1) et il est évident que ses dérivées de tous ordres se forment suivant les mêmes lois exactement que si les fonctions données (1), (2) se réduisaient toutes à de simples polynômes entiers.

4. La série entière en $u, f(u)$, étant donnée, nous n'entendrons ici par *intégration de l'équation différentielle*

$$(3)\qquad \frac{du}{dx} = f(u),$$

que l'opération consistant à trouver quelque série entière en x *sans terme constant* dont la dérivée première de la somme $U(x)$ soit égale à la fonction composée $f[U(x)]$ quelle que soit x dans les limites de sa convergence, de celle aussi de la série $f[U(x)]$. En admettant *provisoirement* l'existence de cette *intégrale*, la *méthode des coefficients indéterminés* permet immédiatement de la construire sans ambiguïté.

La substitution de $U(x)$ à u dans l'équation (3), faisant effectivement de ses deux membres des séries entières en x identiquement égales, changera de même en autant d'identités toutes les équations engendrées par la différentiation indéfinie de celle-ci, c'est-à-dire celles qui composent la suite illimitée

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dx} = f(u),\\ &\frac{d^2u}{dx^2} = f'(u)\frac{du}{dx},\\ &\frac{d^3u}{dx^3} = f''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + f'(u)\frac{d^2u}{dx^2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En y faisant $x = 0$ et ayant égard aux égalités évidentes

$$(u)_0 = U(0) = 0,\quad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = U'(0) = 1.{}^{(1)}U,\quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = U''(0) = 1.2.{}^{(2)}U,\quad \ldots,$$

elles deviennent

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &1.{}^{(1)}U = f(0),\\ &1.2.{}^{(2)}U = f'(0)[1.{}^{(1)}U],\\ &1.2.3.{}^{(3)}U = f''(0)[1.{}^{(1)}U]^2 + f(0)[1.2.{}^{(2)}U],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et leur résolution successive fournit les unes après les autres les valeurs des coefficients auparavant inconnus ${}^{(1)}U$, ${}^{(2)}U$, ... parce que, pour toute valeur de k, la $k^{\text{ième}}$ équation a pour premier membre le produit de ${}^{(k)}U$ par l'entier non nul $1.2\ldots k$ et pour second membre un polynôme entier à coefficients connus en ${}^{(1)}U$, ${}^{(2)}U$, ..., ${}^{(k-1)}U$ seulement, quantités dont les calculs précédents ont fourni les valeurs.

L'intégrale cherchée ne peut donc être que la somme $U(x)$ de la série *unique* ainsi construite, *pourvu toutefois que celle-ci admette un rayon de convergence différent de* 0. Dans ce cas

d'ailleurs, *la somme en question est effectivement une intégrale;* car les égalités (5) expriment précisément que sa substitution à u dans l'équation proposée (3) fait de ses deux membres des séries entières en x, prenant pour $x = 0$ elles-mêmes et toutes leurs dérivées semblables des valeurs numériques indéfiniment égales.

5. La discussion de cette série est loin d'être aussi simple, mais les considérations suivantes nous la faciliteront beaucoup.

I. Si, dans les seconds membres des équations (5) succédant à la première, on substitue successivement à ${}^{(1)}U$, ${}^{(2)}U$, ... leurs expressions fournies par les équations qui les précèdent, on obtient

$$\begin{aligned} 1.{}^{(1)}U &= f(0), \\ 1.2.{}^{(2)}U &= f'(0)f(0), \\ 1.2.3.{}^{(3)}U &= f''(0)[f(0)]^2 + f(0)[f'(0)f(0)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

autre ensemble d'équations tout à fait équivalent à celui des équations (5) parce que des substitutions inverses du même genre permettent évidemment de repasser à celui-ci.

Si donc, traitant de la même manière les équations (4), on forme celles-ci

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f(u), \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= f'(u)f(u) = f_1(u), \\ \frac{d^3u}{dx^3} &= f''(u)[f(u)]^2 + f(u)f_1(u) = f_2(u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les équations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1.{}^{(1)}U &= f(0), \\ 1.2{}^{(2)}U &= f_1(0), \\ 1.2.3{}^{(3)}U &= f_2(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

fourniront tout aussi bien les valeurs de ${}^{(1)}U$, ${}^{(2)}U$, ${}^{(3)}U$, ...

II. *Quel que soit k, on a*

$$(7) \qquad f_{k+1}(u) = f'_k(u)f(u).$$

Cette identité étant exacte en fait pour $k = 0$, il suffit de constater qu'elle l'est pour toute valeur de k si elle a lieu pour les valeurs moindres de cet indice.

Les seconds membres des $(k+1)^{\text{ième}}$ et $(k+2)^{\text{ième}}$ équations (4), les expressions générales des dérivées d'ordres k, $k+1$ de la même fonction composée $f(u)$ de u traitée comme fonction simple indéterminée de x, sont des formes

$$\Omega[u, u', u'', \ldots, u^{(k)}],$$

et

$$\Omega_0[u, u', \ldots, u^{(k)}]u' + \Omega_1[u, u', \ldots, u^{(k)}]u'' + \ldots + \Omega_k[u, u', \ldots, u^{(k)}]u^{(k+1)},$$

où Ω est une composante dépendant de la nature de $f(u)$ et de la valeur de k, entière par rapport à u', u'', ..., $u^{(k)}$, linéaire et homogène par rapport à $f'(u)$, $f''(u)$, ..., $f^{(k)}(u)$, où Ω_0, Ω_1, ..., Ω_k désignent ses dérivées premières par rapport à u, u', ..., $u^{(k)}$ et où enfin il faut partout substituer

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^ku}{dx^k}, \quad \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}$$

à

$$u', \quad u'', \quad \ldots, \quad u^{(k)}, \quad u^{(k+1)},$$

respectivement.

Il en résulte

$$f_k(u) = \Omega[u, f(u), f_1(u), \ldots, f_{k-1}(u)],$$
$$f_{k+1}(u) = \Omega_0(u, f, \ldots, f_{k-1})f + \Omega_1(u, f, \ldots, f_{k-1})f_1 + \ldots + \Omega_k(u, f, \ldots, f_{k-1})f_k,$$

d'où, comme il fallait le prouver,

$$f_k'(u)f(u) = \Omega_0(u, f, \ldots, f_{k-1})f + \Omega_1(u, f, \ldots, f_{k-1})f'f + \ldots$$
$$+ \Omega_k(u, f, \ldots, f_{k-1})f_{k-1}'f = f_{k+1}(u),$$

à cause des hypothèses

$$f'(u)f(u) = f_1(u), \quad f_1'(u)f(u) = f_2(u), \quad \ldots, \quad f_{k-1}'(u)f(u) = f_k(u).$$

6. Dans un instant nous aurons à appliquer cette méthode à un cas particulier dont la solution exige la connaissance du fait suivant :

En appelant

$$\mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}_q$$

des constantes quelconques dont le moindre module β n'est pas nul et $n_1, n_2, \ldots, n_q$ autant d'entiers positifs, la fonction

$$(8) \qquad \frac{1}{(\mathfrak{b}_1 - u)^{n_1}(\mathfrak{b}_2 - u)^{n_2}\ldots(\mathfrak{b}_q - u)^{n_q}}$$

est développable en une série entière en u admettant β pour rayon de convergence.

I. On a, comme on sait,

$$\frac{1}{1 - {}'u} = 1 + {}'u + {}'u^2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1 - {}''u} = 1 + {}''u + {}''u^2 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{1 - {}^{(n)}u} = 1 + {}^{(n)}u + {}^{(n)}u^2 + \ldots$$

séries entières en ${}'u, {}''u, \ldots, {}^{(n)}u$ ayant 1 pour rayon de convergence commun. L'attribution à ces n variables de valeurs quelconques à modules < 1 rendant convergentes les séries formées par les modules de leurs termes, il vient par leur multiplication

$$\frac{1}{(1 - {}'u)(1 - {}''u)\ldots(1 - {}^{(n)}u)} = 1 + {}'u + {}''u + \ldots + {}^{(n)}u + \ldots + [k] + \ldots,$$

où $[k]$ représente généralement la somme de tous les monômes entiers en ${}'u, {}''u, \ldots, {}^{(n)}u$ ayant en commun k pour degré total et 1 pour coefficient, monômes dont le nombre est

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1.2\ldots k},$$

et cette série a 1, 1, ..., 1 pour rayons de convergence.

En y faisant ${}'u = {}''u = \ldots = {}^{(n)}u = u$, il vient encore

$$\frac{1}{(1-u)^n} = 1 + \frac{n}{1}u + \frac{n(n+1)}{1.2}u^2 + \ldots,$$

série ayant 1 pour rayon de convergence.

En supposant donc $\mathfrak{b}$ non $= 0$, il vient enfin

$$(9) \qquad \frac{1}{(\mathfrak{b} - u)^n} = \mathfrak{b}^{-n}\frac{1}{\left(1 - \frac{u}{\mathfrak{b}}\right)^n} = \mathfrak{b}^{-n} + \frac{n}{1}\mathfrak{b}^{-n-1}u + \frac{n(n+1)}{1.2}\mathfrak{b}^{-n-2}u^2 + \ldots.$$

série dont le rayon de convergence est mod $\mathfrak{b}$ et que l'on obtiendrait aussi en ordonnant, suivant les puissances croissantes de u, le développement de $(\mathfrak{b}-u)^{-n}$ formé par le même mécanisme que si $-n$ exposant du binôme $(\mathfrak{b}-u)$ était positif.

II. Les développements de

$$\frac{1}{(\mathfrak{b}_1-u)^{n_1}},\quad \frac{1}{(\mathfrak{b}_2-u)^{n_2}},\quad \ldots,\quad \frac{1}{(\mathfrak{b}_q-u)^{n_q}},$$

construits comme ci-dessus (I) ayant respectivement $\beta_1 = \operatorname{mod}\mathfrak{b}_1$, $\beta_2 = \operatorname{mod}\mathfrak{b}_2$, ..., $\beta_q = \operatorname{mod}\mathfrak{b}_q$ pour rayons de convergence, admettent tous β au même titre à plus forte raison. Il suffit donc de former leur produit pour obtenir la fonction (8) développée dans les conditions voulues.

7. En prenant la dérivée de la série (9), on trouve

$$n\left(\mathfrak{b}^{-(n+1)} + \frac{n+1}{1}\mathfrak{b}^{-(n+1)-1}u + \ldots\right),$$

produit par l'exposant n du développement de $(\mathfrak{b}-u)^{-(n+1)}$, d'où

$$\frac{d}{du}\frac{1}{(\mathfrak{b}-u)^n} = \frac{n}{(\mathfrak{b}-u)^{n+1}}, \tag{10}$$

formule que nous notons en passant pour l'utiliser bientôt.

8. *Si,* G *désignant une constante quelconque de module* Γ *non* $= 0$, *on pose, pour abréger,*

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_q$$

et

$$\mathfrak{f}(u) = \frac{1}{G(\mathfrak{b}_1-u)^{n_1}(\mathfrak{b}_2-u)^{n_2}\ldots(\mathfrak{b}_q-u)^{n_q}},$$

fonction de u représentable par une série entière en u ayant β *pour rayon de convergence* (6), *l'intégration de l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dx} = \mathfrak{f}(u), \tag{11}$$

opérée comme ci-dessus (4), (5) *conduit à une série entière*

en x où, en posant

$$R = \frac{\Gamma\beta^{n+1}}{n+1}, \tag{12}$$

${}^{(k)}U$ *coefficient de x^k satisfait à l'inégalité indéfinie*

$$\operatorname{mod}{}^{(k)}U < \frac{\beta}{n+1}\,\frac{1}{R^k}; \tag{13}$$

cette série admet au moins R *pour rayon de convergence et par suite, pour* $\operatorname{mod} x < R$, *sa somme*

$$U(x) = {}^{(1)}U x + {}^{(2)}U x^2 + \ldots$$

satisfait effectivement à l'équation (11).

I. Posons d'abord

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\omega)^n} = \frac{1}{\Gamma(\beta-\omega)^{-1+(n+1)}},$$

et considérons l'équation différentielle entre x et la fonction inconnue ω

$$\frac{d\omega}{dx} = \varphi(\omega).$$

En procédant comme au n° 5 et appliquant les formules (7), (10), on trouvera successivement

$$\varphi_1(\omega) = \varphi'(\omega)\,\varphi(\omega) = \frac{-1+(n+1)}{\Gamma(\beta-\omega)^{n+1}}\,\frac{1}{\Gamma(\beta-\omega)^{-1+(n+1)}} = \frac{-1+(n+1)}{\Gamma^2(\beta-\omega)^{-1+2(n+1)}},$$

$$\varphi_2(\omega) = \varphi_1'(\omega)\,\varphi(\omega) = \frac{[-1+(n+1)][-1+2(n+1)]}{\Gamma^3(\beta-\omega)^{-1+3(n+1)}},$$

.....,

et généralement

$$\varphi_{k-1}(\omega) = \frac{[-1+(n+1)][-1+2(n+1)]\ldots[-1+(k-1)(n+1)]}{\Gamma^k(\beta-\omega)^{-1+k(n+1)}}.$$

Pour ${}^{(k)}\Omega$ coefficient de x^k dans le développement de l'intégrale, les formules (6) donnent ainsi

$$\begin{aligned}{}^{(k)}\Omega &= \frac{\varphi_{k-1}(0)}{1.2\ldots k}\\ &= \frac{[-1+(n+1)][-1+2(n+1)]\ldots[-1+(k-1)(n+1)]}{1.2\ldots k}\,\frac{1}{\Gamma^k\beta^{-1+k(n+1)}},\end{aligned}$$

et ${}^{(k)}\Omega$ est une quantité réelle positive pour laquelle il vient facilement

$$ {}^{(k)}\Omega < \frac{\beta}{n+1}\left[\frac{n+1}{\Gamma\beta^{n+1}}\right]^k < \frac{\beta}{n+1}\,\frac{1}{R^k}, $$

c'est-à-dire l'inégalité (13) pour le cas particulier qui nous occupe.

Si enfin l'on a $\operatorname{mod} x < R$, l'inégalité précédente donne

$$ \operatorname{mod}[{}^{(k)}\Omega x^k] < \frac{\beta}{n+1}\left(\frac{\operatorname{mod} x}{R}\right)^k, $$

terme général d'une progression géométrique de raison < 1 partant convergente.

II. La comparaison des développements de $\mathfrak{f}(u)$, $\varphi(\omega)$, cette dernière fonction mise sous la forme

$$ \frac{1}{\Gamma(\beta-\omega)^{n_1}(\beta-\omega)^{n_2}\ldots(\beta-\omega)^{n_q}}, $$

montre immédiatement que les coefficients du second sont des quantités réelles positives surpassant respectivement les modules de ceux semblablement placés dans le premier, et la même observation s'étend d'elle-même aux développements de $\mathfrak{f}_{k-1}(u)$, $\varphi_{k-1}(\omega)$ quel que soit k. On a donc toujours

$$ \operatorname{mod}\mathfrak{f}_{k-1}(0) < \varphi_{k-1}(0), $$

d'où

$$ \operatorname{mod}{}^{(k)}U < {}^{(k)}\Omega, $$

conclusion qui entraîne l'existence de notre proposition dans toute sa généralité.

9. Nous considérerons maintenant un polynôme entier en u de degré effectif $m > 1$, où le coefficient de u^m se réduit à 1

$$ f(u) = u^m + p_1 u^{m-1} + \ldots + p_{m-1} u + p_m, $$

et nous supposerons [cela provisoirement, car nous verrons bientôt qu'il en est toujours ainsi (11 *inf.*)] sa dérivée première

$$ (11) \qquad f'(u) = m u^{m-1} + (m-1) p_1 u^{m-2} + \ldots + 1 . p_{m-1}, $$

entièrement décomposable en facteurs linéaires par la formule

$$ (11\ bis) \qquad f'(u) = (-1)^{m-1} m (\mathfrak{b}_1 - u)^{n_1} (\mathfrak{b}_2 - u)^{n_2} \ldots (\mathfrak{b}_q - u)^{n_q}. $$

où les quantités

$$(15) \qquad \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}_q,$$

seules racines de l'équation numérique

$$f'(u) = 0,$$

sont toutes inégales et où l'on a forcément

$$m - 1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_q.$$

Cela posé, nous démontrerons d'abord ce qui suit :

Si u_i est une valeur particulière de u choisie arbitrairement, sauf la condition essentielle de n'être égale à aucune des quantités (15) *et si x_i est la valeur correspondante de $f(u)$, c'est-à-dire si l'on a l'égalité numérique*

$$(16) \qquad f(u_i) = x_i,$$

on peut assigner une série entière en $(x - x_i)$ ayant u_i pour premier terme

$$(17) \qquad U_i(x) = u_i + {}^{(1)}U_i(x - x_i) + {}^{(2)}U_i(x - x_i)^2 + \ldots,$$

mais une seule, dont la somme, dans les limites de sa convergence, satisfasse quelle que soit x à l'équation

$$(18) \qquad f(u) = x.$$

En appelant δ_i la moindre distance du point u_i aux points (15) *et posant*

$$R_i = \delta_i^m,$$

on a

$$\text{mod}\, {}^{(k)}U_i < \frac{\delta_i}{m} \frac{1}{R_i^k},$$

et cette série admet au moins R_i pour rayon de convergence.

I. Supposons d'abord que toutes les quantités (15) soient non $= 0$ et qu'on ait au contraire $u_i = x_i = 0$.

Comme, par hypothèse, $\frac{1}{f'(u)}$ est de même forme que la fonction

$f(u)$ du n° 8, l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{f'(u)} \tag{19}$$

possède pour intégrale unique s'annulant avec x la somme $U_i(x)$ d'une série entière en x douée de quelque rayon de convergence non $= 0$. Tant que la substitution de $U_i(x)$ dans $\frac{1}{f'(u)}$ laissera convergente la série entière en x résultant de cette composition de fonction, on aura donc identiquement

$$f'[U_i(x)]U'_i(x) = \frac{d}{dx} f[U_i(x)] = 1 \tag{20}$$

et, par suite,

$$f[U_i(x)] = x, \tag{21}$$

à cause de $U_i(0) = 0$ et de l'hypothèse $f(0) = 0$. Mais cette dernière identité subsiste aussi longtemps que la convergence de $U_i(x)$, parce que son premier membre étant un polynôme entier en $U_i(x)$ a pour développement une série entière en x ayant même rayon de convergence que celle-ci.

La réalisation, dans les relations (12) (13) des hypothèses actuelles $n = m - 1$, $G = (-1)^{m-1} m$, d'où $\Gamma = m$, donne enfin

$$\beta^m, \quad \frac{\beta}{m}\left(\frac{1}{\beta^m}\right)^k$$

pour rayon de convergence de la série (17) et pour limite supérieure de mod $^{(k)}U_i$. Or ces résultats s'accordent avec notre énoncé dans le cas particulier où nous nous trouvons, parce que le moindre module β des quantités (15) est précisément la plus faible de leurs distances au point $u_i = 0$.

La somme d'aucune autre série s'annulant avec x ne peut d'ailleurs vérifier identiquement l'équation (18), parce que l'identité (21) entraîne la précédente (20) équivalente à l'équation différentielle (19) qui possède une seule intégrale de cette sorte (4).

II. Quant au cas général il se ramène immédiatement au précédent par l'introduction de nouvelles variables u, x, à substituer à u, x par les transformations

$$u = u_i + \mathrm{u}, \qquad x = x_i + \mathrm{x}.$$

En posant $f(u_i + \mathrm{u}) = f(u_i) + \mathrm{f}(\mathrm{u})$ et ayant égard à l'égalité (16) l'équation (18) équivaut à

$$\mathrm{f}(\mathrm{u}) = \mathrm{x}, \tag{22}$$

où $\mathrm{f}(0) = 0$ et l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{f}'(\mathrm{u}) &= \frac{d}{d\mathrm{u}} f(u_i + \mathrm{u}) = f'(u_i + \mathrm{u}) \\ &= (-1)^{m-1} m[(\mathfrak{b}_1 - u_i) - \mathrm{u}]^{n_1} \ldots [(\mathfrak{b}_q - u_i) - \mathrm{u}]^{n_q}.\end{aligned}$$

En appelant ainsi β' le plus petit module des différences $(\mathfrak{b}_1 - u_i), \ldots, (\mathfrak{b}_q - u_i)$ et appliquant les conclusions du précédent alinéa, on trouvera, pour satisfaire identiquement à l'équation (22), une série entière en x

$$^{(1)}\mathrm{U}_i \mathrm{x} + {}^{(2)}\mathrm{U}_i \mathrm{x}^2 + \ldots, \tag{23}$$

admettant β'^m pour rayon de convergence et $\frac{\beta'}{m}\left(\frac{1}{\beta'^m}\right)^k$ pour limite supérieure de mod $^{(k)}\mathrm{U}_i$.

L'exactitude de notre énoncé est donc générale, car, d'une part, on a évidemment $\beta' = \delta_i$; d'autre part, on revient de l'équation (22) à la proposée (18) par les transformations inverses

$$\mathrm{u} = u - u_i, \qquad \mathrm{x} = x - x_i,$$

moyennant quoi on obtient la série cherchée (17) en ajoutant u_i à ce que devient la série (23) par le changement de x en $x - x_i$.

10. *Sous les mêmes conditions que ci-dessus* (9), *l'équation numérique*

$$f(u) = 0 \tag{24}$$

admet au moins une racine.

Si quelqu'une des quantités

$$f(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{a}_1, \quad f(\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a}_2, \quad \ldots \quad f(\mathfrak{b}_q) = \mathfrak{a}_q \tag{25}$$

se réduit à 0, celle des quantités (15) qui porte le même indice est racine de l'équation (24) et l'exactitude de notre théorème se trouve vérifiée.

S'il en est autrement, nous raisonnerons comme il suit :

I. Le polynôme $f(u)$ ne dégénérant pas en une constante, on peut assigner une quantité u_0 telle que

$$f(u_0) = x_0 \tag{26}$$

ne soit égale à aucune des quantités (25), cas auquel u_0 ne peut faire partie de la suite (15). Ce point est trop facile pour que nous nous arrêtions à sa démonstration.

Si $x_0 = 0$, u_0 est racine de l'équation (24), notre théorème est encore démontré. Sinon la moindre distance θ des quantités (25), (26) à l'origine O_x des axes procurant la notation graphique de x n'est pas nulle, et nous choisirons d'abord quelque autre quantité positive θ' inférieure à la fois à θ et aux moitiés des distances mutuelles des points (25), (26), puis, ce que permet évidemment la continuité du polynôme $f(u)$ considéré comme fonction de u, une seconde quantité de ce genre $\mathfrak{I}'$, inférieure à la fois aux distances de u_0 aux points (15) ainsi qu'aux distances mutuelles de ces derniers, jouissant en outre de cette propriété, que toute valeur de u rendant le module de la différence $(u - \mathfrak{b})$ inférieur à $\mathfrak{I}'$ rend aussi celui de la différence correspondante $f(u) - f(\mathfrak{b}) = f(u) - \mathfrak{a}$ inférieur à θ'.

Des points (25) pris pour centres avec des rayons tous égaux à θ', nous décrirons dans le plan O_x les cercles

$$[\mathfrak{a}_1], \quad [\mathfrak{a}_2], \quad \ldots, \quad [\mathfrak{a}_q], \tag{27}$$

et nous appellerons S_x l'aire illimitée à laquelle ce plan est réduit par l'ablation de celles de ces cercles. Nous appellerons S_u l'aire analogue obtenue en retranchant pareillement du plan O_u servant à la notation graphique de u les cercles

$$[\mathfrak{b}_1], \quad [\mathfrak{b}_2], \quad \ldots, \quad [\mathfrak{b}_q], \tag{28}$$

qui ont $\mathfrak{I}'$ pour rayon commun avec les points (15) pour centres.

De la nature de ces tracés résultent les conséquences suivantes :

1° A l'intérieur de l'aire S_x et entre deux quelconques de ses points on peut tracer une ligne brisée à côtés aussi petits qu'on le veut.

2° L'aire S_x contient les points x_0 et $x = 0$, mais aucun des points (25).

3° L'aire S_u contient le point u_0, mais aucun des points (15), et la plus courte distance δ_i de ceux-ci à tout point u_i intérieur à cette aire surpasse $\mathfrak{I}$, quantité positive choisie arbitrairement au-dessous de $\mathfrak{I}'$.

4° Si de deux quantités u_i, x_i qui vérifient numériquement l'équation (18) la seconde x_i est intérieure à S_x, l'autre u_i l'est nécessairement à S_u. Dans le cas contraire, en effet, u_i ne pourrait tomber qu'à l'intérieur de quelqu'un des cercles (28) et par suite $f(u_i) = x_i$ serait située dans quelqu'un des cercles (27), c'est-à-dire à l'extérieur de S_x.

En posant donc

$$\rho = \mathfrak{I}^m,$$

on a toujours $R_i > \rho$ à cause de $\delta_i > \mathfrak{I}$ et la série (17) admet un rayon de convergence supérieur à ρ; si de plus x est située dans S_x, la somme u de cette série tombe forcément dans S_u, parce qu'elle vérifie numériquement l'équation (18).

De $x = x_0$ à $x = x_1 = 0$ et à l'intérieur de S_x, traçons enfin une ligne brisée

$$|x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_i, \quad \ldots, \quad x_{1-1}, \quad 0|,$$

dont aucun côté ne surpasse ρ. Il résulte immédiatement de tout ce qui précède que de $i = 0$ à $i = 1 - 1$, la série (17) admet au moins ρ pour rayon de convergence, qu'on peut toujours y faire $x = x_{i+1}$ et que sa sommation fournit successivement ainsi (en y adjoignant u_0) des quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_i, \quad \ldots, \quad u_{1-1}, \quad u_1,$$

tombant toutes dans S_u et donnant, de $i = 0$ à $i = 1$, les égalités

$$f(u_i) = x_i.$$

De la dernière

$$f(u_1) = x_1 = 0,$$

on conclut que u_1 est précisément cette racine de l'équation (24) dont l'existence devait être prouvée.

11. *Tout polynôme entier $f(u)$ de degré effectif m est décomposable en m facteurs linéaires.*

I. Le point en question est évident pour $m = 1$.

II. Il est vrai pour la valeur actuelle de m s'il l'est pour la valeur $m - 1$.

En supposant, comme il est permis de le faire, que dans $f(u)$ le coefficient de u^m se réduit à 1, la dérivée $f'(u)$ est par hypothèse de la forme (14 *bis*) parce que son degré n'est que $m - 1$, et l'équation (24) a au moins une racine b (10).

Le quotient

$$\frac{f(u)}{u-b} = {}'f(u),$$

est donc un polynôme entier et, comme il n'est que de degré $m - 1$, notre hypothèse fournit pour lui une formule de décomposition telle que

$$'f(u) = (u - b_1)^{m_1}(u - b_2)^{m_2}\ldots(u - b_g)^{m_g},$$

où $m_1 + m_2 + \ldots + m_g = m - 1$. La combinaison de ces deux identités donne

$$f(u) = (u - b)(u - b_1)^{m_1}\ldots(u - b_g)^{m_g},$$

ce qu'il fallait prouver, à cause de $1 + m_1 + m_2 + \ldots + m_g = m$.

III. Il est donc général, car, étant vrai pour $m = 1$ (I), il l'est ensuite successivement pour $m = 2, 3, \ldots$ (II).

12. Le principe que nous avions en vue se trouve ainsi démontré; en outre, le calcul des diverses racines de l'équation (24) a été ramené à celui des racines d'équations de degrés moindres et d'un seul enchaînement de séries *en nombre assignable a priori*, c'est-à-dire, en dernière analyse, *à un nombre essentiellement limité de développements en séries;* c'est le but principal que je cherchais à atteindre.

Nous pourrions aller plus loin, prouver, par exemple, que *toutes les racines simples de l'équation* (24) *peuvent être calculées directement par le procédé qui nous a fait découvrir la racine u_1 au n°* 10, puis assigner le nombre de termes à garder dans

les séries (17) *pour obtenir ces racines simples avec une approximation déterminée,* puis systématiser et simplifier la résolution de l'équation (24) en la ramenant à celle d'équations auxiliaires sans racines multiples et dont *il suffit de connaître approximativement les racines des équations dérivées,* puis *réduire le nombre des développements à recommencer* pour obtenir chaque racine, etc. Mais ces détails sont moins intéressants, plus arides, et les longueurs qu'ils exigent me sembleraient ici mal placées.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HERMITE. — Cours rédigé par M. Andoyer. Quatrième édition, revue et augmentée; lithographié; 292 p. in-4°. Paris, Hermann, 1891.

La quatrième édition de ce Cours, pour lequel il est bien inutile d'exprimer à nouveau une admiration qui est maintenant universelle, a été enrichie par son illustre auteur d'additions très importantes.

La première, qui est la plus considérable, se rapporte à la théorie de la transformation des fonctions elliptiques; le problème est posé comme il suit :

Soient

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2 \sin^2 \varphi}},$$

déterminer le module l et la constante M de sorte que $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l_1\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$ soient des fonctions doublement périodiques à périodes $2K$, $2iK'$.

L'auteur traite d'abord de la transformation linéaire et les formules

$$\operatorname{sn}(ix, k') = \frac{i \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x}, \qquad \ldots,$$

d'où l'on déduit aisément

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2(ix, k')} - \frac{1 + k'^2}{3} = -\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{1 + k^2}{3}\right),$$

lui fournissent, en passant, l'occasion d'un rapprochement avec la fonction pu de M. Weierstrass et le moyen d'établir la forme des polynômes en k qui figurent comme coefficients des puissances de x dans le développement de la fonction précédente.

Il passe ensuite au cas où le degré de la transformation est un nombre impair; les formules de transformation sont obtenues en

cherchant les pôles des fonctions $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right), \ldots$, contenues dans le parallélogramme des périodes $2K$, $2iK'$, et en appliquant la formule de décomposition en éléments simples relative aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce : le cas où les multiplicateurs de $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$ sont précisément ceux de $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$ est l'objet d'une étude particulière, et l'identification des résultats obtenus avec ceux de Jacobi donne lieu à des remarques très intéressantes.

Le problème est ensuite repris dans toute sa généralité (n pair ou impair), par une autre méthode. M. Hermite montre, en effet, comment le problème posé peut être ramené à la détermination de certaines fonctions doublement périodiques de seconde espèce, qui n'admettent qu'un pôle dans le parallélogramme des périodes.

Il applique la méthode à la transformation du second ordre, et les formules relatives à ce cas lui suffisent, pour établir, en terminant, le théorème de M. Picard sur l'impossibilité d'une fonction transcendante entière qui ne peut devenir égale à deux constantes données.

La seconde addition se rapporte aux dérivées des fonctions elliptiques prises par rapport au module. Le point de départ est dans l'emploi des formules

$$\frac{d}{dk}\operatorname{sn}x = -k\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\int_0^x \frac{\operatorname{sn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}\,dx,$$

$$k^2\operatorname{sn}^2 x = \frac{J}{K} - \frac{d}{dx}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

qui fournissent très facilement les dérivées par rapport à k des fonctions $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, $\operatorname{am}x$; la détermination de la dérivée par rapport au module de l'intégrale de seconde espèce

$$U(x) = \int_0^x k^2\operatorname{sn}^2 x\,dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

se ramène à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^x \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx,$$

qui s'obtient encore par la décomposition en éléments simples; on en déduit ensuite les dérivées des trois fonctions analogues

$$\frac{Jx}{K} - \frac{H'(x)}{H(x)}, \quad \ldots,$$

en sorte que, dans le système de notations de M. Weierstrass, la recherche des dérivées des fonctions $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$, $\frac{\sigma'_\alpha u}{\sigma_\alpha u}$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ par rapport aux invariants se trouve effectuée : M. Hermite donne ensuite l'expression des dérivées par rapport à k de K, K', J, J' et obtient finalement l'équation aux dérivées partielles de M. Weierstrass.

Enfin, la dernière se rapporte à l'expression au moyen des fonctions eulériennes d'une série hypergéométrique dans laquelle le quatrième élément est égal à 1.

MÉLANGES.

NOTE SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS;

PAR M. A. ASTOR.

On peut, en partant des équations de Lagrange et employant la méthode indiquée par M. Appell, qui ne tient pas compte de la nature des liaisons, mettre sous la forme canonique les équations du mouvement relatif; mais on n'a pas, par cette méthode, ce qu'on pourrait appeler l'équation générale des mouvements relatifs sous la forme canonique. Bour a bien donné cette équation dans son Mémoire publié en 1863 dans le *Journal de Liouville;* mais il suppose d'abord les points libres; de plus, c'est par le calcul assez délicat de l'accélération estimée par rapport aux axes mobiles et par des transformations successives assez malaisées à retenir qu'il arrive à la forme canonique générale. Émile Mathieu a reproduit la méthode de Bour dans sa Dynamique analytique. Il n'est peut-être pas sans intérêt d'avoir une méthode donnant cette équation comme simple corollaire de l'équation générale fournie

par le principe de d'Alembert et celui des vitesses virtuelles. C'est là l'objet de la présente Note.

Soient OXYZ un système d'axes fixes dans l'espace; $O'xyz$ les axes auxquels on rapporte le mouvement relatif; XYZ, xyz les coordonnées absolues et relatives d'un même point matériel M de masse m; u, v, w les composantes de la vitesse absolue de M par rapport aux axes mobiles; u_0, v_0, w les mêmes composantes pour l'origine mobile O'; p, q, r les composantes de la rotation instantanée par rapport aux mêmes axes; δV et δU les expressions de la somme des travaux virtuels élémentaires des forces directement appliquées suivant qu'elle est estimée par rapport aux axes fixes ou aux axes mobiles. Nous aurons, d'après des formules connues, en désignant par x', y', z' les dérivées par rapport au temps de x, y, z :

$$(1)\qquad \begin{cases} u = x' + u_0 + qz - ry, \\ v = y' + v_0 + rx - pz, \\ w = z' + w_0 + py - qx. \end{cases}$$

Ceci posé, l'équation générale du mouvement absolu du système peut s'écrire, en adoptant la forme employée par Mathieu,

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta \Sigma m \left(\frac{dX^2}{dt^2} + \frac{dY^2}{dt^2} + \frac{dZ^2}{dt^2}\right) - \frac{d}{dt} \Sigma m \left(\frac{dX}{dt}\delta X + \frac{dY}{dt}\delta Y + \frac{dZ}{dt}\delta Z\right) \\ \quad = \delta \sum \frac{m}{2} \left(\frac{dX^2}{dt^2} + \frac{dY^2}{dt^2} + \frac{dZ^2}{dt^2}\right) - \delta V. \end{cases}$$

Or on a, d'après la signification même de ces quantités,

$$\Sigma m \left(\frac{dX^2}{dt^2} + \frac{dY^2}{dt^2} + \frac{dZ^2}{dt^2}\right) = \Sigma m (u^2 + v^2 + w^2),$$

$$\Sigma m \left(\frac{dX}{dt}\delta X + \frac{dY}{dt}\delta Y + \frac{dZ}{dt}\delta Z\right) = \Sigma m (u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z),$$

et, d'autre part, les différentielles respectives de ces sommes, soit avec la caractéristique δ, soit avec la caractéristique d, sont aussi égales, comme on pourrait au surplus le démontrer en employant des formules bien connues; si l'on suppose donc fait le changement de variables qui consiste à remplacer XYZ... par xyz..., on aura l'équation

$$(3)\qquad \delta \Sigma m (u^2 + v^2 + w^2) - \frac{d}{dt} \Sigma m (u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z) = \delta T - \delta U.$$

où l'on suppose que

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2).$$

S'il y a une fonction des forces U et qu'on pose $T - U = H$, le second membre de (3) deviendra δH.

Si l'on se reporte aux valeurs de u données par les formules (1) et que l'on pose

$$\Omega = H - \Sigma[mu(u_0 + qz - ry) + mv(v_0 + rx - pz) + mw(w_0 + py - qx)],$$

on voit que (3) prend la forme

$$(4)\quad \delta\Sigma(mux' + mvy' + mwz') - \frac{d}{dt}\Sigma(mu\,\delta x + mv\,\delta y + mw\,\delta z) = \delta\Omega.$$

C'est la forme canonique, x et mu, y et mv, z et mw formant les couples de variables conjuguées.

Trois cas peuvent se présenter :

1° Les points matériels sont libres; on a alors immédiatement les équations sous la forme canonique

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial mu}, & \ldots,\\ \frac{d\,mu}{dt} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, & \ldots.\end{aligned}\right.$$

Ces équations, différentes dans la forme de celles qui ont été données par Bour, sont tout aussi commodes dans la pratique; elles s'y ramènent du reste en remplaçant u par $u_0 + \xi$, v par $v_0 + \eta$, w par $w_0 + \zeta$;

2° Le système $xyz\ldots$ est soumis à des liaisons, mais ces liaisons sont indépendantes du temps.

Réduisons les variables au nombre minimum et soient $q_1, q_2, \ldots, q_k$ les nouvelles variables, les formules qui donnent $x, y, z, \ldots$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots$ ne contenant pas t explicitement, nous aurons

$$x' = \sum\frac{\partial x}{\partial q_i}q'_i = \sum\frac{\partial x'}{\partial q'_i}q'_i, \qquad \delta x = \sum\frac{\partial x}{\partial q_i}\delta q_i = \sum\frac{\partial x'}{\partial q'_i}\delta q_i,$$

d'après la relation bien connue, due à Lagrange; comme $mu = \dfrac{\partial T}{\partial x'}$,

$mv = \frac{\partial T}{\partial y'}$, $mw = \frac{\partial T}{\partial z'}$, ..., nous voyons immédiatement que

$$\Sigma(mux' + mvy' + mwz') = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i,$$

$$\Sigma(mu\,\delta x + mv\,\delta y + mw\,\delta z) = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i,$$

de sorte que, si nous faisons le changement de variables représenté par l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

où i varie de 1 à k, et si nous continuons à représenter par Ω le second membre de (4) après la transformation, cette dernière devient

$$\delta \Sigma p_i q'_i - \frac{d}{dt} \Sigma p_i \delta q_i = \delta\Omega, \tag{6}$$

d'où les équations sous la forme ordinaire

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial q_i}. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

3° Les liaisons dépendent du temps; on aura alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \sum \frac{\partial x'}{\partial q'_i} q'_i \ldots;$$

quant aux équations qui donnent δx, δy, ..., elles ne changent pas, et le calcul demeure le même, à condition de remplacer Ω par $\Omega_1 = \Omega - \sum\left(mu\frac{\partial x}{\partial t} + mv\frac{\partial y}{\partial t} + mw\frac{\partial z}{\partial t}\right)$.

Nous terminerons par la remarque suivante :

Reprenons l'équation (3), que l'on peut écrire sous la forme

$$\delta \Sigma m \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{dt}{d} \Sigma m(u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z) = -\delta U.$$

Si le mouvement relatif est connu, elle fournira des identités auxquelles satisferont les éléments qui déterminent le mouvement d'entraînement, et on conçoit qu'elles puissent, dans certains cas, servir à le déterminer. En se plaçant à ce point de vue, on peut

retrouver les équations d'Euler pour le mouvement d'un solide qui a un point fixe. Nous supposerons le corps rapporté, comme de coutume, aux axes principaux d'inertie relatifs au point fixe. On pourra supposer u_0, v_0, w_0 nuls et, le mouvement relatif n'existant pas, les coordonnées $xyz\ldots$ de chaque point seront des constantes. En appelant $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ trois quantités arbitraires indépendantes du temps, nous pourrons poser

$$\begin{aligned}\delta x &= z\,\delta\mu - y\,\delta\nu,\\ \delta y &= x\,\delta\nu - z\,\delta\lambda,\\ \delta z &= y\,\delta\lambda - x\,\delta\mu,\end{aligned}$$

remarquons que

$$\begin{aligned}&\Sigma m x\,\delta x = \Sigma m y\,\delta y = \Sigma m z\,\delta z = 0,\\ &\Sigma m y\,\delta z = \delta\lambda\,\Sigma m y^2, \qquad \Sigma m z\,\delta y = -\delta\lambda\,\Sigma m z^2,\\ &\Sigma m z\,\delta x = \delta\mu\,\Sigma m z^2, \qquad \Sigma m x\,\delta z = -\delta\mu\,\Sigma m x^2,\\ &\Sigma m x\,\delta y = \delta\nu\,\Sigma m x^2, \qquad \Sigma m y\,\delta x = -\delta\nu\,\Sigma m y^2,\end{aligned}$$

dès lors

$$\Sigma m u\,\delta u = \Sigma m(qz - ry)(q\,\delta z - r\,\delta y) = -qr(\Sigma m y\,\delta z + \Sigma m z\,\delta y),$$

ou

$$\Sigma m u\,\delta u = -qr\,\delta\lambda(\Sigma m y^2 - \Sigma m z^2) = -qr\,\delta\lambda(\mathrm{C} - \mathrm{B});$$

de même,

$$\Sigma m u\,\delta x = q\,\delta\mu\,\Sigma m z^2 + r\,\delta\nu\,\Sigma m y^2,$$

de sorte que, par symétrie, nous obtenons

$$\delta\sum\frac{m(u^2+v^2+w^2)}{2} = -(\mathrm{C}-\mathrm{B})qr\,\delta\lambda - (\mathrm{A}-\mathrm{C})rp\,\delta\mu - (\mathrm{B}-\mathrm{A})pq\,\delta\nu,$$

$$\Sigma m(u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z) = \mathrm{A}p\,\delta\lambda + \mathrm{B}q\,\delta\mu + \mathrm{C}r\,\delta\nu,$$

comme d'autre part

$$\delta\mathrm{U} = \delta\lambda\,\Sigma(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) + \delta\mu\,\Sigma(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) + \delta\nu\,\Sigma(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}),$$

nous aurons, en égalant les coefficients de $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ dans les deux nombres, après avoir changé les signes, les équations bien connues

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C}-\mathrm{B})qr = \mathrm{L},$$

$$\mathrm{B}\frac{dq}{dt} - (\mathrm{A}-\mathrm{C})rp = \mathrm{M},$$

$$\mathrm{C}\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B}-\mathrm{A})pq = \mathrm{N}.$$

et, tout comme dans la méthode ordinaire, nous les avons établies sans nous préoccuper des relations qui existent entre p, q, r et les véritables inconnues de la question, c'est-à-dire les trois angles d'Euler.

LES AUTOGRAPHES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE;

PAR M. PAUL TANNERY.

CINQUIÈME ARTICLE.

VI.

Les pamphlets mathématiques contre Descartes.

En dehors de celles dont nous avons parlé précédemment, les lettres inédites de Descartes à la Bibliothèque Nationale ou ne traitent pas de sujets mathématiques (1) ou se rapportent à la dispute contre Roberval en 1646 et 1647.

Avant de raconter cette dispute, qu'il faut bien distinguer de la discussion de 1638, touchant la méthode *de maximis et minimis* de Fermat, et qui seule transforma en une hostilité déclarée la rivalité des deux amis de Mersenne, je crois opportun de signaler certaines attaques antérieures dont la *Géométrie* de Descartes avait été l'objet et d'établir qu'elles n'ont nullement eu Roberval pour auteur.

(1) Celle du 23 juin 1641 concerne les objections de Gassendi contre les *Méditations*. J'y relève toutefois que Sainte-Croix, connu par ses questions numériques (*Lettres de Descartes*, Clerselier, III, 74), servait de conseil à Mersenne pour les relations avec les sorbonistes.

La lettre non datée f°s 49-50 du MS. fr. n. a. 5160 est celle écrite en latin et destinée à être montrée au Provincial des jésuites, que Descartes joignit à la lettre à Mersenne du 22 décembre 1641 (Clerselier, III, 28).

La lettre du 23 novembre 1646 parle d'une maladie de Clerselier, du Livre de Regius *Fundamenta Physices* et de divers détails.

Le MS. de la Bibliothèque Nationale fr. n. a. 5161, formé avec les papiers de Roberval du fonds Libri, contient trois pièces, qui sont de véritables pamphlets mathématiques contre Descartes.

Libri les a attribuées au professeur en la chaire de Ramus au Collège de France; mais cette attribution est sans valeur : ce sont des copies, à la vérité probablement faites pour Roberval, mais dont l'incorrection suffirait à prouver qu'elles ne reproduisent pas un texte écrit par lui.

Sur ces trois pièces l'une (f° 11) intitulée :

Qu'il est faux que les équations qui ne montent que jusques au quarré soient toutes comprises en celles dont le Méthodique s'est servi en sa résolution prétendue du lieu ad quatuor lineas.

paraît incomplète; elle est d'ailleurs d'un ton beaucoup moins violent que les deux autres qui portent les titres :

(f° 5) *Erreurs du s^r Descartes touchant le nombre des racines de chaque équation.* (f° 1) *Défauts de quelques règles du s^r Desc. et que sa distinction des racines en réelles et imaginaires est impertinente et ridicule.*

Ces deux dernières, dont l'une est la suite de l'autre, sont incontestablement du même auteur; comme on y trouve la désignation « le Méthodique » pour Descartes, de même que dans le titre de la première, on peut croire que celle-ci est également de la même main, mais écrite à une date où le pamphlétaire était moins animé contre l'auteur de la *Géométrie*.

Je dis *pamphlétaire,* parce que ces trois pièces ont dû circuler anonymes; que, quoique écrites sous forme de lettres, elles n'ont pas eu, plus que les *Provinciales,* de destinataire effectif; qu'enfin le nom de leur auteur n'a pas été divulgué.

Dans la lettre de Carcavi à Descartes du 24 septembre 1649 (*Lettres de Desc.*, Clerselier, III, 78, p. 457), on lit en effet :

« M'ayant [Roberval à Carcavi] encore assuré sur ce sujet (ce que je ne vous écrirois point si vous n'aviez intérêt de le savoir) qu'il pourroit vous reprocher ce qu'un anonyme qui a fait quelque petit écrit d'Algèbre vous objecte (quelques-uns croient que c'est

un Père Jésuite), que dans la formation de vos équations vous ne faites que redire ce qui a été publié dès l'année 1631 par un Anglois nommé Hariot, duquel nous n'avons pas ici grande connoissance, du moins moi, qui suis etc. »

Ce passage désigne, à n'en pas douter, le troisième pamphlet; mais les Jésuites (Carcavi voulait peut-être parler du P. Bourdin) en sont bien innocents. Le tout doit être mis sur le compte de Jean de Beaugrand, qui a manœuvré d'une façon analogue contre Desargues et qui se trouve déjà indiqué suffisamment par les titres cités plus haut.

Le sobriquet de *Méthodique* répond, en effet, à celui du *Géostaticien,* dont Descartes l'avait affublé dans sa correspondance avec Mersenne; les mots *impertinente et ridicule* répliquent à ceux dont Descartes s'était servi dans l'examen de la Géostatique de Beaugrand ([1]).

Les Notes dont j'accompagnerai la publication ci-après des trois pamphlets constitueront une démonstration complète de l'attribution que je propose. Pour le moment, je me bornerai à rappeler les origines de la discussion entre Beaugrand et Descartes.

Le premier, qui mourut à la fin de 1640, avait comme mathématicien, avant la publication de sa Géostatique, en 1636, une certaine notoriété qu'il s'était acquise en donnant sur l'*Isagoge* de Viète, en 1631, des *Scholies* en parties recueillies par Schooten dans son édition de Viète de 1646. Il était d'ailleurs en relation avec les géomètres les plus marquants, notamment avec Desargues ([2]) et Fermat ([3]), dont il ne sut pas conserver l'amitié.

([1]) *Lettres de Descartes,* Clerselier, III, 62. Le texe imprimé (p. 346) porte : « tout ce que contient ce Livre de Géostatique est *si peu de chose* ». Mais l'original (B. N. fr. n. a. 5160, f° 3, v°) donne « si impertinent, si ridicule et si mesprisable ». Dans la lettre à Mersenne du 27 juillet 1638 (Clerselier, III, 66, p. 373), Descartes recommande d'ailleurs au Minime, s'il fait imprimer son *Examen de la Géostatique,* de supprimer les mots *si impertinent, si ridicule.*

([2]) Il se brouilla avec lui à l'occasion de sa *Géostatique* et l'attaqua dans une lettre imprimée, datée du 20 juillet 1640 (*Œuvres de Desargues,* éd. Poudra; Paris, Leiber, 1864, II, p. 357-378).

([3]) C'est à lui que Fermat adressa d'abord ses Écrits mathématiques, avant de prendre Carcavi comme son principal dépositaire. Leur liaison se refroidit après la publication de la *Géostatique,* mais il n'y eut pas de rupture complète.

Beaugrand avait enfin une situation officielle considérable ([1]).

Lorsque Mersenne reçut, dans les premiers mois de 1637, un exemplaire du *Discours de la méthode* et des *Essais,* envoyé en France avant l'achevé d'imprimer et qui devait être présenté au Chancelier pour obtenir le privilège, Beaugrand se fit communiquer la *Dioptrique* et la retint contre toute bienséance ([2]) (*Lettres de D.,* III, p. 426), quoiqu'il témoignât ensuite en faire peu d'état. Plus tard, il se fit remettre de l'Ouvrage complet un exemplaire qu'il refusa de payer. La *Géométrie* lui parut aisée à tirer de Viète et il promit de donner dans une préface des moyens pour trouver les tangentes de toutes les lignes courbes qui seraient meilleurs que ceux de Descartes.

Celui-ci répondit là-dessus à Mersenne avec vivacité (III, p. 428), et sa Lettre, à laquelle le troisième pamphlet fait des allusions évidentes, dut être communiquée *in extenso* à Beaugrand, par une indiscrétion dont le Minime ne fut sans doute pas directement responsable, mais qui probablement n'eut lieu que plus tard.

En tout cas, Beaugrand continua à provoquer Descartes. Il lui fit envoyer, en mars 1638, un billet quelque peu arrogant ([3]), où il disait que la *Géométrie* ne donnait rien des équations que Viète n'eût donné plus doctement; que l'auteur n'était pas excusable de n'avoir pas vu Viète (ce que Descartes avait déclaré sur la première observation de Beaugrand); qu'enfin il aurait dû développer les lieux solides, etc. Descartes ne répondit encore qu'à Mersenne (III, 69) par une lettre destinée au Minime seul.

En juin 1638, Descartes prend l'offensive à son tour. Comme depuis longtemps Mersenne insistait pour avoir son opinion sur la Géostatique, il rédigea l'examen dont nous avons parlé plus haut et qui, cette fois, devait être communiqué dans le cercle des amis de Mersenne, dont Beaugrand ne pouvait dès lors manquer d'être informé. Il fut évidemment blessé au vif.

([1]) « Regi Franciæ Domui Regnoque ac ærario sanctiori a consiliis secretisque », dit le frontispice de la *Géostatique;* Poudra le qualifie de secrétaire du Roi.

([2]) Ce fut lui qui l'envoya à Fermat.

([3]) Descartes fut notamment blessé de l'expression : *Qu'il démontre, etc.*

En juillet, Mersenne informe Descartes que Beaugrand écrit contre lui. Le 27, Descartes répond (III, p. 372-373) :

« Pour le Géostaticien, je vous assure que je me soucie fort peu si lui ou ses semblables écrivent contre moi, car plus il y en aura qui s'en acquitteront mal, plus la vérité paroîtra, et je sais bien qu'ils ne sauroient s'en acquitter que très mal.

» Lorsque j'avois dit que le libraire lui devoit envoyer un sergent, j'entendois parler de mon libraire, à qui vous m'aviez mandé qu'il devoit un exemplaire, qu'il refusoit de payer (¹). »

Enfin, le 23 août, il réplique dans une lettre à Mersenne (III, 65; Cousin, VII, p. 107; cp. VII, p. 173) à des objections anonymes contre sa Géométrie, objections qu'il juge provenir de Beaugrand. Ces objections portaient :

1° Sur ce que, page 381 (éd. Hermann, Paris 1886, p. 63, au bas), Descartes dit que, si l'on peut diviser le premier membre d'une équation égalé à o par un binôme $x - a$, où a est une quantité connue (positive ou négative), « ou bien la quantité connue de ce binôme est la racine cherchée ou bien l'équation divisée par lui se réduit » à un degré inférieur. La quantité connue sera toujours, disait le critique, l'une des valeurs de la racine ou réelle ou imaginaire (²);

2° Sur ce que, si par le mot de *racine* Descartes entend seulement la valeur réelle, il ne laisse pas d'y avoir autant à redire, d'autant qu'il arrive souvent qu'après la réduction il n'y a plus rien à faire;

3° Sur ce que la règle donnée procède à tâtons;

4° Sur ce que cette règle, donnée pour les équations cubiques, n'est plus générale, à cause que, pour l'appliquer aux équations de quarré de quarré, il les faut réduire aux cubiques, et qu'elle ne sert point pour celles qui montent à plus de dimensions.

Descartes répondit à ces chicanes d'une façon relativement

(¹) Je tire cet alinéa de l'original.

(²) Ces termes sont employés non dans le sens de Descartes, mais dans celui que prétend faire adopter le troisième pamphlet, c'est-à-dire : *positive ou négative*.

civile et en termes qui pouvaient être communiqués à Beaugrand.

Là se bornent les indications que donne sa correspondance sur cette polémique, et il ne semble jamais avoir eu connaissance des pamphlets qui nous ont été conservés dans les papiers de Roberval. A vrai dire, ces pamphlets n'ont aucune valeur au point de vue mathématique et, si Mersenne les connut, il put très bien négliger de les adresser à Descartes.

L'historique qui précède a cependant son importance; il excuse en partie la vivacité apportée par Descartes dans sa polémique de 1638 contre Fermat et Roberval et la singulière méfiance dont il témoigne à leur endroit. Sans doute il s'adressait mal, en supposant de la jalousie et de la mauvaise foi chez des adversaires qui possédaient l'un et l'autre toute la dignité que pouvait leur inspirer la conscience de leur propre valeur. Mais Descartes connaissait les mœurs de son temps et derrière les agissements apparents d'un Beaugrand, par exemple, il soupçonnait la bassesse de la médiocrité envieuse. Ne l'estimant pas assez pour se mesurer avec lui, saisissant au contraire la première occasion de lutter contre des adversaires de son rang, il eut le tort de se comporter vis-à-vis d'eux comme il aurait pu le faire en toute justice envers le premier.

Les pamphlets que nous allons reproduire maintenant présentent au reste, malgré leur insignifiance scientifique, un intérêt historique assez sérieux pour que je croie devoir les donner *in extenso*. Leur date ne peut être exactement fixée; mais ils sont presque certainement de 1638 et j'estime que le premier est antérieur à juin (c'est-à-dire à l'examen de la Géostatique), que les autres sont au contraire postérieurs.

VII.

Le premier factum anonyme contre la Géométrie de Descartes.

« Monsieur,

» Encore que vous soyez ami de M. Desc., je crois que vous le serez assez de la vérité pour confesser que ce qu'il a dit de la composition des lieux solides est imparfait et défectueux, puisque vous avouez que celui dont vous désirez une résolution

ne la peut recevoir par le moyen des équations dont il fait mention en la résolution qu'il prétend donner du lieu des anciens mathematiciens *ad quatuor lineas* ([1]). Sans doute il n'aura pas fait en cet endroit les dénombrements ni les revues générales ([2]) qui font la quatrième partie de son illustre Méthode, bien que ce grand et clairvoyant esprit nous proteste d'avoir achevé et mis la dernière main à tout ce que les autres avoient entrepris et commencé sur ce sujet.

» *Au reste*, dit-il, p. 334 ([3]), *à cause que les équations qui ne montent que jusques au quarré sont toutes comprises en ce que je viens d'expliquer, non seulement le problème des anciens en trois et quatre lignes est ici entièrement achevé, mais tout ce qui appartient à ce qu'ils nommoient la composition des lieux solides et par conséquent aussi, etc.* Néanmoins vous soutenez que si, en recherchant la manière de construire un lieu solide par le moyen de l'Algèbre, on rencontre une équation de même forme que celle-ci ([4]) :

$$ae + ce \text{ égal à } ba + x,$$

cette équation n'est point comprise en aucunes de celles qu'il s'est donné la peine d'expliquer.

» Considérez les lignes droites AC, FD (*fig.* 5), données de position et de grandeur, le point B pris à volonté en la ligne droite FD prolongée indéfiniment, et la ligne BI parallèle à CA.

» Je dis : si le rectangle FB, BI, moins le rectangle DB, AC, est égal à l'espace x donné, le point I sera dans une hyperbole que vous dessinez en cette sorte.

([1]) Cette critique se rapporte à celle faite par Beaugrand en mars 1638 dans son billet pour Descartes.

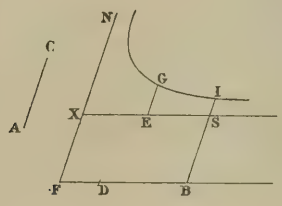
([2]) Allusion à un passage célèbre du *Discours de la Méthode*.

([3]) *Géométrie de Descartes*, éd. Hermann, p. 28.

([4]) A la différence de Descartes, qui, le premier, adopta pour les inconnues les dernières lettres de l'alphabet, l'anonyme les désigne par les voyelles, selon l'usage de Viète. L'omission qu'il signale dans la *Géométrie* existe d'ailleurs réellement, Descartes ayant discuté l'équation complète du second degré sous la forme à laquelle amène le problème du lieu à quatre droites; mais la critique porte à faux, vu l'arbitraire que laisse Descartes dans le choix des axes.

» Prenez le point B où vous voudrez en la droite FD prolongée indéfiniment, et tracez BI parallèle à AC et de telle grandeur que le rectangle FB. BI soit égal à l'espace x plus le rectangle AC, DB; de laquelle BI vous couperez BS égal à AC et tirerez par les points S, F les deux droites FXN, SX, celle-ci parallèle à FD et

Fig. 5.



celle-là parallèle à BI. Et puis, au dedans des asymptotes XN, XS, vous décrirez une hyperbole par la quatrième prop. II d'Apollonius, si vous en désirez connoître le côté droit et le côté traversant, ou bien en tirant la droite EG parallèle à AC et faisant le rectangle XE.EG égal au rectangle XS.SI; car le point G sera un des points de l'hyperbole décrite alentour des asymptotes XN, SX, et qui passe par le point I, et tous les autres points de cette ligne se trouveront en observant le même ordre, ce qui est une manière aussi courte pour tracer tant de points de l'hyperbole qu'on voudra, qu'aucune de celles qui ont été recueillies par le Père Cavalieri (1), M. Mydorge (2) ou les autres qui ont écrit sur ce sujet.

» Au reste, je ne m'arrête point à distinguer les différents cas des diverses solutions, ni à la démonstration de ce que j'ai dit ci-dessus, pource que le tout se déduit facilement de la douzième prop. II d'Apollonius. Après tout, il est évident qu'en cherchant ce lieu par l'Algèbre, on trouvera une équation de même forme que la vôtre, car, puisque les droites AC, FD sont données, nommons l'une b et l'autre c, et les grandeurs DB, BI étant vagues et indéterminées, appelons celle-ci e et celle-là a. Le rectangle FB,

(1) *Lo Specchio ustorio ovvero trattato delle sectione coniche.* Bologna, 1632.

(2) *Claudii Mydorgii patricii parisini... Conicorum operis... liber primus et secundus.* Paris, 1631.

BI sera $ae + ce$; le rectangle DB.AC, ba, et par conséquent

$ae + ce$ sera égal à $ba + x$. »

Le texte du manuscrit s'arrête là; mais, quoique la question traitée ne réclame aucun autre développement, il est difficile de croire que l'écrit se bornât à cette maigre remarque sur une lacune de la *Géométrie* évidemment voulue de la part de Descartes.

Il était facile de multiplier des observations de ce genre; l'Ouvrage les appelait de lui-même et c'est ainsi que Florimond de Beaune fit ses Notes. Il ne pouvait y avoir dans ce factum de réellement déplaisant pour Descartes, que le ton ironique du début. Nous verrons dans les écrits suivants une tout autre vivacité, tandis que l'argumentation est, au contraire, beaucoup moins sérieuse.

VIII.

Second factum anonyme contre la Géométrie de Descartes.

Cher ami,

Veux-tu que je te fasse voir un échantillon des faussetés et des erreurs que je t'ai dit avoir remarquées en la Géométrie de ce nouveau Méthodique, qui se vante de cinq ou six batailles auxquelles il a eu l'heur de son côté [remporté la victoire] et qu'il ne lui en reste plus que deux ou trois semblables pour arriver au but de ses desseins, c'est-à-dire à une entière et parfaite connoissance de toutes choses.

A n'en point mentir, j'ai de la peine à croire qu'il soit ni si grand capitaine, ni si heureux qu'il nous le veut persuader, et j'ai sujet de penser que, s'il a surmonté quelques difficultés, il n'en a pas tant d'obligation à la force de son esprit ni à l'excellence de sa méthode qu'à la foiblesse des objets sur lesquels il s'est exercé. Tu sais bien que l'un des plus grands secrets de cette science que l'on nomme ordinairement *Algèbre* dépend de la connoissance des équations, de leurs propriétés et de leurs différents symptômes, et à les savoir adroitement métamorphoser les uns aux autres; en quoi toutefois il a si peu réussi qu'au contraire tout le discours qu'il en a fait est rempli de larcins, de manquements ou d'erreurs.

Sachez donc (¹), prononce magistralement ce *philosophus miles* dans le commencement de ce discours (page 372), *qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité*. Et moi je veux lui apprendre qu'il y a beaucoup d'équations où il est impossible que la quantité inconnue ait autant de valeurs qu'elle a de dimensions. Mais, pour ne faillir point comme lui, qui a oublié la raison de ce qu'il a témérairement avancé et de nous dire sur quoi il s'est fondé pour rendre sa proposition générale, laquelle reçoit plusieurs exceptions, je veux démontrer la mienne, qui lui est diamétralement opposée et qui ne peut être vraie si la sienne n'est fausse.

Soit

$$X''' - AAH \text{ égal à } X.$$

Il est certain que la quantité inconnue de cette équation a toujours une valeur positive (²), laquelle je veux nommer $+B$, et je soutiens qu'elle ne peut avoir aucune autre valeur soit positive, ou même négative.

Accordons que $+D$ soit, si faire se peut, une autre valeur positive de cette équation; de là il s'ensuit que $B''' - BBH$ est égal à X, et que $D''' - DDH$ est aussi égal à X et, par conséquent, $B''' - BBH$ égal à $D''' - DDH$, puis, en transposant, $B''' - D'''$ égal à $BBH - DDH$. Et, divisant tout de part et d'autre par $B - D$, vous trouverez que $BB + BD + DD$ est égal à $BH + DH$ et, en transposant, DD sera égal à $DH - DB + BH - BB$. Or est-il que DD étant une quantité positive, il faut nécessairement que la quantité H soit plus grande que la quantité B, pource qu'autrement tant l'une que l'autre partie de la dernière équation seroit moindre que rien. D'ailleurs, $B''' - B''H$ étant égal à X, il s'ensuit que la quantité H

(¹) *Géométrie de Descartes*, édition Hermann, page 55, au bas.

(²) Ce texte est le plus ancien connu actuellement où les termes de racines positive et négative soient employés au sens actuel; dans le traité posthume de Roberval, *de Recognitione æquationum*, la nomenclature est différente : la *radix positiva* correspond à la racine réelle, qui est en valeur absolue, soit *supra nihilum*, soit *infra nihilum;* elle sera donc *affirmativa* (positive) ou *negativa*. Ces deux derniers termes dérivent des *affirmata* et *negata* de Viète. Descartes disait *vraie* ou *fausse*.

est moindre que la quantité B et, par conséquent, si nous avouons que la quantité inconnue de cette équation $A''' - A''H - X$ peut avoir deux valeurs positives, il faut aussi accorder cette autre absurdité qu'une même quantité peut être tout ensemble et plus grande et plus petite qu'une autre quantité. Mais je suis assuré qu'il n'y a personne qui ne juge plus raisonnable de conclure qu'il est impossible que la quantité inconnue de l'équation dont il s'agit ait plus d'une valeur positive.

Il est évident aussi qu'elle ne peut avoir aucune valeur négative; car, si cette quantité inconnue étoit égale à $-D$, il s'ensuivroit que $-D''' - D''H$ seroit égal à $+X$, ce qui ne se peut.

D'où il est tout clair qu'en l'équation proposée la quantité inconnue a moins de valeurs qu'elle n'a de dimensions. Qui est ce qu'il falloit démontrer.

Il me seroit aussi facile de prouver qu'en cette autre équation

$$A''' + AX \text{ égal à } S,$$

la quantité inconnue n'a qu'une seule valeur positive et qu'elle n'en peut avoir aucune autre, soit positive, soit négative. Car, sa valeur positive étant $+B$, si l'on veut soutenir qu'elle a encore une autre valeur positive comme seroit $+D$, on est contraint d'avouer que $B''' + XB$ est égal à $D''' + XD$ et, transposant, que $B''' - D'''$ est égal à $+XD - XB$, et puis, divisant l'une et l'autre partie de cette équation par $B - D$, vous trouverez qu'il s'ensuit de cette hypothèse que $BB + BD + DD$ est égal à $-X$, ce qui est absurde, et par conséquent, si $+B$ est la valeur d'A, il est certain que $+D$, c'est-à-dire aucune autre valeur positive, ne la sauroit être.

De même, si on suppose que $-D$ soit la valeur de la quantité inconnue de cette équation, $-D''' - XD$ sera égal à $+S$, ce qui est une autre absurdité aussi grande que la précédente. Et, par conséquent, il est évident qu'en cette seconde équation, aussi bien qu'en la première, la quantité inconnue a moins de valeurs que de dimensions.

Je pourrois alléguer cent autres équations semblables, mais, pour ne rien faire d'inutile, puisqu'une seule instance suffit pour détruire l'universalité d'une proposition et même la proposition tout entière, il sera plus à propos que, par un nouveau raisonne-

ment, je fasse connaître qu'il répugne à la nature des deux précédentes que leur quantité inconnue ait plus d'une valeur, bien qu'elle ait trois dimensions.

Il est aisé de concevoir qu'une équation cubique est souvent le produit d'une équation quarrée multipliée par une équation du premier degré, et qu'alors, en celles qui n'ont pas de troisième terme, il faut que la quantité connue du second terme de l'équation quarrée, multipliée par la quantité connue de l'équation du premier degré, soit égale à la quantité connue de l'équation quarrée. Ce qui ne peut arriver qu'en l'une des quatre manières suivantes :

(1).

$$\begin{array}{lll} aa - sa + sb & & \text{Équation quarrée} \\ \quad a + b & & \text{Équation du premier degré} \\ \hline a''' - saa + sba & & \\ \quad + baa - sba + sbb & & \\ \hline a''' - saa \quad \text{o} \quad + sbb & & \text{produit} \\ \quad + baa & & \end{array}$$

(2).

$$\begin{array}{l} aa - sa - sb \\ \quad a - b \\ \hline a''' - saa - sba \\ \quad - baa + sba + sbb \\ \hline a''' - saa \quad \text{o} \quad + sbb \\ \quad - baa \end{array}$$

(3).

$$\begin{array}{l} a'' + sa - sb \\ \quad a + b \\ \hline a''' + saa - sba \\ \quad + baa + sba - sbb \\ \hline a''' + sa'' \quad \text{o} \quad - sb'' \\ \quad + ba'' \end{array}$$

(4).

$$\begin{array}{l} a'' + sa + sb \\ \quad a - b \\ \hline a''' + saa + sba \\ \quad - baa - sba - sbb \\ \hline a''' + sa'' \quad \text{o} \quad - sb'' \\ \quad - ba'' \end{array}$$

Or, cette équation, $A''' - AAH - X$, ne peut être de même forme que le premier ni le second produit, à cause qu'en l'un et en l'autre le troisième terme est marqué par le signe $+$ et, en cette équation, il est marqué par le signe $-$. Elle ne peut être aussi de même forme que le troisième produit, pource que le second terme est nécessairement marqué par $+$ et, en cette équation, il est marqué par $-$. Et elle ne pourroit être non plus de même forme que le quatrième produit, si ce n'est que l'on suppose que la quantité B soit plus grande que la quantité S, afin que

par ce moyen il y ait au second terme de ce produit une quantité marquée par —.

Or, si B surpasse S, on m'accordera que BS surpasse aussi SS et à plus forte raison $\frac{1}{4}$SS, auquel rencontre il est impossible de trouver deux équations du premier degré par la multiplication desquelles on puisse produire AA + SA + SB, d'autant que, lorsque deux équations du premier degré se multiplient, la quantité connue de leur produit n'est jamais plus grande que le quarré de la moitié de la partie connue du second terme, mais toujours moindre ou égale, ainsi qu'il se prouve facilement par la 5e prop. II d'Euclide et savent tous ceux qui ont appris de Clavius, Nonius ou les premiers Éléments de l'Algèbre.

D'où on voit manifestement qu'il est impossible que cette équation, A''' — AAH — X, ait plus d'une seule valeur, attendu que, si on la divise par la quantité inconnue moins sa valeur positive, le quotient est une équation quarrée en laquelle la quantité connue surpasse le quarré de la moitié de la partie connue du second terme.

Prouvons la même chose de cette autre équation, A''' + XA — S. Pour la produire par la multiplication d'une équation du premier degré et d'une équation quarrée, il faut que la quantité connue du second terme de l'équation quarrée soit égale à la quantité connue de l'équation du premier degré, et que le second terme de l'équation quarrée soit marqué par +, si la quantité connue de l'équation du premier degré est marquée par —, et au contraire. Ce qui ne se peut faire qu'en ces quatre façons différentes (¹).

L'on voit clairement que cette seconde équation cubique ne peut en façon quelconque être de même forme que le premier, le second ni le troisième produit, et qu'elle ne sait être non plus de même forme que le quatrième sans que x surpasse le quarré de s, auquel cas x sera, à plus forte raison, plus grande que $\frac{1}{4}ss$ et il est impossible de trouver deux équations du premier degré par la multiplication desquelles on puisse produire $aa + sa + x$, pour la même raison que j'ai ci-dessus touchée.

(¹) Le texte donne ici sous la même forme que pour les produits précédents : 1° $(a^3 - sa - x)(a - s)$; 2° $(a^3 - sa - x)(a - s)$; 3° $(a^3 - sa - x)(a - s)$; 4° $(a^3 + sa + x)(a - s) = a^4 + (x - s^2)a - xs$.

D'où il est évident qu'en cette équation, $A''' + XA - S$, aussi bien qu'en la précédente, la quantité inconnue ne peut avoir qu'une seule valeur.

Si l'on prend en nombres quelques équations de même forme que les deux précédentes, comme celles-ci :

$$A''' - 31A'' - 12168,$$
$$A''' + 64A - 2496,$$
$$A''' + 729A - 18954,$$

la racine de la première est 39, de la seconde 12 et de la troisième 18, et on ne sauroit donner aucune autre racine de ces équations.

Peut-être que le sieur Descartes, pour éluder ces preuves, se voudra servir de la distinction qu'il fait des racines d'une équation en réelles ou imaginaires ([1]), mais je te montrerai, quand il te plaira, qu'en cette distinction il n'y a aucune réalité, qu'elle n'a de fondement que dans le caprice de son auteur, qu'elle est du tout ridicule et impertinente ([2]).

Au reste, avant que de te quitter, je te veux encore dire un mot des manquements de la règle que donne notre Méthodique pour connaître combien en chaque équation il y a de racines positives et combien de négatives. Car d'autant qu'en cette équation ([3]) (p. 373)

$$a^{\text{IV}} - 4a''' - 19a'' + 106a - 120,$$

il y a trois changements de signes et que deux signes semblables s'entresuivent une seule fois, il conclut qu'il y a trois vraies racines et une fausse seulement; ce qui n'est pas universellement véritable, y ayant beaucoup d'équations où il ne peut y avoir autant de vraies racines qu'il y a de changements de signes, comme celle-ci

$$AAA - DAA + BBA - DBB,$$

où il y a trois changements de signes, bien qu'il n'y ait que une

---

([1]) *Géométrie*, éd. Hermann, p. 63.

([2]) Expressions employées par Descartes dans sa critique de la Géostatique de Beaugrand (Clerselier, III, p. 373).

([3]) Voir *Géométrie*, éd. Hermann, p. 57.

seule racine positive, à savoir + D, ainsi qu'il est aisé de vérifier. Et il y a aussi des équations où il peut y avoir plus de fausses racines qu'il n'y a de fois deux signes + ou deux signes — qui s'entresuivent, comme en celles-ci :

$$\begin{array}{llll} AAA & 0 & -SA & +X, \\ AAA & -BAA & 0 & +X, \end{array}$$

où il peut y avoir une fausse racine, bien qu'il n'y ait point deux signes semblables de suite, car pour le second terme, qui est nul en la première, et le troisième qui est nul en la seconde, il n'y a aucune raison de dire qu'ils soient plutôt marqués d'un signe que de l'autre [1].

Si B est 1, S 13, X 12, vous aurez en nombres ces deux équations

$$\begin{array}{llll} AAA & 0 & -13A & +12, \\ AAA & -1AA & 0 & +12, \end{array}$$

en chacune desquelles il y a une fausse racine qui est — 1 en la première et — 2 en la seconde.

De même, en ces deux autres équations

$$\begin{array}{llll} AAA & +BAA & 0 & -X, \\ AAA & 0 & -SA & -X, \end{array}$$

il peut y avoir deux fausses racines, et néanmoins il n'y a deux signes semblables de suite qu'une seule fois en chacune.

J'abuserois de ta patience, si je m'arrêtois à particulariser davantage les autres défauts de cette règle et à te montrer comme elle contredit à la précédente.

Si cet entretien t'est agréable, je te puis assurer qu'il ne finira pas de longtemps, et que j'ai une ample matière de contribuer à tes passetemps. Adieu.

Je suis, cher ami, etc.

---

[1] L'application de la règle de Descartes dans le cas où un terme manque et son emploi pour la détermination, dans ce cas, du nombre des racines imaginaires, n'ont été expliqués que dans les commentaires de Schooten sur la *Geometrie*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Horn (J.). — *Ueber Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen. Beiträge zur Verallgemeinung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Gr. in-8°, 123 S. Berlin, Mayer et Müller. 3 M. 60 Pf.

Jacobi (C.-G.-J.). — *Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften.* 5 Bd. Herausgeg. von K. Weierstrass. Gr. in-4°, VII-515 S. Berlin. G. Reimer. 16 M.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 17 u. 19. In-8°. Leipzig, Engelmann.

17. A. Bravais' Abhandlung über symmetrische Polyeder (1849). Uebersetzt und in Gemeinschaft mit P. Gerth harausgeg. von C. u. E. Blasius. 50 S. m. 1 Taf. Geb. 1 M. — 19. Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von Laplace (1782), Ivory (1809), Gauss (1813), Chasles (1838) und Dirichlet (1839). Herausgeg. von A. Wangerin. 118 S. Geb. 2 M.

Richter (O.) — *Ueber die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die eine bicirculare Curve 4. Ordnung viermal berühren.* Gr. in-8°, III-111 S. m. Fig. u. 4 Taf. Leipzig, Teubner. 4 M.

Wallenberg (G.). — *Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen 1. Ordnuug, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitung bis zum 3. Grade besitzen.* Gr. in-8°, 44 S. Berlin, Mayer et Müller. 1 M. 20 Pf.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. N° 20. In-8°. Leipzig, Engelmann.

Abhandlung über das Licht. Worin die Ursachen der Vorgänge bei seiner Zurückwerfung und Brechung, und besonders bei der eigenthümlichen Brechung des isländischen Spathes dargelegt sind. Vor Ch. Huyghens (1678). Herausgegeben von E. Lommel. 115 S. m. Textfig. Geb. 2 M. 40 Pf.

Laplace. — *Œuvres complètes de Laplace.* Publié sous les auspices de l'Académie des Sciences, t. VIII, in-4°, 509 p. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

Maleyx (L.). — *Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition.* In-8°, 151 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 2fr, 50.

WEBER (H.). — *Elliptische Funktionen u. algebraische Zahlen.* Akadem. Vorlesungen. gr.-8°, XIII-504 S. Braunschweig, Vieweg et Sohn. 13 M.

GILBERT (P.). — *Cours de Mécanique analytique.* Partie élémentaire. 3e édition, in-8°, IX-526 p. Bruxelles. 11 fr.

GILBERT (P.). — *Recherches sur les accélérations en général.* In-8°, 57 p. Bruxelles.

LÉVY (M.). — *L'Hydrodynamique moderne et l'hypothèse des actions à distance.* Leçon d'ouverture faite au Collège de France. In-8°, 28 p. Paris, Doin.

ROUTH (E.-J.). — *A Treatise on Analytical Statics.* With numerous Examples. Vol. I. Post-8°, 380 p. London, Cambridge Warehouse. 14 sh.

BIOCHE (C.). — *Introduction à l'étude de la Géométrie moderne.* In-8°, VIII-96 p. avec fig. Paris, Delagrave.

BRAUNMUHL (A. v.). — *Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom.* 8° V-92 S. m. Abbildgn. Bamberg, Buchner. 1 M. 40 Pf.

BROSINSKY (AD.). — *Ueber die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen.* Inauguraldiss. 36 S.-4° Göttingen.

CELLERIER (CH.). — *Mémoire sur les variations des excentricités et des inclinaisons.* In-4°, 208 p. Paris, Impr. nationale.

CLEBSCH (A.). — *Vorlesungen über Geometrie bearb. von F. Lindemann.* Die Flachen 1. u. 2. Ordnung oder Klasse und der lineare Complex. Gr.-8° VIII-650 p. Leipzig, Teubner. 12 M.

D'ARCAIS (F.). — *Corso di calcolo infinitesimale.* Vol. I. 8°. Padova, Draghi. 11 L.

HEYMANN (W.). — *Studien über die Transformation und Integration der Differential- u. Differenzengleichungen, nebst einem Anhang verwandter Aufgaben.* gr.-8° X-436 S. Leipzig, Teubner. 12 M.

MACÉ DE LÉPINAY (A.). — *Compléments d'Algèbre et Notions de Géométrie analytique.* 1 fasc. Compléments d'Algèbre. In-8°, 117 p. avec fig. Paris, Nony et Co.

MOSNAT (E.). — *Problèmes de Géométrie analytique,* t. I, in-8°, 354 p. avec figures. Paris, Nony et Co.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WALRAS (L.). — ÉLÉMENTS D'ÉCONOMIE POLITIQUE PURE. 1 vol. in-8°; XXIV-529 p. Lausanne, F. Rouge; 1889.

Quoique la compétence nous manque assurément pour parler comme il conviendrait d'un livre dont l'objet est en dehors des préoccupations habituelles des rédacteurs et des lecteurs du *Bulletin*, il nous a paru cependant indispensable de signaler la seconde édition des *Éléments d'économie politique pure* de M. Léon Walras, en raison de son caractère nettement scientifique et même mathématique. Pour l'auteur, en effet, les problèmes de l'échange, de la production et de la capitalisation sont, quand on les pose bien, des problèmes déterminés, comportant des équations en nombre rigoureusement égal à celui des inconnues, et le mécanisme de la hausse et de la baisse des prix sur le marché n'est autre chose qu'un mode de résolution par tâtonnement des équations de ces problèmes; il suffit, d'ailleurs, d'ouvrir son livre pour voir la grande place qu'y tiennent les Mathématiques, dont il a dû, d'ailleurs, résumer au début quelques théories d'ordre relativement élevé, afin de pouvoir être compris par les lecteurs qui ne sont pas familiers avec la Géométrie analytique et le Calcul intégral.

Si la première édition, qui date de 1874, contenait les idées essentielles de l'auteur sur la matière, celle-ci en constitue l'exposé définitif : elle résume les nombreux travaux qu'il a publiés depuis lors et laisse au lecteur une haute idée de l'enseignement que M. Walras donne depuis plus de vingt ans dans cette ville de Lausanne, qui, il y a quelques semaines, à l'occasion de la transformation de son Académie en Université, réunissait les délégués de toutes les Universités d'Europe, aussi charmés de la cordialité des habitants, qu'émerveillés par la vivacité et l'intensité de leur vie intellectuelle.

J. T.

Dr. POCKELS. — Ueber die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

und deren Auftretten in der mathematischen Physik, mit einem Vorwort von *F. Klein*. In-8°, 339 p. Leipzig, Teubner; 1891.

La solution de nombreux problèmes de Physique dépend de l'intégration de l'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad \left(\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Montrer son rôle dans chacun de ces problèmes et coordonner les recherches faites sur cette équation, tel est le but du petit Livre dont nous rendons compte. Son auteur s'est placé au point de vue physique et admet comme vrais les théorèmes donnés par l'expérience dont les démonstrations rigoureuses restent à trouver.

L'Ouvrage est divisé en quatre Parties :

I. Les problèmes physiques qui donnent naissance à l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$ peuvent se répartir en deux classes. Dans les uns, cette équation intervient d'une manière inévitable. Dans les autres, elle n'intervient que grâce à l'hypothèse que la solution est un produit de deux facteurs dont un seul contient le temps ou une des coordonnées; le second facteur satisfait alors à une équation de la forme $\Delta u + k^2 u = 0$, dans laquelle k^2 n'est pas directement connu, mais est racine d'une équation, en général transcendante. C'est à cette dernière classe qu'appartiennent la plupart des problèmes de la Physique. L'auteur énumère rapidement ces différents problèmes, ainsi que les travaux de Sturm et Liouville, de du Bois-Raymond, de MM. Picard, Bianchi et Schwarz [1] où cette équation se présente.

---

[1] Sturm, Liouville, *Journal de Liouville*, t. I, 1836.
Du Bois-Raymond, *Journal de Crelle*, t. 104, 1889.
Picard, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1888. *Acta Mathem.*, t. XII.
Bianchini, *Rendiconti d. R. A. dei Lincei*, t. V, 1889.
Schwarz, *Festschrift. Gesammelte Abhandlungen*, t. I, p. 236.

II. Pour qu'une solution soit utilisable en Physique, M. Pockels montre qu'elle doit être uniforme, finie et continue en tous les points d'un certain domaine fini à une, deux ou trois dimensions, que ses deux dérivées premières doivent être continues dans ce domaine et, en outre, qu'elle doit satisfaire, sur la limite de ce domaine, à d'autres conditions qui peuvent se ramener à la forme

$$\alpha u + \beta \frac{\partial x}{\partial \sigma} = 0,$$

α, β étant des fonctions connues et $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$ la dérivée de u, prise en chaque point de la limite suivant une direction connue. L'expérience indique qu'il y a un nombre infini de valeurs déterminées de k^2 (valeurs *distinguées, ausgezeichnete*), formant une masse discrète ou continue pour lesquelles une telle solution existe. Ces solutions de l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$, sont nommées solutions *distinguées*. La démonstration de leur existence est la partie délicate de chaque problème. M. Poincaré a montré récemment (¹) qu'on pourrait peut-être atteindre cette démonstration en suivant une méthode de Lagrange, employée par Lord Rayleigh (*Theory of sound*), et qui consiste à regarder un problème relatif à un corps continu comme un cas limite d'un problème relatif à un système formé d'un nombre fini, très grand, de molécules. Ceci conduit l'auteur à rappeler la théorie des petites vibrations d'un système matériel et à étudier le cas limite où les coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_n$, sont remplacées par une fonction de point $q(x, y, z)$ qui a la forme $\sum_1^\infty {}_h r_h u_h$.

Les quantités u_h ont été nommées par Lord Rayleigh *fonctions normales* et les quantités r_h qui ne contiennent que le temps *coordonnées normales*.

M. Pockels étudie ensuite en détail les cas résolus, c'est-à-dire les cas où l'on a pu déterminer effectivement les fonctions normales correspondant à un domaine donné, et il montre que l'on rencontre successivement les fonctions trigonométriques, les fonc-

(¹) *American Journal of Mathemat.*, t. XII, p. 211; 1890.

tions de Bessel, les fonctions sphériques et les fonctions de Lamé. Il expose, en finissant le Chapitre, la démonstration, due à M. Schwarz, de l'existence de la solution distinguée, correspondant à la plus petite valeur de k^2, le domaine étant quelconque et la façon dont k^2 dépend de la forme et des dimensions du domaine et des conditions aux limites.

III. Les propriétés des solutions de l'équation, indépendantes des conditions aux limites, forment le sujet de la troisième Partie. L'auteur y prend, comme guide, la théorie du potentiel. Il étudie les points singuliers à distance finie et montre que le point à l'infini est toujours singulier. Il donne la représentation des solutions par des intégrales prises sur des courbes ou sur des surfaces et parle des courbes ou des surfaces sur lesquelles elles s'annulent, et il fait voir que certaines propriétés rapprochent ces solutions des fonctions périodiques. En supposant que les points singuliers forment une masse continue à une, deux ou trois dimensions, il introduit, parallèlement aux solutions de l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$, celles de l'équation $\Delta u + k^2 u + 4\pi\rho = 0$ et l'exemple simple où les points singuliers couvrent uniformément une surface sphérique termine cette Partie. Ici auraient pu trouver place les beaux travaux de MM. Moutard et Darboux sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \lambda z = 0$. Cette équation se déduit, en effet, de l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$, par une transformation simple [1] $(x' = x + yi,\ y' = x = x - yi)$ et qui a un sens physique bien net.

IV. L'auteur aborde, comme dernière question, la détermination de la solution correspondant à une valeur donnée de k^2 et à des conditions aux limites déterminées. On est conduit à trois problèmes selon que l'on se donne sur la limite la valeur de u, ou celle de $\frac{\partial u}{\partial n}$, ou celle de $hu + \frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ désignant la dérivée prise suivant la normale en chaque point de la courbe ou surface limite. Les méthodes employées pour la solution des problèmes analogues de la théorie du potentiel sont d'abord reprises sommairement, et

[1] *Voir* Schwarz, *Festschrift*, § 22.

quatre d'entre elles sont ensuite appliquées à notre équation : la méthode fondée sur le principe de Dirichlet, celle où l'on se sert des fonctions de Green et qui est particulièrement développée, celle dont les travaux remarquables de M. Picard ont montré la vraie nature et la portée et qui est basée sur le procédé alterné et, enfin, la méthode des développements en série suivant les fonctions normales.

Nous n'avons pu qu'indiquer une faible partie de tout ce que renferme ce petit volume. L'intérêt du Livre s'accroît encore quand on sait qu'il contient les idées que M. Klein a émises sur cette équation pendant les années 1888-1889-1890 dans ses Cours à l'Université de Göttingue, et chacun saura gré à M. le Dr Pockels de la peine qu'il a dû prendre pour en faire un exposé systématique.

HENRY BOURGET.

MÉLANGES.

LES AUTOGRAPHES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE,

PAR M. PAUL TANNERY.

SIXIÈME ARTICLE.

IX.

Troisième factum anonyme contre la Géométrie de Descartes.

CHER AMI,

Puisque tu m'as assuré que le sujet de ma précédente ne t'avoit pas été désagréable, que tu ne te pouvois imaginer aucune chose qui pût excuser les erreurs du Sr Desc. que j'y ai remarquées, et que tu ne serois pas marri que je te fisse voir l'impertinence de sa distinction des racines en réelles et imaginaires, il ne sera pas hors propos, avant de te satisfaire particulièrement sur ce point, de montrer que sa Géométrie n'est pas si excellente qu'on n'y puisse rien désirer, qu'elle n'est pas *autant par dessus la Géométrie ordinaire que Cicéron par dessus l'*A, B, C, D *des*

enfans et que, si le Sr *Viète n'a pas traité généralement ce qu'il a dit des équations sur la fin de son livre De emendatione æquationum,* c'est que, universellement parlant, toutes les équations ne se produisent pas par la multiplication d'autres équations.

Et néanmoins cet auteur jure le contraire, dans une Lettre qu'il a écrite au R. P. M. sur ce que j'avois dit que son discours de la nature des équations n'étoit qu'un extrait du susdit Livre; en laquelle Lettre il ajoute qu'il n'a pas seulement donné *plus que l'on n'a su jusques à présent*, mais aussi qu'*il prétend que la postérité ne trouvera jamais rien en Géométrie que l'on ne doive juger qu'il eût aisément trouvé, s'il en eût voulu prendre la peine* (¹).

Mais, sans nous arrêter à toutes ces rodomontades, je te prie d'observer que le recueil d'équations qui est sur la fin du susdit Livre de Viète a donné lieu à quelques-uns de considérer les équations plus composées comme ayant été produites par la multiplication d'autres équations plus simples et, pour cet effet, mettant ensemble les deux parties d'une équation, ils ont feint que le total étoit égal à rien.

Comme, par exemple,

$$\begin{array}{l} AA - BA + BC \text{ étant égal à rien,} \\ \quad - CA \end{array}$$

on peut concevoir cette équation comme produite de ces deux autres A — B et A — C. De même, on peut dire que cette équation

$$\begin{array}{l} A''' - SAA + XA + XD, \\ \quad + DAA - DSA \end{array}$$

est produite de la multiplication de AA — SA + X par A + D.

Thomas Hariot, Anglois, dans un Livre intitulé : *Artis Analyticæ Praxis*, que l'on imprima à Londres après son décès en 1631, rapporte un grand nombre d'exemples semblables, où je te renvoie, si tu en désires d'autres que les précédents; et, si tu

(¹) Tous les passages en italique sont, à peu près textuellement et en tous cas très fidèlement quant au sens, extraits de la lettre de Descartes à Mersenne (Clerselier, III, 73, p. 428-429) touchant les critiques de Beaugrand. Il est bon d'ajouter que Descartes continuait : « Je vous prie que tout ceci demeure entre nous, car j'aurois grande confusion que d'autres sûssent que je vous en ai tant écrit sur ce sujet. »

prends la peine de le parcourir, tu m'avoueras que le Sr Desc. ne l'a pas négligée, ainsi qu'il est aisé à reconnoître par les termes dont il se sert, que cet auteur avoit employés auparavant lui [1].

Or, de cette pensée, il s'ensuit que les racines d'une équation sont positives ou négatives, c'est plus ou moins que rien, qui sont celles que le Sr Desc. nomme assez mal vraies ou fausses, puisqu'on ne peut pas dire qu'une racine soit fausse, lorsqu'elle satisfait véritablement à tout ce que l'on désire. Mais, sans nous amuser à la façon de parler, expliquons la chose.

En cette équation

$$\begin{array}{l} AB - BA - BC \\ \quad + CA \end{array}$$

il y a deux racines, l'une positive, à savoir $+B$, et l'autre négative, qui est $-C$, pource que, cette équation étant produite par la multiplication de $A - B$ par $A + C$, on suppose que A soit égal à $+B$ et à $-C$. Et si on multiplie

$$\begin{array}{l} AA - BA - BC \\ \quad + CA \end{array}$$

par $A + D$ et le produit derechef par $A - F$, vous aurez le produit suivant :

$$\begin{array}{lll} & A'' - BA & \\ & \quad + CA - BC & \\ \hline & \qquad A + D & \\ \hline \text{Premier produit} & A''' - BA'' - BCA & \\ & \quad + CA'' - BDA & \\ & \quad + DA'' + CDA - BCD & \\ \hline & \qquad\qquad A - F & \\ \hline \text{Dernier produit} & A^{\text{IV}} - BA''' - BCA'' - BCDA + BCDF & \\ & \quad + CA''' - BDA'' + BCFA & \\ & \quad + DA''' + CDA'' + BDFA & \\ & \quad - FA'' + BFA'' - CDFA & \\ & \qquad\qquad - CFA'' & \\ & \qquad\qquad - DFA'' & \end{array}$$

---

[1] D'après un récit accueilli par Montucla, Roberval n'aurait connu l'Ouvrage d'Harriot que vers 1646, date à laquelle Sir Charles Cavendish lui aurait signalé le prétendu plagiat de Descartes, que Wallis devait relever plus tard au profit de la gloire de son compatriote. On voit que la jalousie de Beaugrand avait devancé les rivalités nationales.

Et considérant ce dernier produit comme une équation du quatrième degré, il y aura deux racines positives, à savoir $+B$ et $+F$, et deux négatives, à savoir $-C$ et $-D$.

Et pour reconnaître si une quantité proposée est la valeur de la quantité inconnue d'une équation, il n'est pas nécessaire de se donner la peine de diviser l'équation par la quantité inconnue plus ou moins la quantité proposée, ainsi que pense innocemment le bon M. Desc. Il n'y a seulement qu'à la substituer en la place de la quantité inconnue, et, si elle est négative, il faut, outre cela, changer les signes du premier terme, du troisième, du cinquième, etc., ou bien du second, du quatrième, du sixième.

Après quoi, si la quantité donnée est l'une des racines de l'équation, les quantités de l'équation s'effaceront mutuellement, et le tout se réduira à rien. Comme en la précédente équation ou produit, si je substitue D au lieu d'A en changeant les signes de la première place, de la troisième, de la cinquième, etc., ou de la seconde, de la quatrième, de la sixième, etc., vous aurez les équations suivantes, desquelles les quantités se détruisent mutuellement.

$$\begin{array}{r|r}
D^{iv} - BD''' + BCA'' - BCDA - BCDF & D^{iv} + BD''' - BCA'' + BCDA + BCDF \\
+ CD''' + BDA'' + BCFA & - CD''' - BDA'' - BCFA \\
+ DD''' - CDA'' + BDFA & - DD''' + CDA'' - BDFA \\
- FD''' - BFA'' - CDFA & + FD''' + BFA'' + CDFA \\
+ CFA'' & - CFA'' \\
+ DFA'' & DFA''
\end{array}$$

De même, si vous substituez F en la place d'A sans aucun changement de signes, vous trouverez la même chose, comme vous voyez ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
F^{iv} - BF''' - BCF'' - BDCF + BCFD \\
+ CF''' - BDF'' + BCF'' \\
+ DF''' - CDF'' + BDF'' \\
- FF''' + BFF'' - CDF'' \\
- CFF'' \\
- DFF''
\end{array}$$

De ceci, il est évident que la règle du Sr Desc. pour faire que

les racines positives d'une équation deviennent négatives et, au contraire, les négatives positives, est fort mal conçue et exprimée, puisqu'on peut produire cet effet en changeant les signes du premier terme, du troisième, du cinquième et des autres dont l'ordre est désigné par les nombres impairs, pourvu qu'on ne touche point aux signes des autres termes, tout de même qu'en changeant, comme il dit, tous les signes + ou — qui sont en la seconde, en la quatrième, en la sixième ou autres places qui se désignent par les nombres pairs, sans changer ceux de la première, de la troisième, de la cinquième et semblables qui se désignent par les nombres impairs.

Mais après tout, s'il y a une infinité d'équations qui se produisent par la multiplication d'autres équations, il y en a aussi une infinité d'autres qui ne peuvent être produites suivant cet ordre, comme sont les deux équations dont je t'ai entretenu bien au long en ma précédente. Et c'est ce qui a retenu ce grand esprit de Viète, à qui toute la postérité sera obligée pour les œuvres excellentes dont il a favorisé le public, de rien écrire de général sur ce sujet, bien qu'il donne avis qu'on en peut tirer de grandes lumières pour mieux concevoir la nature de plusieurs équations particulières. Au reste, il est aisé de juger, par ce que je viens d'expliquer, qu'aux équations il est impossible qu'il y ait autant de racines que de dimensions, et de là on doit aussi recueillir que l'on ne peut distinguer les racines d'autre façon qu'en positives et négatives, et que, s'il y a des racines que l'on doive nommer (¹) *réelles* (p. 380) ce sont les racines positives, pour ce qu'elles sont marquées par +; que s'il y en a à qui on veuille donner le nom d'*imaginaires,* ce doit être aux négatives, d'autant qu'elles sont marquées par —, et que ce sont quantités que l'on suppose moindres que rien. Et, par conséquent, le sens auquel le Sr Desc. prend cette distinction, lorsqu'il dit qu'en cette équation

$$aaa - 6aa + 13a - 10$$

il y a une racine réelle et deux imaginaires, contredit entièrement à la raison et à l'imagination même. Pourroit-on bien imaginer

(¹) *Géométrie de Descartes*, éd. Hermann, p. 63.

que deux et trois ajoutés ensemble fassent plus ou moins que 5, c'est-à-dire une chose qui n'est point et qui ne peut être, ou bien, pour recourir à son exemple, concevoir trois racines dans une équation où il n'y en a qu'une seule, comme en celle-ci :

$$AAA - 6AA + 13A - 10,$$

en laquelle, si on excepte $+2$, on ne sauroit trouver aucun nombre marqué par $+$ ou par $-$, que l'on puisse dire être la racine de cette équation? Je ne crois pas même que l'imagination du Sr Desc., qui a témérairement avancé cette distinction, soit assez blessée pour produire cet effet, et je ne sache personne capable de cela que ce fou de Rob., lequel me disoit un jour, par un grand secret, qu'il savoit plusieurs nombres en raison double et dont toutefois les proportions n'étoient pas semblables à celle de deux à un (1).

Et puisque le Sr Desc. dit que, si une équation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue plus ou moins quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité ne peut être la valeur d'aucune de ses racines, s'il ne peut trouver lui-même aucune quantité, hormis $+2$, laquelle étant ajoutée ou ôtée d'A, puisse diviser l'équation susdite, n'est-il pas contraint de confesser qu'il n'y a point d'autre racine que $+2$, et que les deux autres ne sont que des rêveries et des extravagances de sa belle méthode? Pour moi, j'ai toujours tenu que la connoissance doit suivre l'ordre des choses, et que nous les devons nommer suivant ce qu'elles sont en elles-mêmes ou suivant la connoissance que nous en avons, et que, lorsque non seulement elles ne sont point, mais qu'il implique contradiction qu'elles soient, on ne les peut pas nommer avec raison ni réelles ni imaginaires, puisqu'elles ne peuvent être l'objet de notre entendement ni de notre imagination.

---

(1) C'est évidemment de Roberval que l'anonyme parle ici et le paradoxe qu'il lui attribue se rapporte sans doute à la méthode des *indivisibles* (infiniment petits), puisqu'on y peut traiter comme étant dans des rapports déterminés des quantités qui sont en fait dans des rapports variables.

X.

La seconde dispute entre Descartes et Roberval.

Préliminaires. — En 1645, sept ans après la polémique relative à la méthode des tangentes de Fermat, il n'y avait certainement aucune animosité entre Roberval et Descartes. Ce dernier, dans un séjour assez long qu'il fit à Paris cette année-là, se rencontra avec son ancien adversaire qu'auparavant il ne connaissait pas personnellement. Leurs relations furent courtoises, mais un incident, passablement futile, de leurs conversations, éveilla la susceptibilité de Descartes et, dans la première des lettres à Mersenne que nous ayons postérieure à son retour en Hollande (éd. Clerselier, III, 85), nous lisons à ce sujet, sous la date du 2 mars 1646 :

« Mon Révérend Père, encore qu'il n'y ait que huit jours que je vous ai écrit, je trouve deux choses dans votre dernière, auxquelles je ne veux pas différer de répondre. La première est que M. de Roberval dit que je n'ai pas résolu le lieu de Pappus, et qu'il a un autre sens que celui que je lui ai donné : sur quoi je vous supplie très humblement de lui vouloir demander de ma part quel est cet autre sens, et qu'il prenne la peine de le mettre par écrit, afin que je le puisse mieux entendre. Car, puisqu'il dit qu'il s'est offert de me le démontrer lorsque j'étois à Paris (comme, de fait, je crois qu'il m'en a dit quelque chose, mais je n'en ai qu'une mémoire fort confuse), il ne me doit pas refuser cette faveur et, afin de l'y obliger d'autant plus, je m'offre en récompense de l'avertir des principales fautes que j'ai remarquées dans son Aristarque. L'autre point de votre lettre....»

Le lieu de Pappus dont il est question ici n'est nullement le lieu des anciens à trois ou quatre lignes, c'est-à-dire ce qui, dans la *Géométrie* de Descartes, est appelé spécialement la *question de Pappus*. Sur ce lieu, très nettement défini, il ne pouvait y avoir aucune ambiguïté, et Roberval n'entendait certainement pas autrement que Descartes ce problème célèbre qui conduit à l'équation générale des coniques. Mais, d'après Descartes [1], Pappus

---

[1] *Géométrie*, éd. Hermann, 1886, p. 9.

ajoutait que, lorsque la question est proposée en un plus grand nombre de lignes, les anciens avaient imaginé une ligne courbe qu'ils montraient être utile pour ce lieu, et qui semblait la plus manifeste, quoiqu'elle ne fût pas la première ([1]).

Soient

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad U = 0, \quad V = 0$$

les équations de cinq lignes droites et λ un coefficient constant; la question proposée en cinq lignes, au sens de Pappus, se traduit par l'équation

$$XYZ + \lambda UV = 0.$$

A ce sujet, Descartes examine deux cas : 1° celui où X, Y, Z, U sont parallèles entre elles et V perpendiculaire aux précédentes; 2° où X, Y, U, V sont parallèles entre elles et Z perpendiculaire aux précédentes; et il laisse entendre que ces deux cas devaient correspondre, l'un au lieu à cinq lignes considéré par les anciens, l'autre à celui que Pappus regardait comme le premier.

Le texte de Pappus est en réalité incertain et obscur ([2]). Descartes, qui ne le connaissait que par la traduction de Commandin, lui donnait en tous cas un sens incompatible avec le grec que Roberval avait pu vérifier sur un manuscrit. Il aurait dû interpréter « les anciens avaient imaginé une ligne qu'ils montraient être utile, mais qui ne semblait ni la première ni la plus manifeste ». Il est clair qu'avec ce sens, la tentative de restitution de Descartes perd toute valeur historique, mais la critique de Roberval n'avait pas d'autre portée.

L'auteur de la *Géométrie* aurait donc bien pu ne pas se soucier si son rival dans l'amitié de Mersenne avait répété cette critique à ce dernier. Il se laissa aller à un mouvement de vivacité et, comme on l'a vu, lança à Roberval une véritable provocation, que le Minime ne transmit que trop fidèlement.

([1]) *Géométrie*, éd. Hermann, 1886, p. 29 à 31.

([2]) Ed. Hultsch, page 678, ligne 27 à page 680, ligne 2 : d'après le texte adopté par le savant éditeur : ὧν μίαν οὐδέ τινα συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν συντεθείκασιν, etc., et, contrairement à sa traduction, il faudrait entendre : « Ils n'ont pas même fait la synthèse d'une ligne qui leur eût paru la plus simple et dont ils auraient reconnu l'intérêt. »

La suite de la lettre précitée contient la réponse que fait Descartes à Mersenne sur la question du centre d'agitation dans les pendules. Dans cette réponse, sont données les règles suivantes :

1° La durée des vibrations ne dépend, si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, que de la distance du centre d'agitation à l'axe de suspension.

2° Si le pendule peut être assimilé à une droite de longueur a suspendue par une de ses extrémités, la distance du centre d'agitation (longueur du pendule simple synchrone) est $\frac{2}{3}a$.

3° Pour un triangle isoscèle suspendu par un sommet et oscillant de façon que la base reste parallèle à l'axe, la longueur du pendule synchrone est les $\frac{3}{4}$ de la hauteur.

4° Si l'axe est perpendiculaire au plan du triangle, ou dans le cas général, Descartes propose la recherche du centre de gravité d'une figure auxiliaire. En traduisant sa construction dans le langage moderne, on peut dire qu'il assigne au pendule synchrone la longueur représentée par le rapport $\frac{\Sigma m\rho^2}{\Sigma m\rho}$, expression dans laquelle m représente la masse de chaque élément différentiel et ρ la distance de cet élément à l'axe de suspension.

Il avait heureusement résolu le problème pour les trois cas particuliers traités par lui, comme, en général, pour les figures planes oscillant autour d'un axe situé dans leur plan. Au contraire, dans le cas général, sa solution est erronée, puisque dans l'expression $\frac{\Sigma m\rho^2}{\Sigma m\rho}$, il faudrait, pour trouver la longueur du pendule synchrone, substituer à $\Sigma m\rho$ le produit de la masse du corps par la distance du centre de gravité à l'axe de suspension.

Un seigneur anglais réfugié en France à la suite des troubles de sa patrie et qui peut-être avait proposé le premier, dans le cercle de Mersenne, la question sur laquelle Descartes avait été consulté, Sir Charles Cavendish [1], s'adressa à l'illustre philosophe pour

---

[1] Il était frère d'un autre correspondant de Descartes, William Cavendish, marquis de Newcastle, auquel sont adressées les lettres de l'édition Clerselier, I, 52 (15 avril 1645); I, 53 (19 octobre 1645); I, 54 (23 novembre 1646). Ces deux Cavendish appartenaient à une branche collatérale de celle des ducs de Devonshire, d'où sortit le célèbre physicien Henry Cavendish.

lui communiquer des expériences en désaccord avec les conclusions de sa lettre à Mersenne. Descartes lui répondit le 30 mars 1646 (éd. Clerselier, III, 86), en exposant le raisonnement qui l'avait conduit à sa solution pour le cas général et en discutant la façon dont, d'après lui, devaient être faites les expériences.

Le 20 avril (Clerselier, III, 93), il écrit à Mersenne et lui envoie en même temps une critique en latin, c'est-à-dire destinée à être montrée (III, 94), de l'*Aristarchus Samius* de Roberval. Dans la lettre d'envoi, il rappelle ses anciennes querelles avec ce dernier et s'exprime sur son compte en termes assez méprisants. Mersenne lui avait sans doute réclamé le jugement qu'il s'était, aux termes de sa lettre du 2 mars, montré disposé à porter sur le Traité où Roberval, en feignant publier un Ouvrage inédit de l'antique précurseur de Copernic, avait exposé ses propres idées sur le système du monde. Dans la critique latine, d'autre part, Descartes déclare que, si les fautes de l'auteur sont relevées, c'est pour l'obliger à produire à son tour ce qu'il prétend avoir trouvé à redire à la *Géométrie*. La provocation était donc aussi formelle que possible.

Le 15 mai 1646 (éd. Clerselier, III, 90), Descartes écrit à Charles Cavendish une seconde lettre sur le centre d'agitation; il s'y réfère à sa correspondance antérieure; quant à une question particulière, transmise par Mersenne, il en laisse, dit-il, le soin à M. de Roberval, pendant qu'il attend les instructions que Cavendish lui a fait espérer de la part de celui-ci.

Roberval, consulté par Cavendish sur la lettre du 30 mars, répondit en effet par des Observations (Clerselier, III, 87) où il traita la question d'un secteur cylindrique suspendu à un axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan. Il donne la solution exacte, critique le raisonnement de Descartes en termes réellement mesurés et remarque que les expériences s'accordent avec sa propre théorie. Il faut remarquer toutefois que cette théorie est présentée comme déterminant le centre de percussion et qu'il est mis en doute si, en principe, la distance de ce centre à l'axe de suspension correspond bien à la longueur du pendule synchrone.

Le 15 juin (Clerselier, III, 88), Descartes, à qui Cavendish a communiqué les objections de Roberval, défend son opinion, au

reste sans aigreur marquée, et s'en réfère au jugement de son correspondant.

La querelle, ainsi commencée, s'assoupit tout d'abord, probablement parce que Mersenne, faisant alors un voyage dans le Midi, n'était pas là pour l'alimenter. C'est encore Descartes qui la réveilla en la reportant sur le terrain qu'il avait primitivement choisi.

XI.

Attaques de Descartes contre Roberval dans les lettres inédites à Mersenne des 7 septembre et 5 octobre 1646.

Dans la lettre inédite datée d'Egmond, le 7 septembre 1646, et adressée à Mersenne, qui vient de lui annoncer sa rentrée à Paris, on lit (Bibl. Nat. MS. fr. n. a. 5160, f° 37 et 38) :

« Pour le Sr Roberval, puisque vous voyez qu'il a de la peine à se résoudre de m'envoyer sa prétendue démonstration contre ma Géométrie, je vous prie de ne l'y point convier davantage, car je sais bien qu'il n'a rien à dire que je ne puisse faire tourner à sa confusion ni qui soit d'aucune importance; mais il m'engageroit peut-être à lui faire voir tout le reste des fautes que j'ai remarquées en son Aristarque, car je ne vous ai ci-devant écrit que de celles qui sont aux cinq ou six premières pages, et je sais bien que cela lui déplairoit, et je serai bien aise de n'offenser personne; outre que, si je dois employer du temps à telle sorte d'écrits, j'aime mieux que ce soit en examinant le livre du P. Fabri et me défendant contre toute la Société que contre un seul Roberval duquel je pense que la mauvaise volonté est assez punie de ce qu'elle n'est accompagnée d'aucun pouvoir. »

Dans la fin de la lettre, imprimée par Clerselier (II, pages 533-534) (¹) à la suite d'une autre bien antérieure, Descartes revient sur la question du centre d'oscillation, en soutenant que les différences entre les conséquences de sa théorie et les résultats des expériences peuvent s'expliquer par les effets de la résistance de

(¹) Le nom de Cavendish y est remplacé à tort (p. 534) par celui de Carcavy.

l'air et du mode de suspension. Il n'y fait plus aucune allusion à Roberval.

La lettre suivante de Descartes à Mersenne, datée d'Egmond, le 5 octobre 1646, est inédite comme la précédente; l'original en est conservé à la Bibliothèque Victor Cousin, à la Sorbonne. Nous allons y voir Descartes prendre, par rapport à Roberval, un ton de plus en plus agressif.

« Mon Révérend Père,

» Je ne doute point que vous n'ayez reçu la réponse que j'avois faite à votre précédente, peu de temps après avoir écrit votre dernière du 15 septembre; mais pource que mes lettres ne partent d'Alemar que le samedi, le vent empêche quelquefois qu'elles ne puissent être à Leyde le lundi assez à temps pour être données au messager de Paris, et tout de même les vôtres arrivent à Leyde le samedi, d'où je ne les reçois que le samedi d'après et n'y puis faire réponse qu'à huit jours de là.

» Je vous ai déjà mandé en mes précédentes que, puisque le Roberval se fait prier pour m'envoyer ses objections, je serai fort aise de ne les point avoir (1), car cela ne sert qu'à me faire perdre du temps, et je ne fais aucun état de tout ce qui sauroit venir de lui. Il est ridicule de dire que je n'ai blâmé (2) que ses suppositions et non point les conséquences qu'il en tire, car vous pouvez voir, en lisant ce que je vous avois écrit, que je remarque de très grandes fautes en l'un et en l'autre, et j'en aurois bien remarqué davantage si j'avois voulu examiner tout le livre, au lieu que je n'ai parlé que de ses quatre ou cinq premières pages, mais il est de ces glorieux qui disent qu'on ne leur a point fait de mal après qu'ils ont été battus. Vous me demandez mon opinion touchant les raisons qu'il donne pour les funependules isochrones, comme si je les avois vues, et toutefois je vous assure que je n'en ai encore vu aucune. Il s'est bien gardé de les mettre dans son écrit (3) que M. de Cavendissch a pris la peine de m'envoyer ci-

(1) Après les provocations que l'on a vues, le procédé de Descartes est passablement cavalier, s'il ne parle pas ironiquement.

(2) Dans la critique de l'*Aristarchus*.

(3) Les *Observations* (Clerselier, III, 87) dont il est parlé plus haut.

devant, car il s'est douté que j'en découvrirois les foiblesses; pour la règle qu'il donne pour trouver les centres de percussion, que vous mettez à la fin de votre dernière, je n'y comprends rien, car vous ne me mandez point les raisons sur lesquelles il la fonde, et je puis raisonner ainsi qu'il a fait ci-devant contre moi, que si sa démonstration ne s'accorde avec la mienne, elle ne sauroit rien valoir. J'ai remarqué en cet écrit que j'ai vu de lui qu'il y redit avec autorité certaines choses qu'il a apprises de mes lettres comme s'il les tiroit de sa tête, et ainsi qu'il ne se pare que de mes plumes, car je n'y ai trouvé aucune chose qui fût de lui qui ne m'ait semblé impertinente. Cela me doit rendre dorénavant plus retenu à écrire, afin de ne point instruire mes ennemis à mon préjudice... (¹).

» J'ai vu aussi ces jours un imprimé de demie-feuille, d'un Jacques Bourgeois, miroitier et lunetier du roi, qui a sa boutique contre l'Église Saint-Jacques de l'Hôpital à Paris, par lequel j'apprens que ce J. Bourgeois a fait des lunettes vulgaires pour porter sur le nez, concaves d'un côté et convexes de l'autre, suivant ce que j'en ai écrit au commencement du septième et du neuvième discours de ma Dioptrique, où j'ai averti que leur figure n'a pas besoin d'être fort exacte, pour ce que nous ne savons pas exactement quelle est celle de l'œil, et qu'il n'est pas inflexible. Je serai bien aise de savoir si ses lunettes réussissent mieux que les communes, en cas que vous ayez occasion de vous en enquérir.

» Pour ce que vous me demandez touchant les vibrations des triangles suspendus à votre façon, je pense vous avoir déjà répondu que cela ne peut être déterminé que par l'expérience, de quoi je pense avoir expliqué les raisons en la première lettre que j'ai eu l'honneur d'écrire à M. de Cavendissche sur ce sujet, et si on veut juger de la vérité des raisonnemens par les expériences, il me semble qu'on en a assez d'occasion en ce que j'ai dès le commencement déterminé la façon en laquelle les corps plats devoient être suspendus afin qu'on pût donner une règle certaine de leurs vibrations, et que j'ai dit que tous les triangles suspendus

(¹) Descartes continue en parlant à Mersenne des *Fundamenta Physices* de Regius. L'alinéa suivant a son intérêt pour l'histoire de la Dioptrique.

par la base, comme ABC, sont comme 2 à 1, et tous les rectangles comme DEFG sont comme 3 à 2, et tous les triangles suspendus par la pointe sont comme 4 à 3 au funependule isochrone : car, si on trouve que cela est généralement vrai en tous ces corps ainsi suspendus et qu'au contraire leur proportion avec le funependule doit être différente en tous ces corps selon que leur figure est différente lorsqu'ils sont suspendus en l'autre façon, je ne sais pas ce qu'on peut attendre de plus pour juger si j'ai vu quelque chose en cette matière.

» Je ne puis refuser le commerce par lettres que le Sr Toricelli (1) veut avoir avec moi; je tiendrai toujours à honneur d'avoir connoissance avec des personnes de son mérite et tâcherai de me rendre digne de leur amitié en tout ce qui me sera possible. J'ai aussi de l'obligation à M. de Carcavi de ce qu'il me veut envoyer quelques écrits touchant la Géométrie, mais je vous dirai que je suis maintenant si éloigné de penser aux Mathématiques que c'est quasi du plus loin qu'il me souvient, et je voudrais que le Sr Roberval pût persuader à tout le monde que je les ai entièrement oubliées.

» Je suppose que M. Picot est encore aux champs; sitôt que je saurai qu'il sera de retour, je ne manquerai pas de lui écrire. Je suis,

» Mon Révérend Père,

Votre très humble
et très zélé serviteur,

DESCARTES.

D'Egmond, le 5 d'octobre 1646.

» Je joins les deux encloses avec cette lettre pource que je crois qu'elles n'en enchériront point le port, et je n'ai rien à écrire à M. de Clairsellier, sinon que je le remercie de ses dernières du 10 d'août et suis son très humble serviteur. »

L'attitude que prend Descartes dans la lettre qui précède se comprend en partie, si l'on se rend compte que Mersenne, d'après les résultats de ses expériences, donnait raison à Roberval pour

(1) Torricelli, mort en 1647, ne paraît pas être, de fait, entré en correspondance avec Descartes.

les centres d'oscillation dans le cas du mouvement autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure. Descartes pouvait insister à bon droit sur l'exactitude reconnue de sa solution pour le cas du mouvement d'une figure plane autour d'un axe situé dans son plan, mais il allait sans doute trop loin en accusant Roberval de s'être approprié cette solution. Enfin, si ce dernier avait traité avec succès le cas d'un secteur circulaire oscillant autour d'un axe passant par le centre et perpendiculaire au plan de la figure, il s'était trompé pour le cas d'un triangle isoscèle suspendu par un sommet à un axe perpendiculaire à son plan. C'est à ce cas que se rapportait la règle envoyée par Mersenne à Descartes et que celui-ci déclare ne point comprendre.

Cette règle, que Mersenne a donnée dans ses *Reflectiones physico-mathematicæ* de 1647 (Chap. XI), se trouve en effet expressément indiquée par Descartes (éd. Clerselier, III, 92), comme lui ayant été communiquée par le Minime dans sa lettre du 15 septembre 1646. Cette règle revient à l'énoncé suivant :

Soit h la hauteur du triangle isoscèle et α le demi-angle au sommet, la distance de ce sommet au centre d'oscillation, d'après Roberval, serait

$$x = \frac{3}{4} h \frac{\int_0^\alpha \sec^3 \alpha \, d\alpha}{\int_0^\alpha \sec \alpha \, d\alpha},$$

tandis qu'il aurait dû trouver une construction revenant à poser

$$x = \frac{3}{4} h \frac{\int_0^\alpha \sec^4 \alpha \, d\alpha}{\int_0^\alpha \sec^2 \alpha \, d\alpha}.$$

L'exactitude du résultat qu'il avait obtenu pour le secteur circulaire semble cependant indiquer que sa méthode était réellement fondée sur un principe vrai, et que son erreur pour le triangle isoscèle peut être assimilée à une faute de calcul. Au reste, il n'avait nullement indiqué cette méthode. Descartes ne pouvait donc la juger que par deux conséquences, dont l'une, quoi qu'en ait dit Mersenne, était aussi bien en contradiction avec l'expérience que la théorie de l'auteur de la *Géométrie*.

On sait qu'il était réservé à Huygens d'établir définitivement, dix-huit ans plus tard, les principes du calcul des centres d'oscillation. En 1646, il n'avait encore que dix-sept ans, mais il est remarquable que Mersenne, avec lequel il entrait dès lors en correspondance mathématique, l'ait tenu au courant du problème qui s'agitait (1). Le 12 octobre, il lui communique la règle de Roberval pour les secteurs circulaires. Le 8 décembre, il lui explique sa méthode expérimentale, et lui propose la question du triangle comme non résolue dans sa généralité. En janvier 1647, il revient encore sur ce sujet à propos d'un Ouvrage (2) imprimé en France qu'il a envoyé à Huygens et où cette question se trouvait traitée. Il y a là, sans contredit, un des exemples les plus remarquables de l'influence exercée par la correspondance du Minime sur le progrès des Sciences au dix-septième siècle.

---

(1) Voir *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, tome I. La Haye, 1888, nos 13, 23, 24, 25 et 27.

(2) Cet Ouvrage dont Mersenne parle dans les nos 24, 25 et 27 de la Correspondance de Huygens n'est pas désigné par le nom de l'auteur; les éditeurs ont supposé qu'il s'agissait des *Aphorismi physici* du P. Noël. Mais Mersenne indique deux volumes in-4° et non pas un seul in-8° comme les *Aphorismi*. De ces volumes, le premier traitait d'ailleurs de la Logique, le second des Mouvements des corps; on doit y reconnaître le *Philosophiæ tomus primus* et le *Tractatus de motu locali*, imprimés à Lyon en 1646 sous le nom de *Petrus Mosnerius*, comme composés d'après les leçons du P. Honoré Fabri, lequel paraît en être réellement l'auteur.

1re Part.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MAURICE D'OCAGNE. — NOMOGRAPHIE; LES CALCULS USUELS EFFECTUÉS AU MOYEN DES ABAQUES. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application. 1 vol. in-8°, 96 p. avec figures dans le texte et 8 Planches. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891.

L'idée de substituer des opérations graphiques à des calculs laborieux, pour toutes les questions concernant les applications pratiques des Mathématiques, est déjà ancienne et a été formulée de bien des manières, notamment dans ces dernières années. Tantôt, comme dans la Statique graphique, on a recours à une construction particulière pour résoudre la question qui se présente; tantôt, on se sert d'une sorte d'épure toute faite à l'avance, d'une Table graphique contenant la traduction par le trait d'une formule plus ou moins complexe, Table sur laquelle il n'y a plus qu'à faire une lecture.

C'est à l'étude de ces Tables graphiques, ou *abaques*, qu'est consacré le très intéressant Volume de M. d'Ocagne. Mais, alors que ses prédécesseurs ont simplement développé des méthodes spéciales plus ou moins ingénieuses, applicables à des cas particuliers, M. d'Ocagne s'est surtout attaché à établir, sous une forme complète, bien que concise, une sorte de doctrine générale dont les applications particulières découlent ensuite naturellement. C'est, en quelque sorte, une œuvre analogue à celle qu'accomplit Monge lorsqu'il créa la Géométrie descriptive en empruntant aux procédés antérieurs tout le secours qu'ils pouvaient apporter à la doctrine nouvelle. Il en résulte un ensemble tout à fait intéressant, soit au point de vue des Mathématiques pures, soit au point de vue des applications; et c'est à cette branche nouvelle que l'auteur a donné le nom significatif et, selon nous, heureusement choisi, de *Nomographie*.

Il est à remarquer que le travail de coordination dont il s'agit ne pouvait être entrepris que par un homme appelé à appliquer pratiquement, chaque jour, les Mathématiques, et cependant porté par ses goûts et ses études antérieures à l'examen des considéra-

tions de pure science. Il était nécessaire, en un mot, que l'auteur fût à la fois ingénieur et mathématicien, comme l'est M. d'Ocagne. Du reste, ses prédécesseurs dans cette voie et, notamment, MM. Lalanne, Lallemand et Collignon, ont présenté aussi, presque tous, ce double caractère.

Dans l'impossibilité où nous sommes d'indiquer, d'une façon complète, ce que contient ce petit Ouvrage si substantiel, et surtout de faire ressortir les innombrables applications possibles de la Nomographie, nous voudrions nous borner à donner au lecteur, sous forme sommaire, une notion de l'idée fondamentale sur laquelle l'auteur a édifié sa nouvelle doctrine. Quelques mots sur les divisions principales du livre suffiront ensuite pour en faire comprendre l'utilité.

Tout le monde sait comment une relation entre deux variables peut se représenter par une courbe. Si, au lieu de deux variables, nous en avons trois, x, y, z, par exemple, et qu'on imagine la surface représentée par l'équation $f(x, y, z) = 0$, cette surface pourra être figurée par ses lignes de niveau, correspondant aux diverses valeurs de z; si, sur cette figure, on prend le point ayant pour coordonnées x, y, le numéro de la courbe sur laquelle se trouve ce point (ou dans le voisinage duquel il se trouve) donnera la valeur correspondante de z. Telle est la première idée très simple, et très imparfaite au point de vue pratique, qui a servi tout d'abord de base à la construction des abaques.

Au lieu de cela, M. d'Ocagne considère les trois courbes $F_1(x, y, \alpha) = 0$, $F_2(x, y, \beta) = 0$, $F_3(x, y, \gamma) = 0$, ou $(I_1)(I_2)(I_3)$; dans les équations de ces courbes, α, β, γ sont des paramètres variables, par rapport auxquels les courbes sont dites *isoplèthes*, suivant l'expression de Vogler et de M. Lalanne. L'élimination de x, y entre les trois équations donnerait $F_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, et cette condition exprime que les trois isoplèthes correspondantes passent en un même point. Donc, le Tableau graphique formé par les trois systèmes de courbes cotées n'est autre qu'un abaque fournissant une représentation de l'équation $F_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Étant donnée cette dernière, on peut évidemment disposer arbitrairement de deux quelconques des équations (I_1), (I_2), (I_3). La troisième en résulte. C'est cette indétermination qui permettra, suivant les cas particuliers, d'arriver à une construction aussi

avantageuse que possible, où les lectures et l'interpolation à vue puissent se pratiquer avec clarté et rigueur.

Après avoir exposé, dès le début du Chapitre I, ce principe général, l'auteur en fait application à la méthode des anamorphoses de M. Lalanne, montre comment elle se généralise et indique les cas particuliers des isoplèthes rectilignes ou circulaires, et des échelles binaires de M. Lallemand; le Chapitre se termine par des considérations très élégantes sur l'élimination graphique.

Le Chapitre II est consacré à l'examen de quelques exemples d'applications à trois variables. Nous nous contenterons de mentionner : les heures de lever et de coucher du Soleil, le poids de la vapeur d'eau contenue dans l'air, l'équation trinôme du troisième degré et les murs de soutènement. Dans ce dernier exemple l'abaque présente deux systèmes d'isoplèthes rectilignes et un d'isoplèthes circulaires.

Dans le Chapitre III sont étudiés les équations à triple réglure parallèle et les abaques hexagonaux. Les travaux de M. Lallemand y sont analysés d'une façon très claire. On y trouve l'emploi des échelles linéaires et de l'indicateur transparent, le déplacement et le fractionnement des échelles, les échelles centrales additionnelles, et des applications à l'équation

$$\log \gamma = \log \alpha + \log \beta,$$

ainsi qu'aux abaques de remblai et de déblai, avec tous les détails pratiques nécessaires pour en bien comprendre l'emploi.

Viennent ensuite, dans le Chapitre IV, les équations à triple réglure quelconque et les abaques à points isoplèthes. Ce système, dont l'idée appartient en propre à M. d'Ocagne, constitue l'une des applications les plus heureuses de la notion de corrélation et de sa méthode des *coordonnées parallèles*. Il montre comment se fait la transformation des abaques à droites isoplèthes en abaques à points isoplèthes et donne ensuite, comme exemple, l'équation complète du troisième degré et la détermination du fruit intérieur d'un mur de soutènement. Enfin la transformation homographique générale, les dilatations d'ordonnées, et l'anamorphose graphique de M. Lallemand sont l'objet d'applications intéressantes.

Dans tout ce qui précède, il n'est question que d'équations à trois variables au plus. L'auteur aborde, dans le Chapitre V, les

équations à plus de trois variables. On peut, dans certaines circonstances, appliquer à ces équations le principe général, ou bien recourir parfois à des artifices particuliers, tels que les abaques hexagonaux à échelles binaires de M. Lallemand; parmi les exemples, on peut citer ceux des intérêts composés et de la poussée des terres. En généralisant ces notions, on arrive à d'autres applications encore, telles que l'abaque de la déviation du compas.

Le Chapitre VI et dernier a pour objet la méthode des points doublement isoplèthes, permettant l'extension à quatre variables du principe général dans certains cas déterminés. L'auteur en fait application aux équations des troisième, quatrième et cinquième degrés, à la distance sphérique, aux lentilles. Viennent ensuite quelques considérations sur les équations à cinq et à six variables et sur les isoplèthes tangentielles.

Le Livre se termine par une Note additionnelle sur la généralisation de l'emploi des transparents.

Notre analyse ne serait pas complète si nous omettions de rendre hommage à la perfection d'exécution du Livre et des Planches admirablement gravées qui y font suite. On sait d'ailleurs combien l'imprimerie Gauthier-Villars a su pousser loin ce qu'on peut appeler l'art typographique. Peut-être, en ce qui concerne les publications dont nous parlons, serait-il à désirer que, dans les publications à venir sur le même sujet, ou même simplement dans les constructions d'abaques pour des usages pratiques, on fît emploi des lignes de couleurs différentes. Il y aurait là, selon nous, une très légère modification, de nature à rendre les lectures souvent plus faciles et plus claires.

Après avoir étudié ce petit volume, que nous avons eu, pour notre compte, plaisir à lire et à analyser, chacun en reconnaîtra l'importance à la fois théorique et pratique et se joindra à M. d'Ocagne pour renouveler avec lui le vœu qu'il exprime en ces termes dans son *Avant-propos :*

« Nous souhaiterions que l'usage des abaques entrât assez dans leurs habitudes pour que les auteurs écrivant sur des sujets techniques fussent amenés, en faisant connaître quelque formule nouvelle applicable à un objet pratique, à en faire immédiatement la traduction sous forme d'abaque, de façon à donner mieux que la

formule elle-même, à savoir les résultats auxquels elle doit conduire dans les cas où elle est applicable. Il nous semble de même que le recueil des formules relatives à une certaine profession pourrait être avantageusement remplacé par l'Atlas des abaques correspondants. » C.-A. LAISANT.

MÉLANGES.

LES AUTOGRAPHES DE DESCARTES A LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE;

PAR M. PAUL TANNERY.

SEPTIÈME ARTICLE.

XI.

Réplique inédite de Roberval à Descartes.

Après les nouvelles provocations de Descartes, que nous venons de voir, Roberval ne pouvait plus longtemps garder le silence; il répondit par une lettre inédite, qu'il adressa à Charles Cavendish, et où il resta d'ailleurs sur le terrain de la question de Mécanique. Cette lettre, où il prend à son tour le ton d'un adversaire déclaré de Descartes, nous a été conservée par une copie de la main de Mersenne, qui se trouve dans le MS. de la Nationale fr. n. a. 5161, folio 14, et, d'autre part, par le brouillon de Roberval, dans le MS. fr. n. a. 1086, f°s 86 à 89.

Voici cette lettre *in extenso :*

« J'ai quatre choses à repliquer à Mons. Descartes : 1° J'avoue que je me suis trompé dans l'écrit que j'ai fait pour lui (1); mais

(1) Clerselier, III, 87.

savez-vous en quoi? C'est en ce que je croyois qu'il fût amateur de la vérité et, au contraire, je reconnois maintenant qu'aussitôt qu'elle ne s'accorde pas à ses pensées, il devient son adversaire et la combat, comme s'il étoit capable de la vaincre et lui faire changer de parti pour prendre le sien; de quoi je ne puis penser autre cause, sinon que, voulant paroître impeccable, il a cru que ce seroit ruiner son dessein, et peut-être aussi qu'il y auroit quelque sujet de honte, s'il se dédisoit apertement. Mais résister à la vérité, c'est regimber contre l'aiguillon et, pour ne vouloir pas se dédire, au contraire, pour s'obstiner à vouloir maintenir une mauvaise cause, il se contredit sans s'en apercevoir, faute, comme je crois, d'avoir retenu copie de sa première lettre ([1]) ou d'avoir conservé en sa mémoire ce qu'elle contient; car, en sa seconde ([2]), il nie que, pour les vibrations réciproques d'un corps balancé librement à l'entour d'un essieu, il faille considérer la direction de chacun des points de ce corps, rapportés à une certaine perpendiculaire, comme celle qui est dressée vers le centre de la Terre, afin de déterminer dans cette perpendiculaire le centre d'agitation ou de percussion. Et toutefois, dans sa première ([3]), il avoit assuré que ce centre est dans cette perpendiculaire; partant, puisque, par les règles de la Méchanique, l'établissement d'un tel centre dépend non seulement de la force de l'agitation de chacun point du corps balancé, mais aussi de la direction des mêmes points, il s'ensuit que la force et la direction ensemble, qui établissent ce centre, doivent être rapportées à la perpendiculaire dans laquelle il est, et à l'entour de laquelle la force de l'agitation est également épandue, c'est-à-dire que les parties dextres ont l'agitation égale à celle des senestres et celles de devant à celles de derrière, etc.

» Voilà une contradiction manifeste entre ses deux lettres.

» En second lieu, vous remarquerez, s'il vous plaît, touchant mon même écrit, que, voyant que M. D. C supposoit ce centre dans cette perpendiculaire et, partant, étoit obligé d'y rapporter la force et la direction de chacun des points agités, mon dessein n'a été autre (comme je l'ai protesté par deux fois dans le même

([1]) Clerselier, III, 86, lettre à Cavendish du 30 mars 1646.
([2]) Clerselier, III, 88, lettre à Cavendish du 15 juin 1646. *Voir* p. 507, ligne 10.
([3]) Clerselier, III, p. 493, ligne 21 et suiv.

écrit, en mots exprès) que de faire voir que son raisonnement étoit défectueux, pource qu'il avoit oublié de considérer la direction des points mobiles, ce qui avoit été cause qu'en tous les corps généralement, et presque en toutes les superficies, sa méthode assigne le centre d'agitation ou de percussion plus haut, c'est-à-dire plus près de l'essieu, qu'il n'est en effet. Et quoique j'aie énoncé le lieu où il est dans cette perpendiculaire, et non dans les autres, pour chacun secteur de cylindre ou de cercle, toutefois je n'ai nullement pensé à lui en donner la démonstration, ni à lui faire passer mon autorité pour objection, ainsi qu'il me reproche sans raison (1).

» La démonstration que j'ai de mon énoncé, qui est contraire au sien, m'a fait connoître que son raisonnement manquoit en quelque chose, mais je me suis contenté de faire paroître ce manque par un autre moyen, sans produire ma démonstration qui, comme j'ai dit, est trop longue et à laquelle, ni à mon autorité, je n'ai point prétendu qu'il ajoutât aucune foi.

» En troisième lieu, je m'étois contenté d'indiquer seulement que le centre de percussion se pouvoit assigner dans plusieurs autres lignes que dans la perpendiculaire susdite, dans laquelle seule il considère celui au moyen duquel il veut régler le fune-pendule, et que tous ces centres étoient dans un lieu. A quoi M. D. C., reconnoissant cette vérité, a répondu (2) que ce lieu est la circonférence d'un cercle. Pour le présent, je dirai plus : car je soutiens que tous ces centres ensemble (et non aucun en particulier), y ajoutant l'effet que contribue en cette occasion le centre de gravité du corps, règlent la longueur du fune-pendule qu'on demande; je soutiens aussi que M. D. C. a manqué derechef, disant que le lieu proposé est une circonférence ou arc de cercle; et enfin je soutiens que sa méthode ne donne aucun de tous ces centres au secteur dont je me suis servi en mon écrit; et le tout, faute à lui de considérer la direction des points mobiles, laquelle doit nécessairement être considérée en cette occasion.

---

(1) Clerselier, III, p. 506.

(2) Clerselier, III, p. 507, ligne 5. — Les assertions suivantes de Roberval indiquent qu'il est de plus en plus convaincu que la question des centres de percussion est distincte de celle du pendule synchrone.

» En quatrième et dernier lieu, j'avois dit que, quand le centre d'agitation ou de percussion auroit été trouvé dans la perpendiculaire, ainsi qu'il prétend, il ne paroissoit pas pourtant qu'il fût la règle ou distance requise pour les vibrations ou balancemens du corps, auquel balancement le centre de gravité contribue quelque chose aussi bien que le centre d'agitation, vu que ce centre de gravité est la cause de la réciprocation de ce balancement de droite à gauche et de gauche à droite et que, s'il n'y avoit que l'agitation, le mouvement seroit continuel d'une même part à l'entour de l'essieu; sur quoi M. D. C. dit [1] que c'est la gravité ou pesanteur du mobile qui est la cause de cette réciprocation de droite à gauche, et non pas le centre de gravité, lequel n'est en ce cas qu'une chimère, n'étant plus du tout ou étant changé en celui d'agitation. Ici, je reconnois qu'il est aveugle volontaire et qu'à dessein il fuit la lumière et la distinction qui lui sont contraires, pour se jeter dans les ténèbres et la confusion, sans respecter la Méchanique, dont il choque manifestement les principes, par lesquels elle nous prescrit que, quand un même corps est porté de deux différentes puissances, chacune a son centre particulier, et qu'on doit considérer distinctement la force et la direction de chacune de ces puissances rapportée au centre particulier de chacune, pour, au moyen de ces différentes forces et directions ainsi rapportées, établir la force, la direction et le centre du composé de ces puissances; et ce, soit que le corps soit libre ou balancé sur quelque essieu, de même que l'on considère distinctement la pesanteur et le centre particulier de chacune des parties qui composent un même corps, pour, par la proportion réciproque, établir le centre de gravité du total, lequel centre est le plus souvent tout autre que chacun des particuliers, qui pourtant ne deviennent pas des chimères, ni ne se changent pas en celui du total.

» Or ici, la pesanteur du corps est une puissance, l'agitation du même en est une autre, quoiqu'elle soit causée par la pesanteur, et chacune de ces puissances a sa force, ses directions et son centre propre et particulier, qui servent à examiner le centre du composé de ces différentes puissances, lequel centre change sans

---

[1] Clerselier, III, 88, p. 507, ligne 21 et suiv.

doute en chaque différente position du corps balancé à l'entour d'un même essieu; et par ces changemens, ce centre décrit un lieu dans le même corps. De ce lieu, les différents points étant différemment éloignés de l'essieu du mouvement, ces différentes distances apportent indubitablement de l'altération à la vitesse du mouvement réciproque des vibrations. Il faudroit donc connoître et ce lieu et cette altération pour déterminer la longueur du funependule qui feroit les vibrations d'égale durée.

» C'est de quoi le raisonnement de M. D. C. est par trop éloigné et, partant, il ne se faut pas étonner si l'expérience contredit si constamment à ses conclusions, même aux corps qui prennent fort peu d'air, comme les secteurs de cercles ou plutôt de cylindres, balancés à l'entour de leur essieu et ayant fort peu d'épaisseur suivant la longueur du même essieu.

» Quant au reproche qu'il me fait, que mon écrit est trop long (1), je n'y répondrai autre chose, sinon que sa lettre est aussi trop longue d'autant de mots qu'il en a employé à faire ce reproche, qui ne se pratique d'ordinaire que hors de propos et sans sujet par quelques déclamateurs, lorsqu'ils manquent d'autres discours pour fournir à leurs déclamations.

» Pour conclusion, en cette cause, la raison et l'expérience sont de mon côté. Que si M. D. C. ne veut rien donner à l'une ni à l'autre, je laisse à chacun de juger ce que l'on doit espérer de lui qui, méprisant ces deux instrumens de la connoissance humaine, ne veut suivre que ses pensées, lesquelles il prend lui-même et veut faire passer aux autres pour autant de vérités.

» M. D. C. n'a pas mieux réussi contre Aristarque. Et, dans sa Géométrie imprimée, on lui peut faire le même reproche touchant le lieu *ad* 3 *et* 4 *lineas* qu'a fait sur le même sujet Apollonius à Euclide (2). Mais ces deux derniers points s'adressent au R. P. Mersenne, auquel je satisferai bientôt, comme j'espère, sur chacun d'iceux. »

---

(1) Clerselier, III, p. 505, ligne 7 en remontant.

(2) Le reproche de n'avoir pas fait la synthèse du lieu. C'est la première fois, semble-t-il, que Roberval émet cette critique, dont la justesse est incontestable.

XII.

Lettre inédite de Descartes à Mersenne du 12 octobre 1646.

La lettre qui précède, de Roberval à Charles Cavendish, n'est pas datée; comme on l'a vu, elle répond à la lettre de Descartes à Cavendish du 15 juin 1646; le noble anglais auquel ils s'adressaient, craignit d'envenimer la dispute et ne voulut pas se charger d'envoyer en Hollande la réplique de Roberval. Descartes le remercie de sa courtoisie à cet égard dans la lettre Clerselier III, 91, que l'annotateur anonyme de l'exemplaire de l'Institut date du 10 novembre, mais qui est plutôt du 2 du même mois. La communication fut donc faite par Mersenne, à qui Descartes ne pouvait refuser de faire à son tour une réplique; on la trouvera dans l'édition de Clerselier, III, 96, et sa date est du 2 novembre 1646. Mais le Minime avait d'abord annoncé à son correspondant l'existence de la lettre de Roberval, à une date postérieure au 15 septembre et qui motiva la réponse suivante, inédite. C'est un morceau écrit de verve et des plus curieux pour qui veut apprécier le caractère de Descartes.

Mon Révérend Père,

« Il y a fort peu de temps que je me suis donné l'honneur de vous écrire (1), mais pource que j'ai encore depuis reçu de vos lettres où vous me menacez de m'envoyer des écrits de Roberval (2), j'ai pensé vous devoir encore écrire ce mot pour vous dire que j'estime si peu tout ce qui sauroit venir de lui que je ne crois pas qu'il vaille le port, et que je vous supplie très humblement de ne m'envoyer jamais rien de sa part; je n'ai point tant de curiosité pour voir des sottises. Il a beau dire qu'il en sait mille fois plus que moi en Géométrie; pendant qu'il n'en donnera point d'autres preuves qu'il n'a fait jusques à présent, je ne l'en estimerai pas

(1) La lettre du 5 octobre 1646 dont un extrait a été donné plus haut.

(2) Il s'agit de la lettre de Roberval à Cavendish, reproduite ci-dessus et dont la date peut ainsi être fixée en septembre 1646. Mersenne semble avoir attendu, pour l'envoyer à Descartes, les critiques que Roberval annonçait contre la Géométrie, mais qu'il ne semble pas avoir jamais rédigées.

davantage. Et pour ce qu'il m'a dit, étant à Paris, touchant la question de Pappus, sachez que ce n'étoit rien qui concernât la Géométrie, mais seulement la grammaire, en ce qu'il faisoit quelque équivoque ou transposoit quelque virgule pour dire que je n'avois pas bien pris le sens de l'auteur; ce que je jugeai alors si ridicule et de si peu d'importance que je ne le mis point en ma mémoire et ne le puis pour tout retrouver; mais pensez-vous que, s'il avoit quelque chose à y reprendre, il fût besoin de l'en prier pour l'obliger à le faire? Je vous assure bien que, tout au contraire, il n'y auroit point de prières qui le pûssent faire taire et qu'il n'auroit pas marchandé deux ans à m'envoyer cette belle pièce. Quoi qu'il en soit, je vous supplie encore un coup de ne m'envoyer jamais rien de sa part, ni aussi de la part d'aucun autre de ses semblables : je veux dire de ceux qui ne cherchent pas ingénûment la vérité, mais tâchent d'acquérir de la réputation en me contredisant.

» Enfin, je déclare dès à présent que je ne sais plus lire aucuns écrits, excepté les lettres de mes amis qui m'apprendront de leurs nouvelles et en quoi j'aurai moyen de leur servir; comme aussi je n'écrirai jamais plus rien que des lettres dont le sujet sera : *Si vales, bene est* (1), etc. Je ne me mêle plus d'aucune science que pour mon instruction particulière, et tous ceux qui se vanteront d'avoir quelque chose à dire contre mes écrits, je vous prie de les convier, non point à me l'envoyer en particulier, mais à le faire imprimer; et qu'ils fassent des livres contre moi tant qu'ils voudront, si je n'apprends des plus intelligens qu'ils soient très bons, je ne les lirai seulement pas. Et je dois encore moins lire des choses écrites à la main que je saurai venir d'un homme comme Roberval, de qui je n'ai jamais rien vu qui valût rien.

» Je suis néanmoins,
» Mon Révérend Père,

» Votre très humble, très zélé
et très obligé serviteur.

» DESCARTES.

» D'Egmond le 12 octobre 1646.

---

(1) « Si vous vous portez bien, cela va bien ». Cette formule est empruntée à Apollonius (préface du Livre II des Coniques, dédié à Eudème).

» Je viens d'apprendre la reddition de Dunkerque. La lettre ici-jointe est ma réponse à celle que vous m'avez envoyée de mon neveu du Crevis. »

NOUVELLES MANIÈRES D'EXPRIMER, AU MOYEN DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE, LES COORDONNÉES D'UN POINT DE LA SURFACE DU QUATRIÈME DEGRÉ DÉCRITE PAR LES SOMMETS DES CONES DU SECOND ORDRE QUI PASSENT PAR SIX POINTS DONNÉS;

PAR M. F. CASPARY.

Les coordonnées d'un point de la surface du quatrième degré (1), décrite par les sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés s'expriment, on le sait, au moyen des fonctions thêta de deux arguments. M. *Schottky* (2), le premier, a établi cette importante proposition, en montrant que les coordonnées sont proportionnelles aux produits de quatre fonctions thêta dont trois sont impaires. Dans une Note récente (3), j'ai montré que les mêmes coordonnées peuvent aussi être représentées par les produits de trois fonctions thêta dont une seule est impaire. Si l'on remplace, dans ces expressions, les fonctions thêta, après les avoir transformées convenablement, par les fonctions hyperelliptiques de première espèce, on est conduit, pour les coordonnées et pour l'équation de la surface, à des formes d'une simplicité surprenante que je me propose de communiquer dans cette Note.

(1) CHASLES, *Aperçu historique*, Note XXXIII, 1837 (deuxième édition, p. 403). *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LII, p. 1159, 1861. THOM. WEDDLE, *The Cambridge and Dublin Math. Journal*, vol. V, note de pied, p. 69, 1850. CAYLEY, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LII, p. 1216, 1861; *Proceedings of the London Math. Soc.*, vol. III, p. 29, 1870; vol. IV, p. 20, 1872. GEISER, *Vierteljahrsschrift der Zürcher Naturforsch. Gesellschaft*, t. X, p. 226, 1865; *Journal de M. Borchardt*, t. LXVII, p. 88, 1866. HIERHOLZER, *Math. Ann.*, t. II, p. 582, 1869; t. IV, p. 172, 1871. DARBOUX, ce *Bulletin*, 1re série, t. I, p. 354, 1870. REYE, *Journal de M. Borchardt*, t. LXXXVI, p. 86, 1878. HUNYADY, *ibidem*, t. XCII, p. 304, 1881. CASPARY, ce *Bulletin*, 2e série, t. XI, p. 233, 1887; t. XIII, p. 221, 1889.

(2) *Journal de M. Kronecker*, t. CV, p. 238, 1889.

(3) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1356, n° 24, 15 juin 1891.

Je les déduirai directement de deux formules connues, relatives auxdites fonctions.

Les fonctions hyperelliptiques de première espèce sont définies, d'après M. *Weierstrass*, par les expressions

$$P_\mu = \sqrt{(s_1 - a_\mu)(s_2 - a_\mu)},$$

$$P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu} = \frac{P_\mu P_\nu}{s_1 - s_2}\left[\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1 - a_\mu)(s_1 - a_\nu)} - \frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2 - a_\mu)(s_2 - a_\nu)}\right],$$

$$(\mu, \nu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon; \quad \mu \neq \nu),$$

où les indices α, β, γ, δ, ε désignent, dans un ordre quelconque, 0, 1, 2, 3, 4, et où

$$R(s_k) = A_0(s_k - a_0)(s_k - a_1)(s_k - a_2)(s_k - a_3)(s_k - a_4) \qquad (k = 1, 2),$$

A_0; $a_0, \ldots, a_4$ étant des constantes et s_1, s_2 des variables.

Ces quinze fonctions P_μ, $P_{\mu\nu}$ sont liées, entre elles, par des relations très nombreuses. En désignant les différences $a_\beta - a_\gamma$, $a_\gamma - a_\alpha$, ... par $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$, ..., je signale les deux suivantes et bien connues [1]

$$(1) \qquad (\beta\gamma)P_\alpha P_{\alpha\delta} + (\gamma\alpha)P_\beta P_{\beta\delta} + (\alpha\beta)P_\gamma P_{\gamma\delta} = 0,$$

$$(2) \qquad P_{\alpha\delta}P_{\beta\delta} - P_{\alpha\varepsilon}P_{\beta\varepsilon} = -A_0(\delta\varepsilon)P_\alpha P_\beta.$$

Ce sont les seules que je vais appliquer.

Si l'on remplace, dans la première formule, l'indice γ par l'indice δ, on obtient

$$(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)P_\beta P_{\beta\gamma} - (\beta\delta)(\beta\varepsilon)P_\alpha P_{\alpha\gamma} = (\alpha\beta)\{(\alpha\varepsilon)P_\delta P_{\gamma\delta} + (\beta\delta)P_\alpha P_{\alpha\gamma}\};$$

or on a, d'après la deuxième formule,

$$A_0(\alpha\varepsilon)P_\gamma P_\delta = -P_{\alpha\gamma}P_{\alpha\delta} + P_{\gamma\varepsilon}P_{\delta\varepsilon},$$
$$A_0(\beta\delta)P_\alpha P_\gamma = -P_{\alpha\beta}P_{\beta\gamma} + P_{\alpha\delta}P_{\gamma\delta},$$

d'où résulte, en multipliant la première formule par $P_{\gamma\delta}$ et la deuxième par $P_{\alpha\gamma}$,

$$A_0 P_\gamma\{(\alpha\varepsilon)P_\delta P_{\gamma\delta} + (\beta\delta)P_\alpha P_{\alpha\gamma}\} = P_{\gamma\delta}P_{\gamma\varepsilon}P_{\delta\varepsilon} - P_{\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}P_{\alpha\beta};$$

---

[1] *Voir* Brioschi, *Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine* (*Ann. di Matem.*, serie 2ª, t. XIV, p. 247), et ma Note, insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXI, p. 226.

donc on obtient

$$(3)\quad \begin{cases} A_0(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)P_\beta P_\gamma P_{\beta\gamma} - A_0(\beta\delta)(\beta\varepsilon)P_\alpha P_\gamma P_{\alpha\gamma} + (\alpha\beta)P_{\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}P_{\alpha\beta} \\ \quad = (\alpha\beta)P_{\gamma\delta}P_{\gamma\varepsilon}P_{\delta\varepsilon}. \end{cases}$$

Si l'on remplace, dans cette formule, les indices α, β, γ respectivement par les indices β, γ, α et si l'on pose

$$(1)\quad \begin{cases} u_1 = A_0(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)P_\beta\ P_\gamma\ P_{\beta\gamma}, \\ u_2 = A_0(\beta\delta)(\beta\varepsilon)P_\alpha\ P_\gamma\ P_{\alpha\gamma}, \\ u_3 = A_0(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)P_\alpha\ P_\beta\ P_{\alpha\beta}, \\ u_4 = \qquad\qquad P_{\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}P_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

on a les deux relations

$$u_1 - u_2 + (\alpha\beta)u_4 = (\alpha\beta)P_{\gamma\delta}P_{\gamma\varepsilon}P_{\delta\varepsilon},$$
$$u_2 - u_3 + (\beta\gamma)u_4 = (\beta\gamma)P_{\alpha\delta}P_{\alpha\varepsilon}P_{\delta\varepsilon},$$

et, par conséquent, on trouve d'une part

$$(\mathrm{II}_1)\qquad \frac{u_1}{u_3}\,\frac{u_1 - u_2 + (\alpha\beta)u_4}{u_2 - u_3 + (\beta\gamma)u_4} = \frac{(\alpha\beta)(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)}{(\beta\gamma)(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)}\,\frac{P_\gamma P_{\beta\gamma}P_{\gamma\delta}P_{\gamma\varepsilon}}{P_\alpha P_{\alpha\beta}P_{\alpha\delta}P_{\alpha\varepsilon}}.$$

D'autre part, si l'on remplace dans les formules (1) et (2) l'indice γ par δ, et si on les multiplie respectivement par P_γ et $P_{\alpha\beta}$, on a

$$(\beta\delta)P_\alpha P_\gamma P_{\alpha\gamma} - (\alpha\delta)P_\beta\ P_\gamma\ P_{\beta\gamma} = -(\alpha\beta)P_\gamma\ P_\delta\ P_{\gamma\delta},$$
$$A_0(\gamma\varepsilon)P_\alpha P_\beta P_{\alpha\beta} + \qquad P_{\beta\gamma}P_{\alpha\gamma}P_{\alpha\beta} = \qquad P_{\alpha\varepsilon}P_{\beta\varepsilon}P_{\alpha\beta},$$

ou

$$(\beta\varepsilon)u_1 - (\alpha\varepsilon)u_2 = A_0(\alpha\beta)(\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)P_\gamma\ P_\delta\ P_{\gamma\delta},$$
$$u_3 + (\gamma\delta)u_4 = \qquad (\gamma\delta)P_{\alpha\varepsilon}P_{\beta\varepsilon}P_{\alpha\beta},$$

d'où résultent, si l'on remplace α, β, γ par β, γ, α, les formules

$$(\gamma\varepsilon)u_2 - (\beta\varepsilon)u_3 = A_0(\beta\gamma)(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)P_\alpha\ P_\delta\ P_{\alpha\delta},$$
$$u_1 + (\alpha\delta)u_4 = \qquad (\alpha\delta)P_{\beta\varepsilon}P_{\gamma\varepsilon}P_{\beta\gamma}.$$

Par conséquent, on obtient par division

$$(\mathrm{II}_2)\quad \frac{(\beta\varepsilon)u_1 - (\alpha\varepsilon)u_2}{(\gamma\varepsilon)u_2 - (\beta\varepsilon)u_3}\,\frac{u_1 + (\alpha\delta)u_4}{u_3 + (\gamma\delta)u_4} = \frac{(\alpha\beta)(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)}{(\beta\gamma)(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)}\,\frac{P_\gamma P_{\beta\gamma}P_{\gamma\delta}P_{\gamma\varepsilon}}{P_\alpha P_{\alpha\beta}P_{\alpha\delta}P_{\alpha\varepsilon}},$$

et, comme les seconds membres des expressions (II_1) et (II_2) sont

les mêmes, les coordonnées $u_1, \ldots, u_4$ sont liées par la relation

$$\text{(II)} \qquad \frac{u_1}{u_3}\,\frac{u_1 - u_2 + (\alpha\beta)u_4}{u_2 - u_3 + (\beta\gamma)u_4} = \frac{(\beta\varepsilon)u_1 - (\alpha\varepsilon)u_2}{(\gamma\varepsilon)u_2 - (\beta\varepsilon)u_3}\,\frac{u_1 + (\alpha\delta)u_4}{u_3 + (\gamma\delta)u_4},$$

qui représente l'équation d'une surface du quatrième degré.

L'équation (II) se transforme, avec très peu de calcul, dans la suivante

$$\text{(III)} \qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_2u_3u_4\}u_2 \quad - \quad u_3 \quad + (\beta\gamma)u_4\} \\ +(\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_1u_3u_4\}u_3 \quad - \quad u_1 \quad + (\gamma\alpha)u_4\} \\ +(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_1u_2u_4\}u_1 \quad - \quad u_2 \quad + (\alpha\beta)u_4\} \\ - \qquad u_1u_2u_3\{(\beta\gamma)u_1 + (\gamma\alpha)u_2 + (\alpha\beta)u_3\} = 0, \end{array}\right.$$

ou, sous la forme d'un déterminant

$$\text{(IV)} \qquad \begin{vmatrix} (\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_2u_3u_4 & u_1 & (\alpha\delta) & (\alpha\varepsilon) \\ (\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_1u_3u_4 & u_2 & (\beta\delta) & (\beta\varepsilon) \\ (\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_1u_2u_4 & u_3 & (\gamma\delta) & (\gamma\varepsilon) \\ u_1u_2u_3 & u_4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs, l'équation (III) devient aussi

$$\text{(V)} \qquad \left\{\begin{array}{l} u_1^2\{(\beta\gamma)u_2u_3 \quad - (\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_2u_4 \quad + \quad (\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_3u_4\} \\ +u_2^2\{(\gamma\alpha)u_1u_3 \quad - (\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_3u_4 \quad + \quad (\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_1u_4\} \\ +u_3^2\{(\alpha\beta)u_1u_2 \quad - (\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_1u_4 \quad + \quad (\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_2u_4\} \\ -u_4^2\{(\beta\gamma)(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_2u_3 + (\gamma\alpha)(\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_1u_3 + (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_1u_2\} = 0. \end{array}\right.$$

Pour simplifier, de plus, les équations (III) et (V) j'introduis

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2 - u_3 + (\beta\gamma)u_4, \\ v_2 &= u_3 - u_1 + (\gamma\alpha)u_4, \\ v_3 &= u_1 - u_2 + (\alpha\beta)u_4, \\ v_4 &= (\beta\gamma)u_1 + (\gamma\alpha)u_2 + (\alpha\beta)u_3; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= (\beta\gamma)u_2u_3 - (\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_2u_4 + (\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_3u_4, \\ \mathfrak{S}_2 &= (\gamma\alpha)u_1u_3 - (\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_3u_4 + (\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_1u_4, \\ \mathfrak{S}_3 &= (\alpha\beta)u_1u_2 - (\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_1u_4 + (\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_2u_4, \\ \mathfrak{S}_4 &= (\beta\gamma)(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_2u_3 + (\gamma\alpha)(\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_1u_3 + (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_1u_2. \end{aligned}$$

Alors les équations (III) et (V) prennent les formes

$$(\mathrm{III}^*)\quad \left\{\begin{array}{r}(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_2u_3u_4v_1+(\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_1u_3u_4v_2+(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_1u_2u_4v_3\\ -u_1u_2u_3v_4=0\end{array}\right.$$

et

$$(\mathrm{V}^*)\qquad u_1^2\mathfrak{S}_1+u_2^2\mathfrak{S}_2+u_3^2\mathfrak{S}_3-u_4^2\mathfrak{S}_4=0.$$

Or, les expressions v_i, $\mathfrak{S}_j$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$ sont liées par les relations

$$\begin{gathered}v_1+v_2+v_3=0,\\ u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=u_4v_4,\\ (\alpha\nu)v_1+(\beta\nu)v_2+(\gamma\nu)v_3=-v_4;\\ (\nu=\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon);\end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered}(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)\mathfrak{S}_1+(\beta\delta)(\beta\varepsilon)\mathfrak{S}_2+(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)\mathfrak{S}_3=\mathfrak{S}_4,\\ u_1\mathfrak{S}_1+u_2\mathfrak{S}_2+u_3\mathfrak{S}_3=0,\\ (\alpha\nu)u_1\mathfrak{S}_1+(\beta\nu)u_2\mathfrak{S}_2+(\gamma\nu)u_3\mathfrak{S}_3=-u_4\mathfrak{S}_4;\\ (\nu=\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon);\end{gathered}$$

par conséquent les équations (III*) et (V*) se transforment enfin dans les équations très simples

$$(\mathrm{VI})\qquad u_i\mathfrak{S}_iv_j-u_j\mathfrak{S}_jv_i=0\qquad (i, j=1, 2, 3, 4).$$

La surface $\mathfrak{F}$ du quatrième degré dont l'équation est représentée, sous différentes formes, par les équations (II), (III), ..., (VI) passe par les quatre sommets du tétraèdre de référence et par les deux points dont les coordonnées sont $(\alpha\delta)$, $(\beta\delta)$, $(\gamma\delta)$, -1; $(\alpha\varepsilon)$, $(\beta\varepsilon)$, $(\gamma\varepsilon)$, -1. D'ailleurs ces six points A, B, C, D, E, F sont des nœuds dont les cônes tangentiels du second ordre sont représentés par $\mathfrak{S}_1=0$, $\mathfrak{S}_2=0$, ..., $\mathfrak{S}_5=0$, $\mathfrak{S}_6=0$, où

$$\begin{gathered}\mathfrak{S}_5=(\alpha\delta)\mathfrak{S}_1+(\beta\delta)\mathfrak{S}_2+(\gamma\delta)\mathfrak{S}_3,\\ \mathfrak{S}_6=(\alpha\varepsilon)\mathfrak{S}_1+(\beta\varepsilon)\mathfrak{S}_2+(\gamma\varepsilon)\mathfrak{S}_3.\end{gathered}$$

On reconnaît immédiatement que l'équation (IV) ne change pas si l'on y remplace u_1, u_2, u_3, u_4 respectivement par $(\alpha\delta)(\alpha\varepsilon)u_1'$, $(\beta\delta)(\beta\varepsilon)u_2'$, $(\gamma\delta)(\gamma\varepsilon)u_3'$, u_4'. Par conséquent, l'équation (IV) et dès lors aussi les autres équations par lesquelles je viens de représenter la surface $\mathfrak{F}$ seront satisfaites identiquement, si l'on y

écrit u'_i au lieu de $u_i (i = 1, 2, 3, 4)$, et si l'on pose

$$(\mathrm{I}') \quad \begin{cases} u'_1 = \quad P_\alpha P_{\alpha\beta} P_{\alpha\gamma}, \\ u'_2 = \quad P_\beta P_{\beta\gamma} P_{\beta\alpha}, \\ u'_3 = \quad P_\gamma P_{\gamma\alpha} P_{\gamma\beta}, \\ u'_4 = A_0 P_\alpha P_\beta \; P_\gamma. \end{cases}$$

Par les expressions (I) et (I') les coordonnées u_1, u_2, u_3 et u'_1, u'_2, u'_3 sont exprimées, au moyen des fonctions hyperelliptiques, d'une autre façon que les coordonnées u_4 et u'_4. Ce manque de symétrie peut être levé par une substitution linéaire, relative aux coordonnées qui jouit, d'ailleurs, de la propriété, remarquable de transformer les équations (III), ..., (VI) en d'autres, d'une forme tout à fait analogue.

En effet, si l'on pose

$$(\mathrm{I}_a) \quad \begin{cases} w_1 = P_{\beta\gamma} P_{\beta\delta} P_{\gamma\delta}, \\ w_2 = P_{\alpha\gamma} P_{\alpha\delta} P_{\gamma\delta}, \\ w_3 = P_{\alpha\beta} P_{\alpha\delta} P_{\beta\delta}, \\ w_4 = P_{\alpha\beta} P_{\alpha\gamma} P_{\beta\gamma}, \end{cases}$$

on a, d'après la formule (2),

$$\begin{aligned} u_1 &= (\alpha\varepsilon)(w_1 - w_4), \\ u_2 &= (\beta\varepsilon)(w_2 - w_4), \\ u_3 &= (\gamma\varepsilon)(w_3 - w_4), \end{aligned}$$

et, comme on a de plus

$$u_4 = w_4,$$

la substitution de ces valeurs dans l'équation (III) ou (III*) fournit, après quelques calculs simples, l'équation suivante, tout à fait analogue à (III*),

$$(\mathrm{III}^*_a) \qquad w_2 w_3 w_4 r_1 + w_1 w_3 w_4 r_2 - w_1 w_2 w_4 r_3 - w_1 w_2 w_3 r_4 = 0,$$

où

$$\begin{aligned} r_1 &= (\beta\varepsilon)(\gamma\delta) w_2 - (\gamma\varepsilon)(\beta\delta) w_3 - (\delta\varepsilon)(\beta\gamma) w_4, \\ r_2 &= (\gamma\varepsilon)(\alpha\delta) w_3 - (\alpha\varepsilon)(\gamma\delta) w_1 - (\delta\varepsilon)(\gamma\alpha) w_4, \\ r_3 &= (\alpha\varepsilon)(\beta\delta) w_1 - (\beta\varepsilon)(\alpha\delta) w_2 - (\delta\varepsilon)(\alpha\beta) w_4, \\ r_4 &= (\alpha\varepsilon)(\beta\gamma) w_1 - (\beta\varepsilon)(\gamma\alpha) w_2 - (\gamma\varepsilon)(\alpha\beta) w_3. \end{aligned}$$

L'équation (III^*_a) se transforme aussi aisément dans les deux

équations qui correspondent à (IV) et à (V*), savoir

$$(\mathrm{IV}_a)\qquad \begin{vmatrix} (\alpha\varepsilon)^{-1}\varpi_2\varpi_3\varpi_4 & \varpi_1 & (\alpha\varepsilon)^{-1} & 1 \\ (\beta\varepsilon)^{-1}\varpi_1\varpi_3\varpi_4 & \varpi_2 & (\beta\varepsilon)^{-1} & 1 \\ (\gamma\varepsilon)^{-1}\varpi_1\varpi_2\varpi_4 & \varpi_3 & (\gamma\varepsilon)^{-1} & 1 \\ (\delta\varepsilon)^{-1}\varpi_1\varpi_2\varpi_3 & \varpi_4 & (\delta\varepsilon)^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(\mathrm{V}_a^*)\qquad (\alpha\varepsilon)\varpi_1^2\mathcal{H}_1 + (\beta\varepsilon)\varpi_2^2\mathcal{H}_2 + (\gamma\varepsilon)\varpi_3^2\mathcal{H}_3 - (\delta\varepsilon)\varpi_4^2\mathcal{H}_4 = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= (\beta\gamma)\varpi_2\varpi_3 + (\gamma\delta)\varpi_3\varpi_4 - (\beta\delta)\varpi_2\varpi_4, \\ \mathcal{H}_2 &= (\gamma\alpha)\varpi_3\varpi_1 + (\alpha\delta)\varpi_1\varpi_4 - (\gamma\delta)\varpi_3\varpi_4, \\ \mathcal{H}_3 &= (\alpha\beta)\varpi_1\varpi_2 + (\beta\delta)\varpi_2\varpi_4 - (\alpha\delta)\varpi_1\varpi_4, \\ \mathcal{H}_4 &= (\beta\gamma)\varpi_2\varpi_3 + (\gamma\alpha)\varpi_1\varpi_3 + (\alpha\beta)\varpi_1\varpi_2. \end{aligned}$$

Or, les expressions r_i, $\mathcal{H}_j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ sont liées par les relations

$$\begin{gathered} r_1 + r_2 + r_3 = r_4, \\ (\alpha\varepsilon)\varpi_1 r_1 + (\beta\varepsilon)\varpi_2 r_2 + (\gamma\varepsilon)\varpi_3 r_3 = (\delta\varepsilon)\varpi_4 r_4, \\ (\alpha\nu) r_1 + (\beta\nu) r_2 + (\gamma\nu) r_3 = (\delta\nu) r_4 \\ (\nu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_4, \\ \varpi_1\mathcal{H}_1 + \varpi_2\mathcal{H}_2 + \varpi_3\mathcal{H}_3 = \varpi_4\mathcal{H}_4, \\ (\alpha\nu)\varpi_1\mathcal{H}_1 + (\beta\nu)\varpi_2\mathcal{H}_2 + (\gamma\nu)\varpi_3\mathcal{H}_3 = (\delta\nu)\varpi_4\mathcal{H}_4, \\ (\nu = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon); \end{gathered}$$

par conséquent, les équations (III_a^*) et (V_a^*) se transforment dans les équations

$$(\mathrm{VI}_a)\qquad \varpi_i\mathcal{H}_i r_j - \varpi_j\mathcal{H}_j r_i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

qui sont tout à fait analogues aux équations (VI).

Comme l'équation (IV_a) ne change pas, si l'on y remplace ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4 respectivement par $(\alpha\varepsilon)^{-1}\varpi_1^{-1}$, $(\beta\varepsilon)^{-1}\varpi_2^{-1}$, $(\gamma\varepsilon)^{-1}\varpi_3^{-1}$, $(\delta\varepsilon)^{-1}\varpi_4^{-1}$, les équations (III_a^*), ..., (VI_a) seront, de même, satisfaites identiquement, si l'on y écrit ϖ'_i au lieu de $\varpi_i (i = 1, 2, 3, 4)$, et si l'on pose

$$(\mathrm{I}'_a)\qquad \begin{cases} \varpi'_1 = (\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)(\delta\varepsilon)\mathrm{P}_{\alpha\beta}\mathrm{P}_{\alpha\gamma}\mathrm{P}_{\alpha\delta}, \\ \varpi'_2 = (\gamma\varepsilon)(\alpha\varepsilon)(\delta\varepsilon)\mathrm{P}_{\beta\gamma}\mathrm{P}_{\beta\alpha}\mathrm{P}_{\beta\delta}, \\ \varpi'_3 = (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)(\delta\varepsilon)\mathrm{P}_{\gamma\alpha}\mathrm{P}_{\gamma\beta}\mathrm{P}_{\gamma\delta}, \\ \varpi'_4 = (\alpha\varepsilon)(\beta\varepsilon)(\gamma\varepsilon)\mathrm{P}_{\delta\alpha}\mathrm{P}_{\delta\beta}\mathrm{P}_{\delta\gamma}. \end{cases}$$

Pour démontrer enfin que la surface dont les coordonnées sont représentées par les expressions (I), (I′), (I_a), (I'_a) forme en effet le lieu géométrique des sommets des cônes du second ordre passant par les six points A, B, ..., F, je vais établir l'équation de ce lieu. Si l'on joint le sommet du cône passant par les points A, B, ..., F avec ces points, les six arêtes détermineront, sur un plan quelconque, six points a, b, ..., f, situés sur une conique. Par conséquent, en désignant les coordonnées des points a, b, ..., f par a_n, b_n, ..., f_n ($n = 1, 2, 3$), on aura, d'après le théorème de Pappus,

$$\frac{[cbd]}{[abd]}\frac{[cef]}{[aef]} = \frac{[cbe]}{[abe]}\frac{[cdf]}{[adf]},$$

où $[cbd]$, ... désigne le déterminant $\Sigma \pm c_1 b_2 d_3$. Or, si u_1, u_2, u_3, u_4 sont les coordonnées du sommet du cône et si $u_4 = 0$ représente l'équation du plan sécant, les coordonnées a_n, ..., f_n prennent les valeurs

$$\begin{array}{lll}
a_1 = u_4, & a_2 = 0, & a_3 = 0; \\
b_1 = 0, & b_2 = u_4, & b_3 = 0; \\
c_1 = 0, & c_2 = 0, & c_3 = u_4; \\
d_1 = u_1, & d_2 = u_2, & d_3 = u_3; \\
e_1 = u_1 + (\alpha\delta)u_4, & e_2 = u_2 + (\beta\delta)u_4, & e_3 = u_3 + (\gamma\delta)u_4; \\
f_1 = u_1 + (\alpha\varepsilon)u_4, & f_2 = u_2 + (\beta\varepsilon)u_4, & f_3 = u_3 + (\gamma\varepsilon)u_4;
\end{array}$$

d'où résulte

$$\frac{[cbd]}{[abd]} = \frac{u_1}{u_3}, \qquad \frac{[cbe]}{[abe]} = \frac{u_1 + (\alpha\delta)u_4}{u_3 + (\gamma\delta)u_4},$$

$$\frac{[cef]}{[aef]} = \frac{u_1 - u_2 + (\alpha\beta)u_4}{u_2 - u_3 + (\beta\gamma)u_4}, \qquad \frac{[cdf]}{[adf]} = \frac{(\beta\varepsilon)u_1 - (\alpha\varepsilon)u_2}{(\gamma\varepsilon)u_2 - (\beta\varepsilon)u_3}.$$

Par conséquent le théorème de Pappus fournit, pour équation du lieu cherché, précisément l'équation (II).

Au moyen d'une substitution linéaire, relative aux coordonnées u_1, ..., u_4, on peut représenter l'équation de la surface $\mathfrak{F}$ sous la forme la plus générale. En effet, si l'on choisit, au lieu des quatre points A, B, C, D, quatre points quelconques comme les sommets du tétraèdre de référence, et si l'on désigne les coordonnées du sommet du cône et des points A, B, ..., F, par rapport à ce nouveau tétraèdre, par X_i; A_i, B_i, ..., F_i ($i = 1, 2, 3, 4$), le

même théorème de Pappus fournit l'équation de la surface $\mathfrak{F}$, sous la forme générale

$$\text{(VII)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} [XABC][XADE][XBEF][XCDF] \\ -[XACD][XBCF][XABE][XDEF] = 0, \end{array} \right.$$

où $[XABC], \ldots,$ désigne le déterminant $\Sigma \pm X_1 A_2 B_3 D_4$.

Dans mon Mémoire *Sur les cubiques gauches* (¹), j'ai déduit l'équation (VII) du théorème de Pascal et j'en ai tiré la proposition géométrique, que le point X, situé sur la surface $\mathfrak{F}$, est situé aussi dans le plan, déterminé par les trois points où les plans XFA, XAB, XBC coupent respectivement les droites CD, DE, EF. Dès lors, si l'on désigne le point d'intersection du plan XBC et de la droite EF par $[XBC \quad EF], \ldots,$ et si l'on pose (voir *loc. cit.*, p. 226)

$$\begin{array}{ll} [XAB \quad DE] = L, & [XDE \quad AB] = L', \\ [XBC \quad EF] = M', & [XEF \quad BC] = M, \\ [XCD \quad FA] = N, & [XFA \quad CD] = N', \end{array}$$

l'égalité

$$\text{(VIII)} \qquad [M'N'LX] = 0,$$

exprimant que le point X est situé dans le plan M'N'L, et, plus généralement, toute égalité exprimant que le point X est situé dans le plan, déterminé par trois quelconques des six points L, M, ..., N', représente l'équation de la surface $\mathfrak{F}$. Donc on a, pour cette surface, la génération suivante :

Si l'on fait passer par un point mobile et par les six côtés d'un hexagone gauche six plans; si l'on en détermine les six points d'intersection avec les côtés opposés; et si l'on assujettit enfin le point mobile à la condition de demeurer sur le plan déterminé par trois quelconques des six points d'intersection, le point mobile décrira la surface $\mathfrak{F}$.

On reconnaît immédiatement que cette génération de la surface $\mathfrak{F}$ est de celles qui découlent des principes, dus à Grassmann et déve-

(¹) Ce *Bulletin*, 2e série, t. XI, p. 254.

loppés par moi dans les Tomes XI et XIII de ce Recueil. En vertu de ces principes, qui permettent aussi de transformer immédiatement dans l'équation (VII) les égalités résultant du théorème précédent (voir *loc. cit.*, article 19), on déduit de la surface $\mathcal{F}$ une autre surface Φ de quatrième classe, tout à fait analogue à la surface $\mathcal{F}$ et enveloppée par un plan mobile ξ, passant par le point X. Ces deux surfaces $\mathcal{F}$ et Φ jouissent de la propriété que, si les coordonnées de l'une sont représentées par des produits de trois fonctions hyperelliptiques de première espèce, les coordonnées de l'autre s'expriment par des produits de quatre fonctions hyperelliptiques de première espèce. Au moyen de ce résultat, dont j'ai déjà donné, dans ma Note citée du 15 juin 1891, une première conséquence, les expressions précédentes des coordonnées conduisent à d'autres, égales aux produits de quatre fonctions hyperelliptiques, et en exprimant, par ces fonctions, aussi les quantités v_i, $\mathfrak{Z}_i$, r_i, $\mathfrak{X}_i$ et les analogues, les relations qui existent pour elles entraînent des relations nombreuses et importantes pour les fonctions hyperelliptiques. C'est ainsi que la surface dont il s'agit, dans cette Note, entre dans la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce et qu'elle forme un nouveau lien entre ces fonctions et la Géométrie de l'hexagone et de l'heptagone gauches. En conséquence, d'une part, les propositions géométriques, dues à Chasles, à M. Reye, à M. Schröter et à M. Darboux, fournissent des relations concernant les fonctions hyperelliptiques, et, d'autre part, ces relations conduisent à des nouvelles propositions de la Géométrie.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

TAFELMACHER (AUG.). — *Zu dem dritten Gauss'sche Beweise des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste gehörende Untersuchungen.* Inauguraldiss. 24 S. 4°. Göttingen.

TSCHOPP (E.). — *Die symbolische Methode zur Auflösung von Differentialgleichungen.* Programm der Gewerbeschule in Mülhausen i. E. 20 S.

WEYR (E.). — *Ueber Raumcurven 6. Ordnung vom Geschlechte.* Eins. 1. Mittheilg. (Sonderdr.). Lex.-8°, 20 S. Leipzig, Freytag, 40 Pf.

WIRTINGER (W.). — *Ueber Functionen, welche gewissen Functionalgleichungen genügen.* (Sonderdr). Lex.-8°, 8 S. Leipzig, Freytag, 20 Pf.

WOLF (C.). — *Astronomie et Géodésie.* Cours professé à la Sorbonne. In-8° raisin, VIII-416 p. avec figures. Paris, Carré, 10 fr.

POINCARÉ (H.). — *Cours de Physique mathématique : Électricité et Optique. II. Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz.* In-8° raisin, XII-264 p. Paris, Carré, 8 fr.

BENOIT (P.). — *Ueber Differentialgleichungen, welche durch doppeltperiod. Funktionen 2. Gattung erfüllt werden.* Gr. in-4°, 19 S. Berlin, Gaertner, 1 M.

BOURLET (C.). — *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues.* In-4°, 68 p. Paris, Gauthier-Villars.

CAUCHY (AUG.). — *Œuvres complètes.* Publiées sous la direction scientifique et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. 2e série, t. IX. In-4°, 452 p. Paris, Gauthier-Villars, 25 fr.

COATPONT (DE). — *Note sur la géométrie du compas.* In-8°, 8 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 50 c.

CONGRÈS *international de Chronométrie à l'Exposition universelle internationale de* 1889. Comptes rendus par E. Caspari. In-4°, VI-216 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 7 fr. 50 c.

ARGAIS (FR. D'). — *Corso di Calcolo infinitesimale.* Vol. 1. 8°. Padova, Draghi, 11 L.

FOURET (G.). — *Sur la méthode d'approximation de Newton.* In-8°, 23 p. Paris, Gauthier-Villars, 1 fr.

HERTZ (M.-H.). — *Sur les équations fondamentales de l'Électrodynamique pour les corps en repos.* Gr. in-8°, 66 p. Basel Georg., 2 M.

JAHRBUCH. — *Ueber die Fortschritte der Mathematik.* Herausgegeben von E. Lampe. 20 Bd., Jahrg., 1888. 2 Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer, 2 M.

MANGEOT (S.). — *De la symétrie courbe.* In-4°, 165 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

RIQUIER. — *Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables et sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques.* In-4°, 28 p. Paris, Gauthier-Villars, 1 fr. 50 c.

VERONESE (G.). — *Il continuo rettilineo e l'assiomo V di Archimede.* Turin, Loescher, 2 L. 50 c.

WOLF (R.). — *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. 2. Halbbd.* Gr. in-8°, mit Holzschn. Zürich, Schulthess, 8 M.

BRILLOUIN (M.). — *Recherches récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique.* Exposé des travaux de v. Helmholtz, Kirchhoff, Sir W. Thomson, Lord Rayleigh, etc. Ire Partie : Tourbillons. In-4°, 48 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 2 fr. 50 c.

DULOS (P.). — *Cours de Mécanique à l'usage des Écoles d'Arts et Métiers et de l'enseignement spécial des lycées.* 2e édition, IVe Partie. In-8°, XI-567 p. Paris, Gauthier-Villars, 9 fr. 50 c.

JAMIN (J.). — *Cours de Physique de l'École Polytechnique.* 4e édit., augmentée et entièrement refondue par M. Bouty, t. IV, IIe Partie, 4 fasc. : Météorologie électrique. Applications de l'électricité, théories générales. In-8°, 244 p. avec fig. et planche. Paris, Gauthier-Villars, 5 fr.

KIRCHHOFF (G.). — *Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag.* Herausgegeben von L. Boltzmann. Gr. in-8°, VII, 137 S., m. 1 Taf. Leipzig, Barth, 3 M. 60 Pf.

COMBELLES (F.). — *Note sur la Tachéométrie, ou levé de plans à la stadia.* In-8°, 12 p. Paris, l'auteur, 214, boulevard Pereire.

POCKELS (F.). — *Ueber die partielle Differentialgleichung*

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Mit einem Vorwort von F. Klein. Gr. in-8°, XII-339 S., m. fig. Leipzig, Teubner, 8 M.

RESAL (H.). — *Exposition de la théorie des surfaces.* In-8°, XIII-172 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 4 fr. 50 c.

WOLF (C.). — *Astronomie et Géodésie.* Cours professé à la Sorbonne. In-8°, VII-415 p. avec fig. Paris, Carré.

CHAPPUIS (J.) et BERGET (A.). — *Leçons de Physique générale*. 2 Vol. in-8°, avec fig., t. I : Instruments de mesure, chaleur, capillarité, IX-487 p.; t. II : Électricité et magnétisme, 500 p. Paris, Gauthier-Villars, 13 fr.

KIRCHHOFF (G.). — *Vorlesungen über mathematische Physik*. 2 Bd. *Mathematische Optik*. Herausgegeben von K. Hensel. Gr. in-8°, VIII-272 S., m. 1 Lichtdr.-Bildniss. Leipzig, Teubner, 10 M.

POINCARÉ (H.). — *Cours de Physique mathématique*. Électricité et Optique, II : Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz. In-8°, IX-263 p. avec fig. Paris, Carré.

TARDIF (ED.). — *Système rationnel des Sciences expérimentales*. In-8°, 48 p. Paris, Garnier frères, 1 fr.

WALLON (F.). — *Traité élémentaire de l'objectif photographique*. In-8°, VIII-300 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 7 fr. 50 c.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XV.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XV; 1891. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

BETTAZZI (B.). — Teoria delle grandezze 53-68

FORSYTH. — Theory of differential equations 48-50

FULST (O.). — Bestimmung des Flächeninhalts des Mantels eines schiefen Kegels mit elliptischer Grundfläche 109-111

FRENET. — Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal 12

GILBERT. — Cours de Mécanique analytique 197-198

GOURSAT. — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre 5-10

HEIBERG (J.-L.). — Apollonii Pergæi quæ græce exstant, cum commentariis antiquis 221-226

HERMITE. — Cours rédigé par M. Andoyer 253-255

JUNKER. — Ueber algebraische Korrespondenzen 165-167

LAURENT. — Traité d'Analyse 81-83

MATHIEU (E.). — Théorie de l'élasticité des corps solides 198-202

OCAGNE (M. D'). — Nomographie; les calculs usuels effectués au moyen des abaques 297-301

POCKELS. — Ueber die partielle Differentialgleichung 278-281

POINCARÉ (H.). — Électricité et Optique 129-146

PUISEUX (P.). — Leçons de Cinématique, Mécanismes, Hydrostatique, Hydrodynamique 10-11

RESAL. — Exposition de la théorie des surfaces 226-227

SCHRŒTER. — Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet 83-86

Pages.
SOPHUS LIE. — Theorie der Transformationsgruppen..... 13-48
TEIXEIRA (G.). — Curso di Analyse infinitesimal. Calcul differencial... 12
WALRAS. — Éléments d'Économie politique pure..... 277
WEBER (H.). —Elliptische Functionen und Algebraische Zahlen..... 105-109

MÉLANGES.

ASTOR (A.). — Note sur les mouvements relatifs..... 255-260
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE..... 101-104, 126-128, 163-164, 275-276
CALLANDREAU (O.). — Sur le calcul des polynômes $X_n(\cos\theta)$ de Legendre pour les grandes valeurs de n..... 121-124
CASPARY (F.). — Nouvelles manières d'exprimer, au moyen des fonctions hyperelliptiques de première espèce, les coordonnées d'un point de la surface du quatrième degré décrite par les sommets des cônes du second ordre qui passent par six points donnés..... 308-317
CELLÉRIER (CH.). — Note sur une question de Mécanique..... 146-162
— Sur la détermination d'un minimum géométrique remarquable..... 167-196
HUMBERT (E.). — Sur un théorème d'Arithmétique..... 51-52
KAPTEYN (W.). — Nouvelle méthode pour démontrer la formule fondamentale des fonctions θ..... 125-126
KERBEDZ (Mme E. DE). — Sophie de Kowalevski..... 212-220
LÉVY (L.). — Note sur le déplacement d'une figure de forme invariable. 76-80
MÉRAY (CH.). — Démonstration élémentaire d'un lemme fondamental de Cauchy..... 86-101
— Méthode directe fondée sur l'emploi des séries pour prouver l'existence des racines des équations entières à une inconnue, par la simple exécution de leur calcul numérique..... 236-252
TANNERY (PAUL). — Les autographes de Descartes à la Bibliothèque nationale..... 69-75, 111-120, 202-212, 228-236, 260-274, 281-296, 301-318

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XV.

16960 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

—

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XV. — ANNÉE 1891.

(TOME XXV DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Notices biographiques et bibliographiques concernant les membres, les correspondants et les associés, 1886. Bruxelles, Hayez, 1887. VII-606 p. in-12.

Recueil bibliographique contenant des renseignements détaillés sur Adan, Catalan, Delbœuf, Folie, Houzeau, Le Paige, Liagre, Mailly, Mansion, Maus, Montigny, F. Plateau, Spring, Steichen, de Tilly, Van der Mensbrugghe, et des indications plus brèves sur la plupart des mathématiciens et physiciens belges morts avant juillet 1886.

BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE; 56e année, 3e série. Bruxelles, F. Hayez, 1887 (1).

Tome XIII (janvier à juin 1887).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur quelques effets curieux des forces moléculaires au contact d'un solide et d'un liquide. (11-15).

---

(1) Voir *Bulletin*, XIII, p. 6-18.

Mansion (*P.*). — Sur le dernier théorème de Fermat. (16-17). Rectification. (225).

Si $x^n + y^n = z^n$, x, y, z sont des nombres composés. Rectification : la démonstration est insuffisante pour le plus petit des trois nombres.

Deruyts (*J.*). — Sur quelques propriétés des semi-invariants. (226-235).

Le Paige (*C.*). — Rapport. (164-165).

1° Soit T un semi-invariant

$$\frac{d}{d\omega_\sigma} = \Sigma_\sigma\left(a_1 \frac{d}{da_0} + a_2 \frac{d}{da_1} + \ldots + a_{n+1} \frac{d}{da_n}\right),$$

la somme s'étendant à un groupe de σ séries de quantités (a). On aura

$$\frac{d}{d\xi}\frac{dT}{d\omega_\sigma} - \frac{d}{d\omega_\sigma}\frac{dT}{d\xi} = T_\sigma T,$$

si T_σ est le degré *total* de T, par rapport aux séries de quantités du groupe σ.

2° Déduction de nouveaux semi-invariants d'un semi-invariant donné. En particulier, si S et S′ sont des semi-invariants de même degré total par rapport au groupe σ, les numérateurs des dérivées symboliques $\frac{d^p(S' : S)}{d\omega_\sigma^p}$ sont des semi-invariants.

3° Par la substitution binaire

$$x_1 = X_1 - X_2 \frac{\lambda}{S}, \qquad x_2 = X_2,$$

où S est un semi-invariant et où λ satisfait à la condition $\frac{d\lambda}{d\xi} = S$, tout covariant binaire se transforme de telle façon que ses nouveaux coefficients ont pour numérateurs de nouveaux invariants.

Catalan (*E.*). — Remarques sur une équation trinôme. (414-417).

Si $P_k = x^{2k} - x^k + 1$, on a

$$P_n + 2x^k = (x^2 + x + 1) P_1 P_2 P_3 \ldots P_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-x}{1-x^3} = P_1 P_2 P_3 \ldots P_n,$$

ce qui permet de trouver les produits $P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3$, ... indéfiniment.

Jamet (*V.*). — Théorème sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. (421-424).

Catalan (*E.*). — Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. (425-432).

Soient

Oz l'axe d'une surface de révolution;
xOy un plan perpendiculaire;
S une ligne géodésique;
Σ l'intersection avec une sphère de centre O et de rayon R du cône dont le sommet est O et dont les génératrices sont parallèles aux tangentes de S;
s et σ les projections sur xOy de S et Σ.

Si R est convenablement choisi, σ, par une rotation d'un quadrant autour de Oz, coïncide avec la polaire réciproque de σ, par rapport au cercle de rayon R. Réciproque. — M. Catalan établit l'une des formules de M. Jamet et cherche le rayon de courbure d'une ligne géodésique.

Mansion (*P.*). — Rapport sur le Mémoire intitulé : *Remarques sur certaines intégrales définies par M. E. Catalan.* (474-477).

Les intégrales dont s'occupe M. Catalan sont des intégrales de Frullani, c'est-à-dire où la fonction à intégrer est la différence de deux fonctions ayant les mêmes valeurs extrêmes, l'une d'elles se déduisant de l'autre par une substitution assez simple. M. Catalan trouve la valeur de ces sortes d'intégrales par dérivation sous le signe. Exemple :

$$\int_0^1 \left[\frac{x^\alpha}{1-x} - \beta\frac{x^{\alpha\beta+\beta-1}}{1-x^\beta}\right]dx = \log \text{nép}\,\beta.$$

Mansion (*P.*). — Rapport sur un Mémoire intitulé : *Sur un tableau numérique et sur son application à certaines transcendantes;* par E. Catalan. (477-481).

Si la série S est absolument convergente, on a

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots,$$

pourvu que

$$\begin{aligned}
S &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots,\\
S_1 &= u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + \ldots,\\
S_2 &= u_2 + u_6 + u_{10} + u_{14} + u_{18} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\Sigma_1 &= u_1 + u_2 + u_4 + u_8 + u_{16} + \ldots.\\
\Sigma_2 &= u_3 + u_6 + u_{12} + u_{24} + u_{48} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On a aussi

$$P = P_1 P_2 P_3 \ldots = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \ldots,$$

si l'on pose $u_n = \log v_n$, $S = \log P$, $S_n = \log P_n$, $\Sigma_n = \log \Pi_n$. L'auteur donne de nombreuses applications de ces formules. Exemple : si $u_n = q^n$, il vient

$$\frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^4}{1-q^8} + \ldots = F(q) + F(q^3) + F(q^5) + \ldots,$$

$$F(q) = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots.$$

Le Paige (*C.*). — Recherches sur le pentaèdre. (488-497).

Contribution à la théorie du pentaèdre des surfaces du troisième ordre.

Tome XIV.

De Heen (*P.*). — Détermination de la loi théorique qui régit la compressibilité des gaz. (46-53).

Essai de détermination de la pression interne Π, du volume moléculaire v, d'un gaz de volume V, soumis à la pression extérieure P, d'après des expériences de Natterer, Amagat, Cailletet, en supposant que la loi de Mariotte a pour expression $(P + \Pi)(V - v) = 1$.

Deruyts (*J.*). — Développements sur la théorie des formes binaires. (53-79).

Le Paige. — Rapport sur ce Mémoire. (4-5).

Si une fonction k entière, homogène et isobarique de x_1, x_2 et des coefficients de formes binaires, est égale à sa transformée K, obtenue en faisant $x_1 = X_1 + \lambda X_2$, $x_2 = X_2$, l'auteur l'appelle un *semi-invariant*. Un semi-covariant k satisfait à l'une des équations aux dérivées partielles des covariants; le coefficient de la plus haute puissance de x_1 dans k est un semi-invariant. Tout semi-covariant est une somme de puissances de x_2 par des expressions de la forme

$$k_0 x_1^m + m k_1 x_1^{m-1} x_2 + \tfrac{1}{2} m(m-1) k_2 x_1^{m-2} x_2 + \ldots,$$

k_0 étant un semi-invariant, k_1, k_2, ... des expressions qui s'en déduisent.

L'auteur établit ensuite une liaison entre les semi-covariants et la théorie des fractions continues, et retrouve le canonisant de Sylvester par une méthode originale.

Le Paige (*C.*). — Sur les éléments neutres des involutions. (211-214).

Les géomètres se sont bornés jusqu'à présent à étudier dans les involutions I_k^n les éléments singuliers que l'on peut appeler *éléments neutres* de première espèce, c'est-à-dire tels qu'aux groupes de k points il en correspond une infinité simple de $(n - k)$ points. L'auteur étudie les groupes doublement, triplement, k fois neutres et montre comment leurs propriétés permettent d'étudier, dans un espace quelconque, les courbes rationnelles différentes de la courbe normale.

Ronkar (*E.*). — Note sur les oscillations d'un pendule produites par le déplacement de l'axe de suspension. (296-311).

Folie (*F.*). — Rapport. (195-196).

Le cas le plus remarquable est celui où le pendule et l'axe ont même durée d'oscillation; dans ce cas, le pendule en repos peut prendre et conserver un mouvement dont l'amplitude est proportionnelle au nombre d'impulsions reçues par l'axe.

Deruyts (*Fr.*). — Sur la représentation des involutions unicursales (322-345).

Le Paige. — Rapport. (199-202).

Soit une involution I_{n-1}^n

$$\sum_1^n \lambda_i f_i = 0, \qquad f_i = a_1^i x_1^n + a_2^i x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_{n+1}^i x_2^n.$$

Si l'on regarde x_1^n, $x_1^{n-1} x_2$, ..., x_2^n comme les coordonnées d'un point dans un espace à n dimensions, les n formes f_i égalées à zéro y détermineront un point qui sera le représentant de l'involution I_{n-1}^n. Pour que cette involution soit décomposable en un élément fixe et une involution I_{n-2}^{n-1}, l'auteur prouve que le point représentatif de I_{n-1}^n doit se trouver sur la courbe normale C_n de l'espace à n dimensions. Ce résultat s'étend à une involution I_k^n. M. Fr. Deruyts représente encore les involutions par des formes plurilinéaires, puis il applique les résultats obtenus à quelques questions intéressantes de la théorie des involutions et, en particulier, à la détermination des éléments neutres.

Deruyts (*Fr.*). — Sur la théorie de l'involution. (650-664).

Le Paige. — Rapport (543-544).

Suite du travail précédent. Le point représentatif d'une involution représente aussi la forme binaire ayant ses coordonnées pour coefficients. La courbe normale devient alors le lieu des points représentatifs de formes binaires, puissances exactes. Ce nouveau mode de représentation permet à l'auteur d'énoncer et de démontrer simplement des théorèmes de MM. Rosanes, Le Paige, de Paolis, sur les éléments neutres des involutions, leurs formes canoniques, etc.

De Tilly (*J.-M.*). — Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie en Mécanique. (975-1020).

Examen critique des idées de de Saint-Venant et de Tait sur les principes de la Mécanique et sur l'enseignement de ces principes : 1° L'exposé des principes de la Mécanique de *de Saint-Venant,* en en excluant la notion de force et gardant celle d'accélération, peut se faire d'une manière logique et rigoureuse. 2° On peut aller plus loin dans cette voie et regarder la Mécanique rationnelle comme l'exposé des lois de variation simultanées de groupes de quatre quantités (temps, coordonnées d'un point) liées à un coefficient constant (la masse). 3° Scientifiquement, cet exposé est utile, parce qu'il permet de mieux distinguer en Mécanique ce qui est d'origine expérimentale et ce qui est conséquence logique des axiomes ou postulats admis comme point de départ et tirés de l'expérience par idéalisation. 4° Dans l'enseignement, il vaut mieux, pour la majorité des élèves, ne pas remonter aussi haut, dans la recherche d'un nombre minimum de premiers principes de la Mécanique. Des vérités qui ont une origine

semi-expérimentale, semi-logique, d'une nature plus accessible à la plupart des esprits, doivent servir de point de départ, mais le manuel mis entre les mains des élèves doit contenir en Note ou en appendice l'exposé le plus scientifique de la Mécanique. Dans l'enseignement, il faut donc garder la notion de force, tout en laissant aux élèves le moyen de voir comment on peut réduire l'usage de cette notion au strict minimum. 5° La notion d'énergie que M. Tait veut introduire, en Mécanique rationnelle, à la place de celle de force, est beaucoup moins claire ; comment la définir dans le cas de pression non suivie d'effet visible; le principe de la conservation de l'énergie n'a d'ailleurs de sens que si l'on définit l'énergie virtuelle, laquelle n'a pas d'existence actuelle et est une entité mathématique, que l'on ne peut faire connaître sans recourir au moins à la notion d'accélération. 6° Duhamel a raison quand il dit que l'on ne peut définir un système sans translation; en translation tout est relatif : le mouvement et le repos absolus sont indéfinissables pour nous. 7° « En rotation, il n'en est pas de même; car, si tout y était relatif que signifieraient les expériences du corps tombant librement (mines de Freiberg), du pendule de Foucault et du gyroscope? La question de savoir si c'est la Terre, ou si c'est le système des étoiles fixes qui tourne, serait une question vide de sens, si l'on ne comprenait que des mouvements relatifs. On répondrait que chacun des deux tourne par rapport à l'autre, et c'est tout ce que l'on pourrait savoir. Évidemment, il n'en est pas ainsi ». 8° Le principe de l'inertie doit s'énoncer : Si aucune force n'agit sur un point matériel, il reste en repos ou se meut d'un mouvement uniforme sur une droite fixe et immobile. Il suppose donc la notion préalable de l'immobilité absolue; cette immobilité absolue, on peut l'attribuer au système des étoiles fixes; car ce n'est qu'en l'admettant que l'expérience du pendule de Foucault cesse d'être insignifiante. 9° La notion de force, ou celle de point libre, peut remplacer celle d'immobilité absolue, dans un exposé scientifique de la Mécanique rationnelle; mais il n'en est pas de même des notions d'accélération et d'énergie qui ne sont susceptibles de définition que dans la mécanique du mouvement relatif. 10° L'idée de force est d'ailleurs indispensable pour expliquer l'action des volontés libres sur le monde matériel (tant qu'une théorie de leur intervention analogue à celle de M. Boussinesq n'est pas établie par l'expérience). En effet, l'état de l'Univers, à chaque instant ne résulte pas simplement de son état dans l'instant qui précède, comme l'a dit Laplace, mais aussi des modifications qui y ont été introduites par les lois naturelles qui ont exercé leur action dans l'intervalle des deux instants et par l'intervention incessante de volontés qui s'imposent à la matière et qui modifient ses lois ordinaires. Dans les Notes qui suivent ce remarquable Mémoire, M. de Tilly donne, outre diverses indications bibliographiques, un aperçu de la manière dont il réduit les principes de la Mécanique rationnelle au principe de l'*immobilité en rotation;* il montre aussi comment les principes du mouvement du centre de gravité, des aires, des forces vives, dans l'univers entier peuvent rester vrais, malgré l'action des volontés libres; il suffit de supposer que celles-ci agissent comme des forces sur *plusieurs* points. Il fait aussi remarquer que la connaissance des distances mutuelles de cinq points suffit, si l'approximation des mesures est d'une exactitude suffisante, pour décider si la géométrie physique coïncide avec la géométrie euclidienne, ou avec une géométrie non euclidienne; dans ce dernier cas, les dix distances détermineraient aussi le paramètre caractéristique de cette géométrie.

MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par *P. Mansion*, professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg*, professeur à l'Université de Liège. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars [1].

Tome VII; 1887.

Mister (*J.*). — Propriétés de la courbe d'Agnesi. (5-6).

Vigarié (*Em.*). — Sur les points complémentaires. (6-12, 57-62, 84-89, 105-110).

I. *Préliminaires.* — Si un point M a pour coordonnées trilinéaires (α, β, γ), le point M_1, ayant pour coordonnées $(\beta+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta)$, est son complémentaire, et M est l'anticomplémentaire de M. Le point $L(\alpha=\beta=\gamma)$ est son propre complémentaire, ainsi que tout point de la droite $l(\alpha+\beta+\gamma=0)$. Les points M, M_1, L sont sur une même droite coupant l en un point m, tel que le rapport anharmonique $(MM_1Ll) = -2$. Si l'on cherche la suite indéfinie des points M, M_1, M_2, ..., M_n, dont chacun est le complémentaire du précédent, on trouve que M_∞ coïncide avec L. Si les coordonnées trilinéaires considérées sont barycentriques, L est le centre de gravité du triangle de référence, et l'on a

$$2\,MG = GM_1,$$

de sorte que la figure complémentaire d'une figure donnée en est une figure homothétique, le rapport d'homothétie étant (-2).

II. *Point de Nagel.* — Le point de Gergonne est le point où concourent les droites joignant les sommets du triangle de référence aux points de contact du cercle inscrit avec les côtés; il a pour coordonnées

$$[1 : (-a+b+c)], \quad [1 : (a-b+c)], \quad [1 : (a+b-c)].$$

Le point dont les coordonnées sont les inverses de celles-ci est le point de Nagel; il a pour complémentaire le centre du cercle inscrit. Les points de Gergonne et de Nagel et les points analogues relatifs aux cercles exinscrits jouissent de nombreuses propriétés.

III. *Anticomplémentaire du point de Lemoine.* — Le point de Lemoine (a^2, b^2, c^2) a pour anticomplémentaire $(-a^2+b^2+c^2, a^2-b^2+c^2, a^2+b^2-c^2)$. Les parallèles aux côtés du triangle menées par ce point sont proportionnelles aux cubes des côtés.

IV. *Cercle anticomplémentaire du cercle conjugué.* — Des sommets du triangle de référence comme centres, avec le côté opposé pour rayon, décri-

---

[1] Voir *Bulletin*, XIII_2, p. 30-35. Ce recueil paraît en livraisons mensuelles de 24 pages, parfois avec suppléments. Prix $7^{fr},50$ pour la Belgique; 9^{fr} pour l'Union postale.

vons trois cercles; le cercle qui les coupe orthogonalement est anticomplémentaire du cercle autopolaire de ABC.

Tucker. — Sur le cercle triplicateur. (12-14).

Casey (*J.*). — Propriétés de trois figures semblables. (14-15).

Thiry (*Cl.*). — Sur les médianes, les bissectrices et les symédianes d'un triangle. (116-117).

Neuberg (*J.*). — Centre isologique du triangle. (117).

Van Dorsten. — Applications des propriétés de trois figures semblables. (161-162).

Neuberg (*J.*). — Transmutations d'un triangle. (180-181).

Emmerich (*A.*). — Problèmes de construction se rapportant à la géométrie du cercle de Brocard. (246-248).

Contributions à la Géométrie récente du triangle, qui ne sont pas susceptibles d'une analyse détaillée.

Cesaro (*E.*). — Remarques de Géométrie infinitésimale. (25-38).

Questions diverses de Géométrie infinitésimale, traitées au moyen des coordonnées naturelles de la courbe, l'arc, le rayon de courbure, etc.

Exemples : 1° L'enveloppe des circonférences qui ont pour diamètres les rayons de courbure d'une épicycloïde est une courbe inverse de cette épicycloïde. 2° Les seules hélicoïdes développables sur lesquels il est possible qu'un point se meuve librement, de manière que l'axe se déplace sur une surface développable, sont ceux dont l'arête de rebroussement admet pour transformée plane une tractrice.

Schoute (*P.-H.*). — Sur les normales d'angle α. (38-41).

Les normales d'angle α sont les droites qui coupent une ellipse donnée dans un sens déterminé, sous cet angle α. Démonstration géométrique de leurs propriétés, en particulier de celles-ci : Par un point quelconque du plan passent quatre de ces normales; les pieds de trois de ces normales et le point diamétralement opposé au pied de la quatrième sont situés sur une même circonférence, et réciproquement (généralisation du théorème de Joachimsthal).

Lucas (*E.*). — Sur le neuvième nombre parfait. (45-46).

M. Hudelot a vérifié, par une méthode de M. Lucas, que $2^{61}-1$ est premier et, par suite, que $2^{60}(2^{61}-1)$ est vraiment un nombre parfait, comme l'a trouvé M. Seelhoff.

Mansion (*P.*). — Sur le calcul approché des aires planes. (77-84).

Conséquences diverses des formules fondamentales suivantes :

$$h\left(\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}y_1\right)<\text{aire }(y_0, y_1)<h\left(\frac{3}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2\right),$$

$$h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+\frac{1}{2}y_2\right)<\text{aire }(y_0, y_2)<2hy_1,$$

$$h\left(\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}y_1\right)<\text{aire }(y_0, y_1)<h\left(\frac{1}{2}y_0+\frac{1}{2}Y_1\right),$$

où y_0, y_1, y_2 sont trois ordonnées d'une courbe concave vers l'axe des x, correspondant aux abscisses x_0, x_0+h, x_0+2h; Y_1 l'ordonnée du point où la tangente à l'extrémité de y_0 rencontre le prolongement de y_1; aire (y_0, y_1) et aire (y_0, y_2) les portions de l'aire de la courbure comprises entre les ordonnées y_0 et y_1, ou y_0 et y_2.

Servais (*Cl.*). — Sur la réversibilité de la transformation linéaire. (90-91).

Dans une transformation linéaire réversible, les droites passant par un même point rencontrent leurs correspondantes en des points situés sur une même ligne droite. Par suite, la seule transformation linéaire est la transformation homologique harmonique.

Servais (*Cl.*). — Sur les transformations birationnelles quadratiques. (110-114; 129-134; 187-198).

Toutes les transformations birationnelles quadratiques peuvent se classer en trois catégories, définies par les relations suivantes :

$$xx'=yy'=zz' \qquad \text{(Inversion trilinéaire)},$$
$$xx'=zz', \quad y':y=z':z, \qquad \text{(Semi-inversion trilinéaire)},$$
$$xy'+x'y=mzz', \quad x:x'=z':z, \qquad \text{(Quasi-inversion linéaire)}.$$

On peut les interpréter géométriquement comme il suit : étant donnés un point fixe P et une conique S, le correspondant d'un point M est le conjugué harmonique de ce point par rapport aux points d'intersection de la droite PM et de la conique S (transformation de Hirst). Si la conique se décompose en deux droites réelles ou imaginaires conjuguées, on a la transformation de deuxième espèce. Si le point P est sur la conique, on a la transformation de troisième espèce.

Chrétien Henri Nagel. (114-115).

Esquisse biographique d'après O. Krimmel. Nagel est né en 1803, mort en 1882.

De Longchamps (*G.*). — Sur la rectification de quelques courbes remarquables. (127-128; 170-175).

Toute cubique circulaire unicursale, étant l'inverse d'une conique, est rectifiable par des arcs de conique; l'arc de cissoïde s'exprime par les fonctions élémentaires; celui de la courbe $\rho^2 = a^2(\text{séc}^2\omega + \text{coséc}^2\omega)$, par les intégrales elliptiques. En général, les courbes $\rho = f(\omega)$ et $R = f(k\omega)$ ont leurs arcs exprimés par des intégrales de formes à peu près semblables, un peu plus compliquées pour la seconde. Ainsi, quand la courbe ρ a un arc exprimé par une intégrale élémentaire (droite, circonférence), la courbe R peut être rectifiée par les fonctions elliptiques.

C. Bergmans. — Théorèmes sur la parabole. (136-138).

D'Ocagne (M.). — Les coordonnées cycliques. (148-154).

On appelle *coordonnées cycliques* d'un point M les distances à l'origine sur un axe unique des points d'intersection des cycles de même rayon, ayant ce point pour centre; un cycle est un cercle décrit dans un sens déterminé et à partir d'un point situé du même côté de l'axe que M. La normale à une courbe $\varphi(\xi, \eta) = 0$, en coordonnées cycliques, a pour équation $n_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = n_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$, n_1 et n_2 étant les distances du point où la normale rencontre l'axe aux points où le cycle du point considéré sur la courbe rencontre le même axe. Applications des coordonnées cycliques aux coniques. Dualité cyclique; à tout théorème en coordonnées cartésiennes en correspond un en coordonnées cycliques; exemples.

Gilbert (Ph.). — Bibliographie. (156-160).

Analyse des *Notes* ajoutées par M. *Darboux* à la *Mécanique* de *Despeyrous*.

M'Cay. — Sur l'hyperbole de Kiepert. (208-220).

Sur les trois côtés d'un triangle ABC comme bases, on construit trois triangles isoscèles semblables $BC\alpha$, $CA\beta$, $AB\gamma$. Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se coupent en un point P, variable avec l'angle $\theta = \alpha BC$; le lieu des points est l'*hyperbole de Kiepert,* inverse trilinéaire de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine. Cette hyperbole jouit d'un grand nombre de propriétés déduites pour la plupart de la suivante qui est fondamentale : Une droite quelconque rencontre l'hyperbole de Kiepert et la droite inverse trilinéaire dont il vient d'être question en trois points, tels que les angles θ correspondants ont une somme multiple de π.

Servais (Cl.). — Sur les nombres parfaits. (228-230).

Deruyts (Fr.). — Génération linéaire de quelques courbes à éléments multiples (241-244).

Construction de quelques courbes unicursales au moyen de la transformation suivante : Soient deux points fixes A, B, deux droites d, g. Si AM coupe d en M_1 et BM, g en M_2, la droite M_1M_2 correspond à M.

Cesaro (E.). — Sur les nombres parfaits impairs. (245-246).

Schœntjes. — Sur un mode de génération de la spirale hyperbolique. (248-249).

D'Ocagne (*M.*). — Quelques propriétés du triangle. (265-271).

Propriétés diverses de la figure obtenue en prolongeant d'une même longueur variable, dans un sens déterminé, les côtés d'un triangle.

Notes mathématiques, extraits analytiques, bibliographie, questions proposées, questions d'examen, questions résolues. (*Passim.*)

Suppléments.

Mansion (*P.*). — Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss. (16 pages).

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XI, p. 293-307 (avril 1886).

De Tilly (*J.-M.*). — Recherches sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. (96 pages).

Extrait des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique (octobre 1887), t. XL.

Brocard (*H.*). — Propriétés d'un groupe de trois paraboles. (8 pages et 1 pl.).

Extrait des *Mémoires de l'Académie de Montpellier*, section des Sciences, 1886. Le plan d'un triangle renferme déjà deux groupes de trois paraboles qui présentent de curieuses propriétés : 1° Le premier groupe est formé de paraboles tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième. 2° Le second groupe est formé de paraboles tangentes aux deux bissectrices de chaque angle et aux perpendiculaires aux milieux des côtés qui comprennent cet angle. M. Brocard étudie les propriétés d'un troisième groupe analogue au précédent : il est formé par les paraboles tangentes aux bissectrices de chaque angle et aux hauteurs correspondant aux côtés de cet angle.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Onzième année, 1886-1887, Bruxelles, Hayez; 1887 (A, première Partie; B, seconde Partie) [1].

De Salvert. — Mémoire sur l'emploi des coordonnées curvilignes dans les problèmes de Mécanique et les lignes géodésiques des surfaces isothermes. (B, 1-138).

Mansion (*P.*). — Rapport. (A, 46-62).

La première et la seconde Partie de ce Mémoire ont paru dans le Volume précédent du même Recueil, pages 293-408. Voici une analyse sommaire de l'ensemble.

I. Soient $\varphi(x, y, z) = \varphi$, $\psi(x, y, z) = \psi$, les équations de deux systèmes de surfaces coupant une troisième surface $F(x, y, z) = 0$ suivant des courbes trajectoires orthogonales l'une de l'autre. Ces trois surfaces déterminent la position d'un point mobile, qui a, suivant les normales aux trois surfaces des accélérations U, V, W, des vitesses u, v, w. Posons

$$H\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]=1,\qquad K\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]=1,$$

$$P=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial\psi} & \frac{\partial y}{\partial\psi} & \frac{\partial z}{\partial\psi}\end{vmatrix},\qquad S=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\,\partial\psi} & \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\,\partial\psi} & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\,\partial\psi}\\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial\psi} & \frac{\partial y}{\partial\psi} & \frac{\partial z}{\partial\psi}\end{vmatrix}$$

et désignons par Q une expression en ψ, analogue à l'expression P en φ. On aura

$$U\sqrt{H}=H\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{\partial H}{\partial\psi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial\varphi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

$$W\sqrt{HK}=P\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+Q\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+2S\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}.$$

De la dernière formule, on déduit aisément les rayons de courbure principaux de la surface.

II. Soit $\mathcal{F}(\varphi, \psi)$ la fonction de force, supposée existante, $H_1 = H(\mathcal{F} + C)$, $K_1 = K(\mathcal{F} + C)$, on aura

$$u^2 d(v^2) - v^2 d(u^2) = (u^2 + v^2)\left(u^2\frac{\partial \log H_1}{\partial\psi}d\psi - v^2\frac{\partial \log K_1}{\partial\varphi}d\varphi\right).$$

Chaque fois que l'on parviendra à intégrer cette équation, c'est-à-dire à

[1] Voir *Bulletin*, XIII, 18-24.

trouver une relation entre φ et ψ, l'équation des forces vives pourra ensuite servir à déterminer les coordonnées curvilignes en fonction de t. L'auteur fait connaître divers cas où les intégrations peuvent se ramener aux quadratures; puis, il fait quatre applications : 1° Mouvement d'un point assujetti à se trouver sur un ellipsoïde, quand il est soumis à une force d'attraction émanant du centre et proportionnel à la distance. 2° Problème analogue pour un cône, si le point est soumis à deux forces, l'une émanant du sommet et variant en raison inverse du carré de la distance, l'autre de l'axe du cône et variant en raison inverse du cube de la distance à cet axe. 3° Problème de Neumann (*Journal de Crelle,* t. 56). 4° Mouvement d'un point matériel pesant, sur un paraboloïde à axe vertical.

III. Recherche des lignes géodésiques. L'auteur trouve leur équation différentielle en supposant $\mathcal{F}(\varphi, \psi)$ constant et traite les cas particuliers suivants : 1° Plan. 2° Cylindre de révolution. 3° Cylindre. 4° Cônes de révolution. 5° Surfaces de révolution. 6° Cônes. 7° Quadriques. 8° Surfaces composant un système orthogonal triplement isotherme.

Trois Notes complètent le Mémoire : 1° L'auteur indique comment il a trouvé les cas où le problème de la seconde Partie se ramène aux quadratures. 2° Points de contact de sa solution du mouvement sur l'ellipsoïde avec celles de Jacobi et de Schellbach. 3° Détermination du rayon de courbure d'un point mobile assujetti à rester sur une surface.

De Sparre. — Cours sur les fonctions elliptiques. Seconde Partie. (200-292).

Cette seconde Partie comprend le développement des fonctions thêta en produit, obtenu en prenant pour point de départ la décomposition de ces fonctions en facteurs primaires. L'auteur démontre, d'après M. Hermite, les théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler. Les développements en produit des fonctions thêta sont obtenus sous une forme qui permet d'en déduire immédiatement les formules relatives à la transformation du premier degré dans ces fonctions. Dans la théorie de la multiplication, M. de Sparre indique comment on peut y employer la fonction pu de Weierstrass. Il termine en établissant l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction σu. Voici l'ordre des matières : I. Nature des points d'une fonction. II. Décomposition des fonctions holomorphes en facteurs primaires. III. Détermination du genre d'une fonction holomorphe d'après la répartition de ses zéros. IV. Décomposition de $\sin \pi x$ en facteurs primaires. V. Définition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. VI. Décomposition de σu en facteurs primaires. VII. Théorème de Mittag-Leffler. VIII. Expression des fonctions doublement périodiques de première espèce qui ont des points singuliers essentiels. IX. Développement des fonctions Θ en produit. X. Transformation du premier degré des fonctions θ. XI. Multiplication de l'argument dans les fonctions pu. XII. Équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction σu.

D'Ocagne (*M.*). — Sur les péninvariants des formes binaires. (314-319).

Nouveau système de péninvariants principaux.

Guyétand (*A.*). — Note sur les propriétés du point central dans les actions mutuelles de trois corps. (320-336).

Quand trois corps s'attirent ou se repoussent de façon que leurs actions mutuelles soient égales deux à deux et de sens contraire, les résultantes des actions de deux quelconques des trois points sur le troisième passent par un même point. L'auteur l'appelle *point central;* il en cherche la position et détermine la résultante des actions des deux premiers points sur le troisième. Applications et propriétés.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

3e série, t. VI, 1889 (1).

Goursat. — Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. (9-102).

M. Goursat étudie les modes de division de l'espace en un nombre fini de régions telles que l'une quelconque se déduise de la première par une suite d'inversions. On sait que M. Poincaré, dans son *Mémoire sur les groupes kleinéens*, avait été conduit à diviser l'espace en une infinité de régions se déduisant les unes des autres par une transformation isogonale. Mais le mode de transformation adopté par M. Poincaré conservait un plan fixe réel, tandis que celui de M. Goursat fait revenir sur elle-même une sphère imaginaire.

Le problème qui consiste à trouver toutes les transformations isogonales assujetties à cette dernière condition revient à la détermination des groupes d'ordre fini de substitutions linéaires orthogonales à quatre variables. On obtient de tels groupes en combinant les substitutions de deux groupes d'ordre fini de substitutions linéaires non homogènes à une seule variable. Ce résultat est connu, mais M. Goursat fait ressortir un point qui n'avait pas été remarqué jusqu'ici : c'est qu'il n'est pas nécessaire d'associer chaque substitution de l'un des groupes avec toutes les substitutions de l'autre groupe.

Dans la première Partie de son Mémoire, l'auteur établit un certain nombre de propositions générales sur les transformations qui conservent les angles et sur les substitutions orthogonales.

Dans la deuxième Partie, il indique le moyen de former tous les groupes d'ordre fini de substitutions orthogonales à quatre variables, et il énumère tous les groupes de substitutions à deux variables d'une certaine forme qui leur sont isomorphes.

Dans la troisième Partie, il fait une étude approfondie de la disposition des

(1) Voir *Bulletin*, XIV, p. 189

régions de l'espace qui se correspondent mutuellement à l'aide des transformations isogonales qui conservent une sphère imaginaire, lorsque ces régions sont des tétraèdres à faces sphériques.

Enfin, dans la quatrième Partie, M. Goursat établit des rapprochements entre certaines parties de ces recherches et la géométrie non euclidienne ou la théorie des polyèdres réguliers de l'espace à quatre dimensions.

Raffy. — Sur la rectification des cubiques planes unicursales. (103-144).

Étant donnée une courbe plane unicursale de degré m, l'arc de cette courbe s'exprime, en fonction du paramètre t qui correspond uniformément aux points de la courbe, par une intégrale hyperelliptique qui, en général, est du genre $2m - 3$. Ce genre, qu'on peut appeler *genre de l'arc*, est susceptible d'abaissement par l'effet de certaines singularités.

M. Raffy détermine toutes les cubiques unicursales dont l'arc est d'un genre inférieur à 3 et toutes celles qui sont rectifiables algébriquement ou en termes finis.

Son Mémoire est divisé en quatre Chapitres.

Dans le premier, il indique les singularités qui diminuent le genre de l'arc pour une courbe unicursale quelconque et, en particulier, pour les cubiques. Les résultats qu'il obtient sont compris dans les quatre énoncés que voici :

1° Si un point, situé à distance finie, est l'origine d'un cycle à tangente isotrope, d'ordre n et de classe ν, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $\frac{\nu}{2}$.

2° Si un point, situé à distance finie, est l'origine d'un cycle à tangente non isotrope, d'ordre n, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$.

3° Si une courbe admet une direction asymptotique non isotrope, et si, au point à l'infini dans cette direction correspondent n valeurs égales du paramètre t, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$.

4° Si l'un des points cycliques est l'origine d'un cycle de classe ν, et si à ce point correspondent n valeurs égales du paramètre t, le genre de l'arc est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $\frac{n+\nu}{2}$, si l'asymptote isotrope tangente au cycle est située à distance finie; il est diminué de $n - 1$ plus la partie entière de $\frac{n-\nu}{2}$ si cette asymptote est rejetée à l'infini.

Appliqués aux cubiques, ces quatre théorèmes fournissent les cinq singularités qui diminuent le genre de l'arc : 1° l'inflexion à tangente isotrope; 2° le rebroussement à distance finie; 3° le contact simple avec la droite de l'infini ou l'existence d'une asymptote double; 4° l'existence de branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini; 5° le passage par les points cycliques.

Dans le Chapitre II, l'auteur étudie en détail les cubiques dont l'arc est de genre 0, 1 ou 2. Les cubiques dont l'arc est de genre zéro appartiennent à quatre types : 1° les lignes de courbure de la surface d'Enneper (seules cubiques à courbure rationnelle); 2° les cubiques représentées en coordonnées

rectangulaires par les formules

$$x = \lambda \frac{t^3 - 3t}{t - c}, \qquad y = \lambda \frac{3t^2 - 1}{t - c};$$

3° les paraboles semi-cubiques; 4° les cissoïdes. Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre 1 sont celles qui présentent les singularités suivantes à l'exclusion des trois autres : 1° deux points d'inflexion à tangente isotrope situés à distance finie; 2° rebroussement à distance finie et contact simple avec la droite de l'infinie; 3° branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini; 4° passage par les points cycliques. Enfin, les seules cubiques unicursales dont l'arc soit de genre 2 sont : 1° celles qui présentent un rebroussement à distance finie; 2° celles qui ont un contact simple avec la droite de l'infini ou qui admettent une asymptote double.

Le Chapitre III traite des cubiques dont l'arc est une fonction algébrique du paramètre t. Les seules cubiques dont l'arc soit algébrique sont les courbes d'Enneper et les développées des paraboles du second degré.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude des cubiques dont l'arc peut s'exprimer en termes finis. En dehors des cubiques dont l'arc est de genre zéro, de telles cubiques, s'il en existe (ce qui paraît fort peu probable) ne doivent être cherchées que parmi celles dont l'arc est de genre 1 et qui présentent soit un rebroussement à distance finie et un contact simple avec la droite de l'infini, soit des branches paraboliques formant inflexion ou rebroussement à l'infini.

Pincherle. — Sur les fractions continues algébriques. (145-152).

L'auteur se propose de déterminer les propriétés d'une fonction définie par un développement en fraction continue.

Il considère une fraction continue dont les coefficients sont tous du premier degré

$$\cfrac{b_1}{a_1 x + a'_1 - \cfrac{b_2}{a_2 x + a'_2 - \cfrac{b_3}{a_3 x + a_3 \cdots}}}$$

les coefficients de ces quotients ayant une limite finie. Soit $N_n(x)$ le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite (c'est un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré), et soit P l'ensemble des racines des polynômes $N_n(x)$.

Cela posé, on peut énoncer les résultats suivants :

1° Le rapport $\frac{N_{n+1}}{N_n}$, que l'on suppose inférieur à une limite finie, tend vers une limite déterminée, et la fraction continue est convergente, sauf pour les points des ensembles P et P′ (dérivé de P) et pour ceux d'une coupure que, par un changement de variable, on peut toujours réduire au segment $-1, +1$. Si le rapport $\frac{N_{n+1}}{N_n}$ tend uniformément vers sa limite, la fraction continue est une expression analytique $F(x)$.

2° Si ni P ni P′ n'ont de points à l'infini, si de plus P est d'espèce finie, ou si, étant d'espèce infinie, P′ se compose d'un ensemble d'espèce finie et du segment $-1, +1$, l'expression $F(x)$ peut s'écrire sous les hypothèses précédentes

$$F(x) = U(x) + K(x).$$

où $U(x)$ est une fonction analytique uniforme et $K(x)$ une nouvelle expression qui représente, sauf pour les points de la coupure, une branche à une seule valeur de fonction analytique monogène.

3° Enfin, si sous les mêmes hypothèses la différence des valeurs de $F(x)$ de part et d'autre de la coupure a une limite $f(x)$ intégrable et continue de -1 à $+1$, on a

$$F(x) = U(x) + V(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1} \frac{f(y)\,dy}{x-y},$$

où $V(x)$, si elle n'est pas identiquement nulle, est une fonction uniforme qui admet le segment -1, $+1$ comme ligne singulière.

Sauvage. — Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles. (157-182).

On sait qu'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admet, dans le domaine de l'origine un système fondamental de solutions de la forme

$$y_i = x\,\varphi_i(x)$$

ou

$$y_i = x^r[\varphi_i^0 + \varphi_i^1 \log x + \ldots],$$

suivant que l'équation fondamentale relative au point $x = 0$ a toutes ses racines simples, ou admet des racines multiples.

M. Sauvage s'est proposé de montrer comment on peut, par identification, déterminer chacune des fonctions φ, lorsque le système a toutes ses solutions régulières.

Parmi les systèmes qui jouissent de cette propriété, il faut distinguer les systèmes *canoniques* déjà étudiés par l'auteur (*Annales de l'École Normale*, 1886)

$$x\frac{dy_i}{dx} = b_{i1}y_1 + \ldots + b_{in}y_n,$$

où les fonctions b sont holomorphes dans le voisinage de l'origine.

M. Sauvage fait voir que tout système d'équations différentielles linéaires et homogènes (à intégrales régulières) peut être ramené à la forme canonique par des substitutions successives de la forme xy à y, ou bien de la forme $\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$ à l'un des y, les λ étant des constantes convenablement choisies. (Cet énoncé doit être substitué à celui que l'auteur avait donné dans son deuxième Mémoire, *Annales de l'École Normale*, 1888.)

M. Sauvage fait diverses applications de ce théorème. Il termine en donnant des détails sur le calcul des fonctions φ, dans le cas d'un système canonique, auquel tous les autres peuvent être ramenés.

Sonin. — Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling. (257-262).

Il s'agit de l'évaluation du reste R_n dans la formule d'Euler

$$h \sum_{r=0}^{k=m-1} f(a+kh) = \int_a^b f(u)\,du - \frac{h}{2}[f(b)-f(a)]$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)] - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{2n-2} h^{2n-2}}{(2n-2)!}[f^{2n-3}(b)-f^{2n-3}(a)] + R_n.$$

Ce reste R_n est compris entre les deux limites suivantes

$$\frac{B_{2n-1} h^{2n+1}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{k=m-1} \varepsilon f^{2n}\left(a+\frac{h}{2}+kh\right)$$
$$< -\varepsilon(-1)^n R_n < \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{(2n)!}\varepsilon[f^{2n-1}(b)-f^{2n-1}(a)],$$

sous la condition très générale que la somme

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} [f^{2n}(a+kh+ht)+f^{2n}(a+kh+h-ht)]$$

conserve toujours le même signe (celui de $\varepsilon = \pm 1$) et décroisse lorsque t croît de o à $\frac{1}{2}$.

Si l'on suppose

$$\varepsilon f^{2n}\left(a+\frac{h}{2}+kh\right) > \int_0^1 \varepsilon f^{n}\left(a+\frac{h}{2}+kh+ht\right)dt,$$

comme cela a lieu, par exemple, lorsque $\varepsilon f^{2n}\left(a+\frac{h}{2}+z\right)$ est une fonction positive décroissante entre $z=0$ et $z=b-a$, on pourra écrire

$$R_n = (-1)^n \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{(2n)!}[f^{2n-1}(b+\theta h)-f^{2n-1}(a+\theta h)] \qquad \left(0<\theta<\frac{1}{2}\right).$$

Cette expression du reste remplacera avec avantage celle qu'a donnée Jacobi. Ainsi la formule de l'auteur donne

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{(x+\theta)^{-1}}{12}} \qquad \left(0<\theta<\frac{1}{2}\right),$$

et celle de Jacobi

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}} \qquad (0<\theta<1).$$

Sonin. — Extrait d'une Lettre à M. Hermite. (260-262).

Établissement direct de la formule

$$\log\Gamma(x) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1.2}x^{-1} - \frac{B_3}{3.4}x^{-3} + \ldots$$
$$+ (-1)^n\left[\frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2)}x^{-2n+3} - \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n}(x+\theta)^{-2n+1}\right]$$
$$\left(0 < \theta < \frac{1}{\pi\sqrt{2e}}\right).$$

Lerch. — Introduction à une théorie élémentaire des intégrales elliptiques. (263-296).

L'auteur développe une théorie des intégrales et des fonctions elliptiques où la notion d'intégrales curvilignes se trouve exclue et remplacée par celle de coupure, suivant la méthode générale indiquée par M. Hermite.

Il introduit, à cet effet, la fonction *uniforme*

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-t^2x^2)(1-k^2t^2x^2)}}$$

qui, lorsque x est fini, reste finie et déterminée pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et 1. Cette fonction est discontinue, elle admet quatre coupures (I), (II), (III), (IV), joignant respectivement les points $1, \frac{1}{k}, -1, -\frac{1}{k}$ au point ∞.

L'expression uniforme $\Phi(x)$ définit une fonction analytique multiforme u (intégrale elliptique) n'ayant que quatre points critiques $\pm 1, \pm\frac{1}{k}$. Lorsque la valeur de u, au voisinage d'une coupure — (I), (II), (III), (IV) est $\Phi(x)$ elle sera donnée, sur le bord opposé de la coupure, par l'expression $2c - \Phi(x)$, si l'on assujettit la fraction u à rester continue. Les valeurs de c correspondant aux coupures (I), (II), (III), (IV) sont respectivement

$$K, \quad K'', \quad -K, \quad -K'',$$

K'' étant égal à $\frac{1}{k}K\left(\frac{1}{k}\right)$.

Hürwitz. — Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique. (327-332).

M. Gomes Teixeira avait énoncé, dans les *Annales de l'École Normale* de 1887, le théorème suivant qui est une généralisation d'une proposition bien connue d'Eisenstein :

« La série

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots$ représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique à coefficients entiers en $x, y, y', \ldots, y^{(k)}$, si les dénominateurs de $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ contiennent indéfiniment des facteurs premiers supérieurs, respectivement à $n+1, n+2, \ldots$ »

Mais ce théorème, dit M. Hürwitz, n'est pas juste, et voici le théorème qu'il faut y substituer.

« Si la série à coefficients rationnels

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

satisfait à une équation différentielle algébrique, il existe une fonction entière à coefficients entiers

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots + \gamma_\nu z^\nu,$$

et un nombre entier n tels que les facteurs premiers contenus dans les dénominateurs des fractions réduites a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... divisent respectivement les nombres (tous différents de zéro),

$$\gamma(n), \quad \gamma(n)\gamma(n+1), \quad \gamma(n)\gamma(n+1)\gamma(n+2), \quad \ldots \text{ »}$$

Guichard. — Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables. (333-348).

M. Guichard définit une droite d'une congruence par les coordonnées de son point central et par ses cosinus directeurs.

En menant par le centre d'une sphère de rayon 1 un rayon parallèle à cette droite, il obtient sur la sphère un point qui est la représentation sphérique de la droite. Aux développables de la congruence correspondent des courbes tracées sur la sphère.

L'auteur est ainsi amené à étudier un système de coordonnées curvilignes quelconque tracé sur la sphère. Il montre ensuite comment ce système doit être particularisé pour qu'il soit la représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une surface.

Si l'on désigne par u, v les paramètres des lignes asymptotiques, par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale, par $d\sigma$ l'élément linéaire de la sphère

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

et si l'on pose

$$C = \frac{g\dfrac{\partial e}{\partial v} - f\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2(eg - f^2)}, \qquad D = \frac{f\dfrac{\partial e}{\partial v} - e\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2(ef - f^2)},$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de courbes tracées sur la sphère soit la représentation des lignes asymptotiques d'une surface, est que

$$\frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\partial D}{\partial v}.$$

Cette condition étant supposée remplie, on pourra déterminer une fonction λ de u et v, dont les dérivées partielles soient $-2D$ et $-2C$; et, en posant

$$h^2 = \frac{e^{\lambda}}{eg - f^2},$$

on déterminera les coordonnées x, y, z d'un point de la surface par les for-

mules

$$\frac{\partial x}{\partial u} = hf\frac{\partial \alpha}{\partial u} - he\frac{\partial \alpha}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -hg\frac{\partial \alpha}{\partial u} + hf\frac{\partial \alpha}{\partial v},$$

et les deux autres couples de formules analogues. Ainsi, lorsque la représentation sphérique des lignes asymptotiques est donnée, les surfaces correspondantes peuvent être obtenues par des quadratures.

Quant aux congruences, la représentation sphérique de leurs développables peut former un système de courbes quelconques. Si l'on suppose que les surfaces réglées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ soient les développables de la congruence, la distance ρ du point central à l'un des foyers devra satisfaire à une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{C}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \mathrm{D}\frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial v} + f\right) = 0.$$

On peut se donner arbitrairement la représentation sphérique d'une congruence. Pour déterminer la congruence correspondante, il faudra résoudre cette équation; le problème s'achèvera par une quadrature.

Si l'on veut que les développables de la congruence découpent sur la surface centrale un réseau conjugué, il faut et il suffit que la représentation sphérique des développables soit celle des lignes asymptotiques d'une surface. Ce théorème fournit une classe très étendue de surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques. Il suffit de prendre deux courbes quelconques. A chaque sécante commune aux deux courbes correspond un point de la surface; les lignes asymptotiques correspondent aux cônes qui ont pour sommet un point d'une courbe et pour base l'autre courbe.

Enfin, si la représentation sphérique des développables est celle des lignes asymptotiques d'une surface à courbure constante, les arêtes de rebroussement des développables sont des lignes de courbure des surfaces focales.

Cette proposition établit entre certaines surfaces une correspondance réelle de telle nature qu'aux lignes asymptotiques de l'une des surfaces correspondent les lignes de courbure sur l'autre.

Padé. — Sur les intégrales définies à limites indéfinies. (349-354).

Étant donnée une fonction $f(x)$ d'une variable réelle x, intégrable dans tout intervalle (a, l) dont la limite inférieure est fixe, peut-on décider si, lorsque l grandit indéfiniment, l'intégrale

$$\int_a^l f(x)\,dx$$

tend vers une limite?

On le peut immédiatement lorsque la fonction primitive de $f(x)$ est connue On le peut encore lorsque, pour toutes les valeurs de x supérieures à un nombre déterminé, la fonction $f(x)$ est positive ou nulle.

C'est à ce cas que M. Padé ramène des cas très étendus où $f(x)$ change constamment de signe.

Ainsi, lorsque $|f(x)|$ ne dépasse pas une quantité positive connue A inté-

grable elle aussi dans tous les intervalles (a, l) et telle que $\int_a^l A\,dx$ tende, pour l infini, vers une limite, l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ a un sens.

Quand il n'existe pas de quantité A satisfaisant aux conditions précédentes, on peut le plus souvent en pratique opérer un changement de variable qui ramène l'étude de $\int_a^l f(x)\,dx$ à celle d'une intégrale dont tous les éléments sont positifs. Comme application de cette dernière méthode, l'auteur transforme, par le changement de x^2 en t, l'intégrale de Fresnel $\int_0^\infty \sin x^2\,dt$ en celle-ci :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\sin^2 t\,dt}{t^{\frac{3}{2}}},$$

qui a visiblement un sens.

Méray et *Riquier*. — Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales. (355-378).

Darboux. — Sur la surface des ondes. (379-388).

Cet article est extrait des tomes XCII et XCVII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Nous rappellerons brièvement les résultats qui y sont énoncés.

M. Darboux y donne, de la surface des ondes, une définition nouvelle où ne se trouve employé aucun ellipsoïde. Cette surface peut être considérée comme un cas particulier de la surface suivante :

On considère dans l'espace un point O et trois cercles fixes, et l'on cherche le lieu des points M tels que les sphères passant par un quelconque de ces points M et par les trois cercles fixes vont se couper en un second point P de manière que l'angle MPO soit droit. Ce lieu est une surface du quatrième ordre dont les points peuvent être construits par la règle et le compas.

La surface des ondes est une variété de cette surface qui, en général, n'a aucun point singulier et contient seize coniques isolées.

Un choix particulier de variables conduit rapidement M. Darboux à l'équation des lignes asymptotiques de la surface des ondes. Si l'on désigne par β le carré de la distance du centre à un point quelconque M, par β' le carré de la distance du centre au plan tangent parallèle au plan tangent en M, cette équation pourra s'écrire

$$\frac{d\beta^2}{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)} = \frac{d\beta'^2}{(\beta'-a)(\beta'-b)(\beta'-c)},$$

et, par conséquent, les lignes asymptotiques sont définies par une relation algébrique entre β et β'.

Si l'on considère chacun des complexes de Chasles qui sont formés des droites coupant les trois plans principaux et le plan de l'infini en quatre points de rapport anharmonique constant, le lieu des points de la surface où le cône du complexe est tangent à cette surface est une ligne asymptotique.

L'équation des lignes de courbure peut, comme l'a montré M. Combescure, s'écrire

$$f(\alpha)\,d\beta^2 + f(\beta)\,d\alpha^2 - d\alpha\,d\beta\left\{2f(\alpha) + (\beta-\alpha)\left[f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right]\right\} = 0,$$

où l'on a posé

$$f(\alpha) = (\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c).$$

Lorsque $f(\alpha)$ se réduit à un polynôme du deuxième degré, M. Darboux a montré que l'équation précédente pouvait être intégrée sous la forme

$$\int \frac{dp}{p^{\frac{2}{3}}(1+p)^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{dy}{[yf(y)]^{\frac{1}{3}}},$$

où l'on a

$$p = \frac{d\alpha}{dw}, \qquad y = \alpha - w\frac{d\alpha}{dw}, \qquad w = \frac{f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Ce cas se présente en Physique, où la surface des ondes est peu différente d'une sphère.

Dans le cas général, on n'a pas encore obtenu l'expression des lignes de courbure; mais M. Darboux a fait voir que ces lignes étaient algébriques dans le voisinage de chaque ombilic.

Supplément.

Vogt. — Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre. (1-71).

L'étude des équations différentielles linéaires est intimement liée à celle des groupes de substitutions que subissent leurs intégrales lorsque la variable décrit un contour autour des points singuliers. On peut chercher, comme l'ont fait MM. Fuchs et Hamburger, à calculer numériquement les coefficients de ces substitutions au moyen des paramètres de l'équation différentielle. On peut se placer à un autre point de vue, celui de la théorie des fonctions. C'est ce qu'a fait M. Poincaré dans un Mémoire sur les équations linéaires (*Acta mathematica,* t. IV), où il a montré que les groupes de substitutions dépendent de certaines fonctions des paramètres qu'il a appelés *invariants fondamentaux.*

C'est l'étude de ces invariants et de leurs propriétés qui fait l'objet du travail de M. Vogt, divisé en trois Parties.

Dans la première Partie, l'auteur cherche à exprimer les coefficients du groupe au moyen des invariants fondamentaux supposés connus et à en déduire les invariants de toutes les substitutions; il met en évidence les relations qui existent entre les invariants et les polygones fuchsiens.

Dans la deuxième Partie, il étudie les invariants comme fonctions des paramètres de l'équation différentielle, ces fonctions dépendant de certaines autres analogues au logarithme et dont il fait connaître les propriétés.

Dans la troisième Partie, il étudie les paramètres de l'équation différentielle comme fonctions des invariants; il montre, en particulier, comment on peut d'une équation différentielle déduire toutes les autres équations qui ont mêmes points singuliers et mêmes invariants fondamentaux.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CVIII; 1889 (1).

Poincaré. — Sur les séries de M. Lindstedt. (21-24).

On rencontre fréquemment en Mécanique céleste l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2\rho}{dx^2} + n^2\rho = \mu\frac{\partial\psi(\rho, x)}{\partial\rho},$$

où n est un nombre incommensurable, μ un paramètre très petit, ψ une somme de termes de la forme suivante

$$\psi(\rho, x) = \sum A\frac{\rho^{m+1}}{m+1}\cos(\lambda x + \alpha).$$

M. Lindstedt a proposé, pour intégrer cette équation, des séries divergentes à la façon de celles de Stirling, très avantageuses au point de vue du calcul numérique.

M. Poincaré reprend le même problème en le rattachant aux principes des *Vorlesungen* de Jacobi.

Si l'on pose en effet

$$H = \frac{\sigma^2}{2} + n^2\frac{\rho^2}{2} - \mu\psi + p, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

l'équation (1) peut être remplacée par le système

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\rho}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

et, si l'on change de variables en posant

$$\rho = \sqrt{\frac{2q}{n}}\sin y, \qquad \sigma = \sqrt{2nq}\cos y,$$

d'où

$$H = p + n^2 q - \mu\psi(q, y, x),$$

par le système canonique

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}.$$

Il suffira donc de connaître l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$H = \frac{\partial z}{\partial x} + n^2\frac{\partial z}{\partial y} - \mu\psi\left(\frac{\partial z}{\partial y}, y, x\right) = C.$$

Or M. Poincaré montre par quel moyen on peut développer z sous forme

(1) Voir *Bulletin*, t. XIV, p. 240.

d'une somme de termes tels que $A\cos(my + nx + \alpha)$, dépendant de deux constantes arbitraires c et q_0. L'intégrale générale de l'équation (1) est alors

$$q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial q} = q'_0, \qquad \frac{\partial z}{\partial c} = x = t,$$

q'_0 étant une nouvelle constante arbitraire.

Il est aisé d'en déduire les séries mêmes de M. Lindstedt.

La méthode d'intégration indiquée par M. Poincaré s'étend à des cas beaucoup plus généraux, en particulier au problème des trois corps. Pour toute autre loi d'attraction que celle de Newton, l'application de cette méthode au problème en question ne présente aucune difficulté; mais, avec la loi de Newton, elle échouerait si l'on prenait pour point de départ l'orbite képlérienne; il faut adopter comme première approximation une des orbites intermédiaires de M. Gyldén.

Gilbert. — Sur les accélérations d'ordre quelconque des points d'un corps solide dont un point est fixe. (92-94).

L'auteur indique une formule symbolique simple qui fournit la construction géométrique de l'accélération d'ordre n d'un point quelconque du corps, quand on connaît celles des ordres inférieurs.

En appliquant cette formule au cas de $n = 2$, on parvient, pour la construction de la suraccélération, aux résultats suivants :

Dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, la suraccélération d'un point quelconque M_0 est la résultante de cinq autres : 1° une accélération M_0a ayant même valeur et même direction que la vitesse du point M_0 dans une rotation dont l'axe coïnciderait avec la suraccélération angulaire λ_2; 2° une accélération M_0b parallèle à l'accélération angulaire λ et égale à $\omega\lambda\rho\cos(\omega, \rho)$, ω étant la vitesse angulaire; 3° une accélération M_0c parallèle à l'axe instantané et égale à $2\omega\lambda\rho\cos(\lambda, \rho)$; 4° une accélération M_0d dirigée vers le point fixe et égale à $3\omega\lambda\rho\cos(\omega, \lambda)$; 5° une accélération M_0e directement opposée à la vitesse du point M et égale à $\omega^2 v$ ou $\omega^2\rho\sin(\omega, \rho)$.

Quant à la suraccélération angulaire λ_2, elle résulte : 1° d'une composante $\omega'' = \frac{d^2\omega}{dt^2}$ dont la direction est celle de l'axe instantané; 2° d'une composante $2\omega'\psi' + \omega\psi''$ normale à l'axe instantané dans le plan principal; 3° d'une composante $\frac{\omega\psi'^2}{\cos\theta}$ parallèle au rayon de courbure de la trajectoire orthogonale des génératrices du cône lieu de l'axe instantané dans l'espace, θ étant l'angle de ce rayon de courbure avec l'axe instantané.

Resal. — Sur un point de la question des plaques élastiques homogènes. (114-115).

Les géomètres qui se sont occupés de cette question ont admis, relativement aux dilatations tangentielles, une hypothèse qui semble se rapporter exclusivement au choix des axes coordonnés situés dans le plan du feuillet moyen à l'état naturel. Toutefois l'équation aux différences partielles du quatrième ordre à laquelle on parvient étant indépendante du choix des axes, M. Resal propose, pour arriver au même résultat, une hypothèse qui ne dépend pas de ce choix et qui comprend l'ancienne hypothèse comme cas particulier.

Picard. — Sur les intégrales multiples relatives à trois variables complexes. (132-133).

Le théorème de Cauchy relatif à une intégrale simple prise le long d'un contour fermé peut être étendu de deux manières au cas de trois variables complexes.

1° On peut considérer l'intégrale double

$$(1) \qquad \iint (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy)$$

(où A, B, C sont des fonctions analytiques de x, y, z) étendue à une certaine *surface* à deux dimensions. La condition pour que cette intégrale étendue à toute surface fermée, à l'intérieur de laquelle A, B, C sont continues, soit nulle, est

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Cette condition d'intégrabilité étant vérifiée, on est conduit, dans le cas où A, B, C sont des fonctions rationnelles, à chercher les résidus de cette intégrale double. Dans le cas simple où l'on a

$$A = \frac{P}{S}, \qquad B = \frac{Q}{S}, \qquad C = \frac{R}{S},$$

P, Q, R, S étant des polynômes (le dernier irréductible), l'équation d'intégrabilité conduit à cette conclusion que l'intégrale

$$(2) \qquad \int \frac{P\,dx - Q\,dy}{\frac{\partial S}{\partial z}},$$

est une intégrale de différentielle totale relative à la surface algébrique $S(x, y, z) = 0$; et les résidus de l'intégrale (1) sont les périodes de l'intégrale de différentielle totale (2).

2° On peut considérer l'intégrale triple

$$\iiint \frac{P}{Q}\,dx\,dy\,dz,$$

P et Q étant des polynômes en x, y, z. Ici il n'y a aucune condition d'intégrabilité. Si, Q étant supposé irréductible, on cherche les résidus de cette intégrale étendue à un *continuum* fermé à trois dimensions, on trouve que les résidus sont les périodes de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\,dx\,dy}{\frac{\partial Q}{\partial z}},$$

relative à la surface algébrique $Q(x, y, z) = 0$.

Klein. — Formes principales sur les surfaces de Riemann. (134-136).

M. Klein avait déjà montré que l'on peut construire sur les surfaces de Riemann hyperelliptiques des expressions $\Omega(x, y)$ qui ont l'importance de *formes principales* en ce sens qu'elles ont sur la surface la seule racine $x = y$, cette racine étant simple, et qu'elles ne deviennent jamais infinies. Il étend ce résultat à la surface de Riemann la plus générale.

Lerch. — Sur le développement en série de certaines fonctions arithmétiques. (171-174).

L'auteur indique une démonstration nouvelle de la formule de M. Hermite

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) = \mathrm{E}[nx],$$

généralisée par M. Stern sous la forme

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left[x + \frac{\alpha m}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1) + \frac{1}{2}(d-1) + d\mathrm{E}\left[\frac{nx}{d}\right],$$

où d représente le plus grand commun diviseur des nombres m et n.

Le mode de démonstration employé par M. Lerch lui fournit en outre un grand nombre de développements arithmétiques nouveaux, plus ou moins analogues à celui de M. Stern, et dont découlent les conséquences suivantes :

Si l'on désigne par $\mathrm{R}(x)$ le reste qu'on obtient en retranchant de x l'entier le plus approché, sauf quand $x = \frac{1}{2} +$ entier, auquel cas on doit prendre $\mathrm{R}(x) = 0$; par $\operatorname{sgn}\mathrm{R}(x)$ l'une des quantités $+1$, 0, ou -1, suivant que $\mathrm{R}(x)$ est positif, nul ou négatif; par α un des nombres $0, 1, 2, m, n-1$, les sommes

$$\sum\left(\frac{\alpha m}{n}\right)\operatorname{sgn}\mathrm{R}\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right), \qquad \sum\left(\frac{\alpha m}{n}\right)\mathrm{R}\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right),$$
$$\sum\left(\frac{\alpha m}{n}\right)\left|\mathrm{R}\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right)\right|$$

sont indépendantes de m, pourvu que m soit premier avec n qui est un entier positif, impair, n'admettant aucun diviseur carré; il en est de même de la somme

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha m}{n}\right)\mathrm{E}\left[x + \frac{\alpha m}{n}\right],$$

si $n \equiv 1 \pmod 4$, $\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière $\mathrm{E}[x]$ de x, si x est positif et fractionnaire, et $\mathrm{E}[x] = x - \frac{1}{2}$, si x est un entier quelconque.

Sauvage. — Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles linéaires. (174-176).

Pour qu'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes de la

forme

$$y'_i = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ait toutes ses solutions régulières dans le domaine de l'origine, il faut et il suffit que, par des substitutions successives de fonctions de la forme

$$z = \lambda_1 x^{\alpha_1} y_1 + \ldots + \lambda_n x^{\alpha_n} y_n,$$

à l'une des inconnues y, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant entiers et les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant des constantes, on puisse ramener ce système à la forme *canonique* où tous les produits $x\alpha_{ik}$ sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Kœnigs. — Extension du problème d'Euler sur l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2$ au cas d'une surface quelconque. (221-224).

Ce problème généralisé s'énonce ainsi :

Étant donnée une surface dont l'élément linéaire est exprimé par la formule

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

trouver pour u, v, s les fonctions les plus générales d'un paramètre qui vérifient l'équation (1).

M. Kœnigs montre que la solution de ce problème et la détermination des géodésiques sont deux questions identiques.

Si l'on connaît une solution complète $U(u, v, a)$ de l'équation différentielle des géodésiques, on posera, $f(a)$ étant une fonction arbitraire de a,

$$\frac{\partial U}{\partial a} + f'(a) = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + f''(a) = 0,$$
$$s = f(a) + U(u, v, a).$$

Des deux premières équations on tirera u, v en fonction de a, et, en portant ces valeurs dans la troisième, on aura s en fonction de a.

Appell. — De l'homographie en Mécanique. (224-226).

On suppose qu'on sache intégrer les équations du mouvement d'un point dans un plan sous l'action de forces ne dépendant que des coordonnées

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

On fait alors sur x et y la transformation homographique

$$x_1 = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \qquad y_1 = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''},$$

et sur t la transformation

$$k\,dt_1 = \frac{dt}{(a''x - b''y + c'')^2}.$$

2ud Part.

Un calcul facile donne alors

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1, \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1,$$

$$X_1 = k^2(a''x' + b''y + c'')^2[\quad C'(xY - yX) + B'X - A'Y],$$
$$Y_1 = k^2(a''x + b''y + c'')^2[-C'(xY - yX) - BX + AY],$$

A, B, C, A′, B′, C′, étant des constantes.

On conclut de là que, toutes les fois que l'on saura trouver le mouvement d'un point (x, y) sous l'action d'une force F dépendant seulement de la position du mobile, on en déduira le mouvement d'un point (x_1, y_1) sollicité par une force F_1, qui dépend seulement de la position du mobile, la trajectoire du second point étant la transformée homographique de la trajectoire du premier.

La transformation homographique est la seule qui jouisse de cette propriété de transformer la force F en une autre ne dépendant que des coordonnées.

Ces considérations s'étendent aux systèmes du plan ou de l'espace.

Andrade. — Sur une réduction du problème des n corps qui conserve $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ distances mutuelles. (226-228).

On sait, dans le problème des n corps, utiliser les intégrales relatives au mouvement du centre de gravité pour ramener le problème à un problème similaire ne portant que sur $n-1$ corps, tout en conservant les intégrales des aires et des forces vives et ne changeant que la fonction des forces. Cette réduction, telle que l'opère Jacobi, a de plus l'avantage de conserver la distance mutuelle de deux des corps du système primitif.

S'étant proposé de rechercher des transformations analogues qui conservent le plus de distances possible, savoir $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, M. Andrade est parvenu au résultat suivant :

Si l'on répartit le système des n corps ou une portion de ce système en couples distincts m_i, m_j, puis qu'on applique aux centres de gravité G_{ij} de ces couples et aux corps restants la transformation de Jacobi ou toute autre équivalente donnant le nouveau système S, qu'enfin par l'origine O du système de coordonnées ainsi obtenu on mène un rayon OP_i représentant en grandeur, direction et sens, la distance qui va de m_j à m_i et qu'on attribue au point P_i la masse $\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$, le système S complété par le corps P_i est un système de $n-1$ corps qui pourra remplacer le système donné; et, en laissant au plus un corps isolé, on conserve $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ distances mutuelles primitives.

Klein. — Des fonctions θ sur la surface générale de Riemann. (277-280).

Dans une Communication précédente, M. Klein a montré que la définition des fonctions principales $\Omega(x, y)$ relatives à la surface générale de Riemann conduit à une construction rationnelle des fonctions θ appartenant à cette surface. Actuellement il indique les formules les plus simples qui résultent de cette conception pour l'expression de ces fonctions θ.

Andrade. — Sur les réductions du problème des n corps qui conservent certaines distances mutuelles. (280-281).

Dans une Note antérieure, l'auteur a montré qu'on pouvait profiter des intégrales du centre de gravité pour réduire le problème des n corps à un problème similaire ne portant que sur $n-1$ corps, en s'imposant la condition de conserver $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ distances mutuelles au plus.

Dans la solution indiquée, jamais deux des distances mutuelles conservées n'aboutissent au même corps. Il y aurait intérêt à conserver les distances de plusieurs corps (planètes) à l'un d'eux (Soleil); mais M. Andrade montre que cette réduction est impossible. La solution qu'il a indiquée précédemment est donc la plus générale.

Jordan. — Rapport sur un Mémoire de M. E. Vicaire portant pour titre : *Sur les propriétés communes à toutes les courbes qui remplissent une certaine condition de minimum ou de maximum.* (330-331).

Ce Mémoire a pour objet l'étude des courbes qui annulent la variation de l'intégrale $\int f\,ds$, f désignant une fonction explicite des coordonnées x, y, z.

Ces courbes sont complètement caractérisées par les deux propriétés suivantes :

1° Leur plan osculateur est normal aux surfaces de niveau $f = \text{const.}$

2° La projection de leur rayon de courbure sur la normale à la surface du niveau est égale au quotient de la fonction f par son paramètre différentiel du second ordre. Cette projection conserve donc la même valeur pour toutes les courbes de l'espèce considérée passant par un même point de l'espace.

La comparaison des nombreux problèmes de Mécanique qui conduisent a annuler la variation d'une intégrale $\int f\,ds$ amène M. Vicaire à formuler le théorème suivant :

La courbe qui, parcourue par un mobile sous l'action d'une fonction des forces données, rend maximum l'intégrale $\int um\,ds$, a en chaque point son rayon de courbure dirigé suivant la même droite que le rayon ρ de la trajectoire que le mobile décrirait s'il devenait libre (à partir de ce point) et égal à $\frac{\rho}{m}$.

Liouville (*R.*). — Sur les représentations géodésiques des surfaces. (335-337).

M. Dini a montré que deux surfaces ne peuvent, sans être applicables, se correspondre de telle sorte que les géodésiques de l'une soient représentées par celles de l'autre à moins que leurs éléments linéaires ds, ds_1 ne soient de la forme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2), \tag{1}$$

$$ds_1^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right), \tag{2}$$

U étant une fonction de u et V une fonction de v.

Mais, comme l'observe M. R. Liouville, les surfaces (1) et (2) peuvent ne pas être distinctes; et ce fait se produit lorsque l'élément linéaire (1) a la forme

$$ds^2 = (p^4 - q^4)\left[\varphi\left(\frac{1}{p}\right)dp^2 + \varphi(q)\,dq^2\right].$$

Comme exemple, on peut citer l'élément linéaire

$$ds^2 = [(e^u + e^{-u}) - (e^v + e^{-v})](du^2 + dv^2),$$

pour lequel la réduction à la forme (1) peut avoir lieu d'une infinité de manières.

Romieux. — Sur la loi de déformation, par refroidissement, d'une masse fluide homogène en rotation. (337-340).

La forme d'équilibre d'une masse fluide homogène peu différente d'une sphère et animée d'un mouvement uniforme de rotation est, comme on sait, un ellipsoïde de révolution aplati. Quand la masse se refroidit, l'aplatissement augmente. M. Romieux montre :

1° Que deux formes successives sont sensiblement parallèles, et que leur défaut de parallélisme ne dépend que du carré de l'aplatissement;

2° Qu'un élément linéaire de longueur fixe, appartenant à un arc de méridien ou de parallèle, présente, par rapport à l'arc qui lui correspond orthogonalement sur la surface infiniment voisine, un excès de longueur variable, maximum à l'équateur, minimum au pôle.

Mayer. — Sur une question du Calcul des probabilités. (391-392).

Solution nouvelle et simple d'un problème déjà résolu par M. Rouché :

Pierre et Paul jouent à chances égales; l'enjeu est l'unité; ils ont une fortune n. Probabilité pour que Pierre ruine Paul à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Goursat. — Les transformations isogonales en Mécanique. (446-448).

Le mouvement d'un point dans un plan étant régi par une fonction des forces $V(x, y)$, la détermination des trajectoires qui correspondent à une même valeur h de la constante des forces vives se ramène, comme on sait, à la recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial\theta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\theta^2}{\partial y^2} = 2(V + h).$$

Si l'on opère sur les coordonnées la transformation isogonale définie par les formules

$$(1) \qquad x = \varphi(X, Y), \qquad y = \psi(X, Y),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X} = \frac{\partial\psi}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial Y} = -\frac{\partial\psi}{\partial X},$$

cette équation aux dérivées partielles devient

$$\frac{\partial\theta^2}{\partial X^2} + \frac{\partial\theta^2}{\partial Y^2} = 2(V + h)\left(\frac{\partial\varphi^2}{\partial X^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial Y^2}\right).$$

De là résulte que, si l'on considère toutes les trajectoires correspondant à la fonction des forces $V(x, y)$ et à la valeur h de la constante des forces vives, et si l'on soumet ces courbes à la transformation isogonale (1), les nouvelles courbes seront les trajectoires correspondant à une nouvelle fonction des forces

$$\{V[\varphi(X, Y), \psi(X, Y)] + h\}\left(\frac{\partial\varphi^2}{\partial X^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial Y^2}\right)$$

et à la valeur zéro de la constante des forces vives.

La fonction des forces U restant la même, ainsi que la transformation isogonale (1), si l'on fait varier la constante, les courbes transformées ne sont pas, en général, les trajectoires d'un mobile pour une même fonction des forces. Il y a cependant un cas assez étendu où il en est ainsi : c'est celui où U est de la forme

$$U = f(x + iy) f_0(x - iy).$$

Ainsi, un point matériel étant sollicité par une force centrale proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance, les deux systèmes de trajectoires correspondant aux deux valeurs μ, ν de n se déduisent l'un de l'autre par une transformation isogonale lorsque μ, ν vérifient la relation

$$\mu\nu + 3(\mu + \nu) + 5 = 0$$

(excepté $\mu = -1$, $\mu = -3$).

Ces considérations s'étendent à tous les problèmes de Dynamique du plan ou de l'espace pour lesquels il existe une fonction des forces et où les liaisons sont indépendantes du temps.

Darboux. — Remarque sur la Communication précédente. (449-450).

Un point matériel est assujetti à se mouvoir sur une surface dont l'élément linéaire est défini par la formule

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

sous l'action de forces admettant un potentiel

$$(2) \qquad V = F(u, v).$$

Si l'on sait résoudre le problème de Mécanique proposé avec la surface (1) et le potentiel (2), on saura le résoudre aussi avec la surface dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = U(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2),$$

le potentiel étant maintenant

$$U' = \frac{1}{U} = \frac{1}{F(u, v)}.$$

En supposant la surface primitive plane, et en imposant à la nouvelle surface d'être plane aussi, on retrouve le résultat dû à M. Goursat

$$U = \varphi(x+iy)\,\psi(x-iy).$$

M. Darboux rattache aux considérations qui précèdent la proposition suivante :

Toutes les fois que l'on aura sur une surface la solution complète d'un problème de Mécanique correspondant à une fonction des forces donnée, mais quelconque, on saura, par cela même, trouver les lignes géodésiques de cette surface.

Halphen. — Sur la résolvante de Galois dans la division des périodes par 7. (476-477).

D'après un théorème donné par Galois, il existe, pour la transformation des fonctions elliptiques, des résolvantes d'un degré égal à l'ordre de la transformation, quand cet ordre est 5, 7 ou 11. MM. Hermite, Brioschi et Klein ont calculé plusieurs de ces résolvantes.

M. Halphen en indique une nouvelle qui est du septième degré

$$x^3\left(x+\frac{3+\sqrt{-7}}{2}\right)^3(x-1)=\alpha.$$

C'est à cette équation qu'on peut ramener le problème de la transformation du septième ordre ou le problème équivalent de la division des périodes elliptiques par 7. La constante est liée à l'invariant absolu $J=\frac{g_2^3}{\Delta}$ par la relation

$$\alpha=-\frac{2^6\sqrt{-7}}{7^4}J.$$

M. Halphen fait connaître les racines de cette résolvante.

Lipschitz. — Sur un théorème d'Arithmétique. (489-492).

Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des résidus quadratiques (Gauss).

Raffy. — Sur un problème de la théorie des surfaces. (493-494).

Trouver tous les éléments linéaires qui correspondent à des surfaces applicables sur les surfaces de révolution et qui sont réductibles d'une infinité de manières à la forme de Liouville

$$[\varphi(x+y)-f(x-y)]\,dx\,dy.$$

Ce problème revient à trouver toutes les solutions de l'équation

$$2(X-Y)\frac{d^2\lambda}{dt^2}+3(X'-Y')\frac{d\lambda}{dt}+(X''-Y'')\lambda=0,$$

où X, X', X'' représentent une fonction de x et ses dérivées, Y, Y', Y'' une fonction de y et ses dérivées, λ une fonction de $t=x+y$.

La solution complète est donnée par les formules

$$\lambda = P(x+y) + Q,$$
$$\lambda = \frac{P}{(t-h)^2} + Q,$$
$$\lambda = P\left(\frac{1}{e^{ht} - e^{-ht}}\right)^2 + Q\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^{ht} - e^{-ht}}\right),$$
$$\lambda = Pe^{ht} + Qe^{2ht},$$

où P, Q, h désignent des constantes arbitraires.

Liouville (*R.*). — Sur le caractère auquel se reconnaît l'équation différentielle d'un système géodésique. (495-496).

Parmi les équations du second ordre appartenant au type

$$y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0,$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 sont des fonctions arbitraires de x, se trouvent celles des lignes géodésiques tracées sur une surface quelconque. Elles forment un groupe distinct, défini par cette condition que les quatre équations *linéaires* par rapport aux trois inconnues ψ_1, ψ_2, ψ_3,

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + 2(a_3\psi_1 - a_4\psi_2) = 0,$$
$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + 2\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + 2(a_3\psi_2 - 2a_2\psi_1 + a_4\psi_3) = 0,$$
$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + 2\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + 2(a_2\psi_2 - 2a_3\psi_3 + a_4\psi_1) = 0,$$
$$\frac{\partial\psi_3}{\partial y} + 2(a_1\psi_2 - a_2\psi_3) = 0,$$

admettent une solution.

Alors l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{C}{\psi_1\psi_3 - \psi_2^2}(\psi_1\,dx^2 + 2\psi_2\,dx\,dy + \psi_3\,dy^2),$$

où C est une constante arbitraire.

Quand le système des quatre équations linéaires admet *deux* solutions, l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville ou à celle de Lie. Soient, dans ce cas, (ψ_1, ψ_2, ψ_3) et (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) ces deux solutions; le rapport

$$\frac{\psi_1\,dx^2 + 2\psi_2\,dx\,dy + \psi_3\,dy^2}{\Psi_1\,dx^2 + 2\Psi_2\,dx\,dy + \Psi_3\,dy^2}$$

égalé à une constante est une intégrale de l'équation aux géodésiques, et l'intégration complète se trouve ainsi terminée, sans qu'il ait été nécessaire de fixer le choix des variables x, y.

Blutel. — Recherches sur les surfaces qui sont en même temps

lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. (496-498).

Un cône du second degré dépendant d'un paramètre variable est coupé par un cône infiniment voisin suivant une courbe du quatrième ordre présentant un point double au sommet; il touchera son enveloppe le long de cette courbe. Mais si le cône roule en même temps sur deux développables, il touchera son enveloppe véritable suivant une conique.

Réciproquement, si une conique se déforme en restant tangente à deux courbes, les plans tangents à la surface engendrée, le long de chaque conique génératrice, enveloppent un cône du second degré.

Ces deux catégories de surfaces sont d'ailleurs les mêmes.

En cherchant les lignes conjuguées des coniques de la surface, ou les enveloppes des génératrices des cônes circonscrits, on trouve que la détermination de ces conjuguées dépend d'une équation de Riccati. De là résulte la possibilité de donner aux équations de la surface la forme

$$x_i = \frac{P_i(\lambda)\mu^2 + 2Q_i(\lambda)\mu + R_i(\lambda)}{P(\lambda)\mu^2 + 2Q(\lambda)\mu + R(\lambda)} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les courbes $\mu = \text{const.}$ étant les conjuguées des coniques.

Les lignes asymptotiques de la surface sont fournies par une équation telle que

$$(A\mu^4 + B\mu^3 + C\mu^2 + D\mu + E)\,d\lambda^2 + F\,d\mu^2 = 0,$$

A, B, C, D, E, F étant des fonctions de λ, et qui se réduit à une équation de Riccati : 1° lorsque les deux développables sur lesquelles roule le cône sont circonscrites aux deux courbes enveloppes des coniques; 2° lorsque les coniques roulent sur une seule courbe à laquelle elles sont osculatrices dans son plan osculateur, les cônes roulant sur une seule développable qui admet pour arête de rebroussement la trajectoire du sommet.

D'Ocagne. — Calcul direct des termes d'une réduite de rang quelconque d'une fonction continue périodique. (499-501).

On suppose qu'on ait calculé directement les $2k$ premières réduites de la fraction continue périodique simple

$$z = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}$$

Posant $\alpha_k = p_k + q_{k-1}$, on aura les numérateurs des réduites suivantes par les relations récurrentes

$$p_{nk} = \alpha_k p_{(n-1)k} + (-1)^{k-1} p_{(n-2)k},$$
$$p_{nk+i} = p_{k+i} u_n + (-1)^{k-1} p_i u_{n-1},$$

où

$$r = E\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

$$u_n = \sum_{r=0} (-1)^{r(k-1)} \frac{(n-1-r)(n-2-r)\ldots(n-2r)}{1.2\ldots r} \alpha_k^{n-1-2r}.$$

Pour les dénominateurs, le calcul est le même, avec le seul changement de p en q.

Beltrami. — Sur la théorie de la déformation infiniment petite d'un milieu. (502-505).

On sait que les six composantes de la déformation d'un milieu élastique satisfont à six équations aux dérivées partielles. M. Beltrami montre que ces six équations peuvent être déduites de la variation, égalée à zéro, de l'intégrale triple

$$\iiint \left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial r}\right) dp\, dq\, dr,$$

où x, y, z désignent les coordonnées d'un point et p, q, r les trois composantes de la rotation en ce point.

Poincaré. — Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique. (550-553).

M. Poincaré montre que les deux principes de l'augmentation de l'entropie et de la moindre action (entendu au sens hamiltonien) sont inconciliables.

« Si donc, conclut l'auteur, M. von Helmholtz a montré, avec une admirable clarté, que les lois des phénomènes réversibles découlent des équations ordinaires de la Dynamique, il semble probable qu'il faudra chercher ailleurs l'explication des phénomènes irréversibles et renoncer pour cela aux hypothèses familières de la Mécanique rationnelle d'où l'on a tiré les équations de Lagrange et de Hamilton. »

Picard. — Sur certaines expressions quadruplement périodiques dépendant de deux variables. (557-559).

M. Picard envisage des séries trigonométriques dépendant de deux variables complexes et présentant une grande analogie avec les séries trigonométriques d'une variable que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques.

Telle est la série

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{\alpha(x+m\omega)+\beta(y+n\omega')}}{[1+e^{\alpha(x+m\omega)+\beta(y+n\omega')}]^2} \frac{e^{\alpha'(x+m\omega)+\beta'(y+n\omega')}}{[1+e^{\alpha'(x+m\omega)+\beta'(y+n\omega')}]^2},$$

où l'on suppose ω, ω', α, α', β, β', réels et $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

Cette expression est quadruplement périodique; on a, pour x et y, le Tableau suivant de périodes simultanées

$$\begin{array}{c|cccc} x & \omega & 0 & Gi & Hi, \\ y & 0 & \omega' & G'i & H'i, \end{array}$$

les G et H étant définis par les équations

$$\alpha G + \beta G' = 2\pi, \qquad \alpha H + \beta H' = 0,$$
$$\alpha' G + \beta' G' = 0, \qquad \alpha' H + \beta' H' = 2\pi.$$

2ue Part.

Il en résulte que les six quantités réelles ω, ω', G, G', H, H' peuvent être prises arbitrairement. Ceci montre que l'expression (1) ne peut être une fonction analytique de x et y se comportant, pour tout système de valeurs finies de x et y, comme une fonction rationnelle. Il y a, en effet, pour la série (1) des surfaces de singularités essentielles correspondant à

$$\alpha x'' + \beta y'' = (2h+1)\pi$$

et à

$$\alpha' x'' + \beta' y'' = (2k+1)\pi,$$

h et k désignant des entiers quelconques, x'' et y'' les coefficients de la partie imaginaire des variables complexes x et y. Ces singularités essentielles empêchent le prolongement analytique de l'expression. Cette expression peut se développer en une série trigonométrique de la forme

$$\sum\sum A_{pq} \cos\frac{2p\pi x}{\omega} \cos\frac{2q\pi y}{\omega'} + B_{pq} \sin\frac{2p\pi x}{\omega} \sin\frac{2q\pi y}{\omega'}.$$

Kobb. — Sur le mouvement d'un point matériel sur une sphère. (559-561).

L'auteur étudie un cas du mouvement d'un point sur une sphère, qui conduit à une équation de Lamé.

Ribière. — Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle. (561-563).

M. Ribière résout par des séries trigonométriques un cas particulier du problème de l'équilibre élastique d'une voûte en arc de cercle dont la longueur est indéfinie dans le sens perpendiculaire à la section droite.

La voûte supporte le poids d'une masse homogène limitée inférieurement à l'extrados et supérieurement à un plan horizontal dépassant le sommet de l'extrados d'une hauteur h. Cette masse peut ne couvrir qu'une partie de l'extrados : le reste de la voûte est libre. Dans la partie chargée, chaque élément de l'extrados supporte exactement le poids de la masse contenue dans un cylindre vertical ayant pour base cet élément.

Stieltjes. — Sur les dérivées de sécx. (605-607).

Si l'on considère les dérivées d'ordre pair de sécx

$$a_0 \operatorname{séc} x, \quad (a_1 + b_1 z) \operatorname{séc} x, \quad (a_2 + b_2 z + c_2 z^2) \operatorname{séc} x, \quad \ldots,$$

où $a_0 = 1$ et $z = \operatorname{tang}^2 x$, la forme quadratique à une infinité de variables

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k$$

est égale à

$$(a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots)^2 + (b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots)^2 + (c_2 X_2 + \ldots)^2 + \ldots.$$

La considération des dérivées d'ordre impair donne lieu à une proposition analogue.

Appell. — Sur certaines expressions quadruplement périodiques. (607-608).

Soient $R(z, t)$ une fonction uniforme de z et t, α, β, γ, δ des constantes, m et n des entiers, et soit

$$R_{mn} = R(e^{x+m\alpha+n\beta}, e^{y+m\gamma+n\delta}).$$

1° Si la série

$$\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} R_{mn}$$

est convergente, elle définit une expression uniforme en x et y admettant les quatre paires de périodes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \gamma), \quad (\beta, \delta).$$

2° Si la série

$$\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=\infty} a^{-m} b^{-n} R_{mn}$$

est convergente, elle définit une expression uniforme en x et y admettant les paires de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$ et se reproduisant multipliée par le facteur a ou le facteur b quand on augmente x et y de la paire de périodes (α, γ) ou (β, δ). C'est une expression de seconde espèce.

3° Enfin, si l'on veut former de la même façon des expressions quadruplement périodiques de troisième espèce, c'est-à-dire se reproduisant multipliées par une exponentielle de la forme

$$e^{ax+by+c},$$

quand on augmente x et y d'une paire de périodes, on obtient une classe particulière de pareilles fonctions en supposant que la seconde période de l'une des paires de périodes est égale à la première période de l'autre ($\beta = \gamma$) (cas auquel on peut ramener tous les autres par des substitutions linéaires effectuées sur x et y). Cette classe de fonctions appartient au type

$$\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} e^{mx+ny+\frac{1}{2}(m^2\alpha+2mn\beta+n^2\delta)} R_{mn}.$$

Pellet. — Sur les caractères cubiques et biquadratiques. (609-610).

Boussinesq. — Formules de dissémination du mouvement transversal dans une plaque plane indéfinie. (639-645).

Fourier a trouvé l'intégrale de l'équation des petites vibrations transversales d'une plaque élastique indéfinie dans le cas où l'on se donne les déplacements initiaux $\varphi = f(\xi, \eta)$ en tous les points (ξ, η) d'une région arbitraire, et où la plaque est abandonnée à elle-même sans vitesse initiale.

Mais une discussion assez délicate restait à faire pour reconnaître si l'ex-

pression de φ obtenue par Fourier est bien déterminée à l'origine du temps et tend effectivement à la limite vers $f(\xi, \eta)$.

La Note de M. Boussinesq a principalement en vue cette discussion tant dans le cas précité que dans celui de vitesses initiales imprimées sans déplacements initiaux à la région d'ébranlement.

Sylvester. — Sur la réduction biorthogonale d'une forme linéo-linéaire à sa forme canonique. (651-653).

Picard. — Remarques sur certaines séries quadruplement périodiques. (659-660).

Les séries quadruplement périodiques à deux variables indépendantes, signalées par M. Picard dans une Communication précédente, sont des cas particuliers des *fonctions hyperabéliennes*. Les fonctions hyperabéliennes sont des fonctions de deux variables indépendantes u et v, restant invariables par les substitutions de la forme

$$\left(u, v, \frac{au+b}{cu+d}, \frac{a'v+b'}{c'v+d'}\right).$$

C'est en se plaçant dans le cas simple où les substitutions fondamentales du groupe sont au nombre de deux et se réduisent à

$$(u, v, au, bv), \qquad (u, v, a'u, b'v),$$

a, b, a', b' étant des nombres positifs quelconques, que l'on obtient comme série fondamentale l'expression

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{a^m b^n}{(ua^m b^n + i)^2} \frac{a'^m b'^n}{(va'^m b'^n + i)^2},$$

qu'on ramène immédiatement à la série signalée par M. Picard dans sa première Note en posant $u = ie^x$, $v = ie^y$.

Floquet. — Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe. (661-663).

On considère un fil homogène, flexible et inextensible, mobile dans un plan fixe et dont chaque élément ds est sollicité par une force $Fm\,ds$, m étant la masse de l'unité de longueur du fil. On suppose que l'intensité de F et son inclinaison α sur la vitesse de l'élément dépendent uniquement de la grandeur de cette vitesse, et enfin que le fil se meuve en conservant une figure permanente.

Alors, si l'angle α diffère de 0° et de 180°, cette figure est toujours une spirale logarithmique.

Quand α est constamment nul ou égal à 180°, la ligne de repos apparent du fil est de forme arbitraire; mais sur toutes les lignes courbes la vitesse de glissement et la tension sont à chaque instant les mêmes pour une même vitesse initiale de glissement.

Ces résultats trouvent leur application lorsqu'on étudie l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement d'un fil dans un plan horizontal. La figure de repos apparent du fil est une spirale logarithmique.

Boussinesq. — Expressions approchées du contour de l'ellipse et de la surface de l'ellipsoïde en fonction des deux moyennes arithmétique et géométrique des demi-axes. (697-699).

La longueur de l'ellipse est très sensiblement égale à celle d'une circonférence dont le diamètre serait l'excès de trois fois la moyenne arithmétique des demi-axes sur une fois leur moyenne géométrique. L'erreur atteint seulement l'ordre de la huitième puissance de l'excentricité.

L'aire de l'éllipsoïde est à très peu près égale à celle d'une sphère qui aurait pour rayon R les quatre cinquièmes de la moyenne arithmétique des demi-axes plus un cinquième de leur moyenne géométrique. L'erreur est de l'ordre de la sixième puissance de l'excentricité.

Hadamard. — Sur la recherche des discontinuités polaires. (722-724).

M. Lecornu a montré que la fonction

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

a pour point singulier le point

$$x_0 = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

lorsque la différence entre x_0 et sa limite est moindre que le $n^{\text{ième}}$ terme d'une progression géométrique décroissante.

Cette hypothèse est très particulière; elle correspond au cas où la fonction φ a en x_0 un pôle simple. Mais, si la fonction admet le point x_0 pour pôle multiple, on reconnaît encore que le rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ a pour limite x_0.

Voici maintenant comment on reconnaîtra que la fonction $\varphi(x)$ a plusieurs pôles situés sur son cercle de convergence.

Il existe toujours une valeur de p pour laquelle le déterminant

$$\Delta_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m+p-1} & a_{m+p} & \ldots & a_{m+2p-2} \end{vmatrix}$$

tend, pour $m = \infty$, vers $\frac{1}{\rho^p}$, ρ désignant le rayon du cercle de convergence. Alors il y a sur ce cercle $p - 1$ pôles (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).

Sonin. — Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling. (725-727).

Dans la formule d'Euler

$$h\sum_{k=0}^{m-1} f(a+kh) = \int_a^b f(u)\,du - \frac{1}{2}[f(b)-f(a)] + \frac{B_1 h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)] + \ldots + R_n,$$

où

$$b = a + mh,$$

le reste peut être exprimé par la formule

$$R_n = -(-1)^n \frac{B_{2n-1} h^{2n}}{(2n)!}[f^{2n-1}(b+\theta h) - f^{2n-1}(a+\theta h)], \qquad 0 < \theta < \frac{1}{2},$$

sous la condition

$$\left|f^{2n}\left(a+\frac{h}{2}+kh\right)\right| > \int_0^1 \left|f^{2n}\left(a+\frac{h}{2}+kh+ht\right)dt\right|,$$

qui a lieu, par exemple, lorsque $\left|f^{2n}\left(a+\frac{h}{2}+z\right)\right|$ est une fonction positive décroissante entre $z=0$ et $z=b-a$.

L'application de cette formule à $\Gamma(1+x)$ donne pour valeur approchée de cette fonction

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{(x+\theta)^{-1}}{12}}.$$

Brioschi. — Les discriminants des résolvantes de Galois. (878-879).

On sait que l'on peut donner aux trois résolvantes de Galois la forme commune

$$f(x) = A^3 B + \frac{-3}{12} J = 0.$$

En désignant par Δ le discriminant, on trouve

$$\text{Pour } n=5\ldots\quad \Delta = \frac{-12}{12} J^2(1-J)^2;$$

$$\text{»}\quad n=7\ldots\quad \Delta = \frac{-18}{12} J^4(1-J)^2;$$

$$\text{»}\quad n=11\ldots\quad \Delta = \frac{-30}{12} J^6(1-J)^4;$$

dans les trois cas le discriminant est un carré.

Pincherle. — Sur une application de la théorie des fractions continues algébriques. (888-889).

I. Soient $\sum \frac{a_\nu}{x^{\nu+1}}$, $\sum \frac{b_\nu}{(x-x_0)^{\nu+1}}$ deux développements de la même fonction; le second est le prolongement analytique du premier. Si l'on développe l'une quelconque des deux séries en fraction continue, la $n^{\text{ième}}$ réduite développée en série de puissances, soit de x_1, soit de $x-x_0$, coïncide jusqu'au $2n^{\text{ième}}$ terme inclusivement avec l'une ou l'autre des séries données.

II. Soit l'équation différentielle linéaire

$$p_0 f + p_1 \frac{df}{dx} + \ldots + p_m \frac{d^m f}{dx^m} = F(x),$$

où $F(x)$ est régulière pour $x = \infty$ et p_i a pour $x = \infty$ au plus un pôle d'ordre i. Cette équation admet une intégrale uniforme et régulière dans le domaine de $x = \infty$. On peut remplacer $\frac{p_i}{x_i}$ et $F(x)$ par leurs $n^{\text{ièmes}}$ réduites, et l'on obtient l'intégrale approchée jusqu'aux termes d'ordre $2n$ inclusivement.

III. En supposant les p_i rationnels et appliquant à l'équation précédente la transformation d'Euler

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(y)\, y^{x-1}\, dx,$$

on obtient une équation linéaire aux différences, dont une intégrale approchée a la forme

$$\frac{1}{x} \Sigma A_\mu F(1, x, x+1, \alpha_\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

où F est la série hypergéométrique.

Sylvester. — Sur la correspondance complète entre les fractions continues qui expriment les deux racines d'une équation quadratique dont les coefficients sont des nombres rationnels. (1037-1041).

Sylvester. — Sur la représentation des fractions continues qui expriment les deux racines d'une équation quadratique. (1084-1086).

Sylvester. — Sur la valeur d'une fraction continue finie et simplement périodique. (1195-1198).

Stieltjes. — Sur un développement en fraction continue. (1297-1298).

Si l'on envisage le développement en fraction continue de l'intégrale

$$I = \int_a^b \frac{f(z)}{x - z}\, dz,$$

où $f(z)$ ne change pas de signe et que l'on pose

$$I = \frac{P_n}{Q_n} + R_n,$$

on démontre que R_n est le minimum de la forme quadratique

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_b^a [1 + x_1(x - z) + \ldots + x_n(x - z)^n]^2\, dz.$$

On déduit facilement de là que, si l'intervalle (a, b) est fini, l'on a

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Il n'en est pas de même en général lorsque $b = \infty$. Cependant $\lim R_n$ est encore nulle dans un grand nombre de cas, notamment lorsque $f(z)$ est de la forme

$$z^{p-1} e^{-qz} \quad \text{ou} \quad z^{p-1} e^{-q\sqrt{z}}.$$

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement [1].

LVIe Cahier, 1886.

Moutard. — Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (1-5).

Sous ce titre, le *Journal de l'École Polytechnique* reproduit une Note de M. Moutard insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 18 avril 1870. Il ne sera pas inutile de donner ici une brève analyse de cette Note importante, à laquelle se réfèrent les auteurs des deux Mémoires suivants.

M. Moutard étudie la forme la plus élémentaire que puisse revêtir l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Cette forme consiste en une relation entre les trois variables, deux fonctions arbitraires de quantités distinctes composées explicitement avec les trois variables, et les dérivées en nombre limité de ces fonctions arbitraires, les arbitraires n'entrant d'ailleurs sous aucun signe d'intégration.

Les équations susceptibles d'admettre une pareille intégrale sont toutes, en exceptant quatre cas particulièrement simples, réductibles à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}(A e^z) - \frac{\partial}{\partial v}(B e^z),$$

A et B étant des fonctions des seules variables indépendantes, assujetties à vérifier certaines conditions. L'intégration de cette équation se ramène à celle d'une équation de Laplace. Or on peut, suivant M. Moutard, construire l'équation linéaire la plus générale, susceptible d'être intégrée entièrement, sous forme finie, au moyen de deux fonctions arbitraires et de leurs dérivées en nombre déterminé.

Parmi les équations linéaires, celles qui sont réductibles à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = A(u, v)\, z$$

---

[1] Voir *Bulletin*, XI$_2$, 124.

ont une importance particulière. La construction d'une telle équation assujettie à admettre une intégrale générale renfermant n dérivées des fonctions arbitraires dépend d'une équation aux dérivées partielles d'ordre $2n$, qui, pour $n = 1$, se réduit à l'équation de Liouville. M. Moutard est parvenu à obtenir par voie de récurrence l'intégrale générale de cette équation en profitant d'une remarque rencontrée dans ce problème de Géométrie :

Transformer une surface de manière que les éléments linéaires correspondants de la surface donnée et de la surface transformée soient dirigés à angle droit.

Liouville (*Roger*). — Sur les formes intégrables des équations linéaires du second ordre. (7-62).

Ce travail est consacré à l'étude des équations linéaires du second ordre à deux variables indépendantes qui s'intègrent par une formule contenant l'une au moins des fonctions arbitraires dégagée du signe d'intégration.

La transformation de Laplace permet, on le sait, de reconnaître si une équation donnée appartient à ce type particulier; mais il est plus difficile de construire *a priori* toutes les équations pour lesquelles cette transformation réussit. C'est à M. Moutard qu'est due la solution de ce problème, que M. R. Liouville reprend d'une manière nouvelle.

Il considère une équation linéaire sans second membre et en suppose données cinq intégrales particulières, au moyen desquelles il est toujours facile de former une intégrale complète. Par la variation des constantes arbitraires qui y figurent, ces intégrales se transforment en d'autres fonctions dont chacune satisfait à une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. Les coefficients de cette équation dépendent, en général, des solutions qu'on a choisies; seuls les coefficients des dérivées les plus élevées ont leurs rapports invariables. Toute intégrale connue de l'équation proposée correspond à une intégrale connue de l'équation nouvelle.

Si l'on se restreint aux équations admettant une intégrale générale où figurent, avec une fonction arbitraire au moins, dégagée du signe d'intégration, les dérivées de cette fonction jusqu'à l'ordre n, on dira qu'une telle équation *appartient à l'indice n*. Quand une équation appartient à l'indice $n-1$, parmi les cinq transformées qu'on en déduit à la fois, il y en a toujours une au moins qui appartient à l'indice $n+1$; réciproquement, à toute équation d'indice $n+1$, on peut en associer quatre autres qui soient avec celle-ci les cinq transformées d'une même équation d'indice $n-1$.

De là résulte que, partant du groupe des équations d'indice zéro, on saura former explicitement les groupes d'indices 2, 4, etc.; et comme tout groupe d'indice impair est contenu dans le groupe d'indice pair immédiatement supérieur, ce procédé fournit bien (puisque le groupe d'indice zéro satisfait à la première condition de Laplace) toutes les équations admettant une intégrale générale du type élémentaire considéré précédemment.

Après avoir ainsi résolu la question qu'il se proposait, l'auteur en obtient une autre solution en considérant une forme particulière qui convient aux équations du second ordre, savoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

ainsi que l'équation *adjointe* de l'équation primitive. (Cette équation est celle que vérifie le facteur par lequel l'équation primitive doit être multipliée pour acquérir la forme ci-dessus.)

Lévy (*Lucien*). — Sur quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (63-77).

Ce Mémoire comprend deux Parties, l'une analytique, l'autre géométrique.

Dans la première Partie, l'auteur forme des équations du type

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

qui contiennent dans leurs coefficients autant d'arbitraires que l'on veut et qui s'intègrent toutes dès qu'une seule s'intègre.

Si l'on sait intégrer l'équation (1), *on saura intégrer l'équation*

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y} + \left(a - \frac{\partial \log \alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial z'}{\partial x} + b\frac{\partial z'}{\partial y} + c + k - h - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - b\frac{\partial \log \alpha}{\partial x} = 0,$$

où h et k sont les deux invariants

$$h = ab - c + \frac{\partial a}{\partial x}, \qquad k = ab - c + \frac{\partial b}{\partial y}$$

de l'équation (1) *et où* α *vérifie l'équation*

$$\alpha = -\frac{\zeta}{\alpha\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial y}},$$

ζ *étant une intégrale quelconque de l'équation* (1). *L'intégrale générale de l'équation* (2) *est*

$$z' = \frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial \log \zeta}{\partial y},$$

z étant l'intégrale générale de la proposée.

On peut opérer sur l'équation (2) comme sur la précédente et obtenir ainsi une équation intégrable avec deux fonctions arbitraires dans les coefficients, et ainsi de suite indéfiniment.

Dans la seconde Partie, l'auteur se propose d'obtenir toutes les surfaces sur lesquelles les développables d'une congruence de droites donnée découpent un réseau conjugué. La solution qu'il obtient fournit une interprétation géométrique des résultats précédents, analogue à celle que M. Darboux a donnée de la méthode de Laplace.

Poincaré. — Mémoire sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. (79-142).

Ce Mémoire complète un travail publié antérieurement (même Recueil, LIe Cahier) où l'auteur étudiait les questions relatives à la réduction et à l'équivalence des formes cubiques ternaires.

Dans l'étude qu'il fait actuellement de l'équivalence des formes décomposables en un facteur quadratique et un facteur linéaire, l'auteur rencontre des chaînes indéfinies de réduites se reproduisant périodiquement, ainsi qu'il arrive pour les formes quadratiques binaires indéfinies.

Le problème de l'équivalence de deux pareilles formes se ramène à celui de l'équivalence de deux systèmes comprenant chacun une forme quadratique et une forme linéaire.

L'énumération des nombreux cas et sous-cas serait trop longue pour que nous puissions ici la faire en détail.

Ossian-Bonnet (*G.*). — Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand. (143-162).

1° Expression de la circonférence géodésique, aux infiniment petits près du troisième ordre inclusivement, le rayon géodésique étant l'infiniment petit principal.

2° Expression de l'aire du cercle géodésique quand on ne néglige que les infiniment petits d'ordre supérieur au quatrième.

Brisse (*Ch.*). — Démonstration du théorème de d'Alembert. (163-169).

Fouret. — Mémoire sur certains mouvements, dans lesquels des arcs d'une même courbe plane comptés à partir d'une origine fixe sont parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes. (171-211).

L'auteur s'est proposé de traiter les deux questions suivantes, inverses l'une de l'autre :

1° Un point matériel, soumis dans un plan à une force dérivant d'un potentiel déterminé, part d'une origine fixe O avec une vitesse donnée. Trouver un système de courbes (C), homothétiques et passant par O, qui soit tel que le mobile, en décrivant l'une de ces courbes, à partir du point O, atteigne un point quelconque du plan dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante;

2° Étant donné dans un plan un système de courbes (C), homothétiques et passant en un même point O, centre commun d'homothétie, trouver une force dérivant d'un potentiel, sous l'action de laquelle un mobile, partant avec une vitesse donnée du point O, parcoure, à partir de ce point, un arc quelconque d'une quelconque des courbes (C) dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante.

Le premier problème n'est pas toujours possible. Pour qu'il le soit, il faut d'abord que la vitesse initiale soit nulle; il faut en outre que l'expression du potentiel ait une forme particulière : l'équation des courbes synchrones étant

$$r = \lambda \varphi(\theta),$$

où λ désigne une fonction arbitraire du temps et r le rayon vecteur issu du centre d'homothétie O, l'expression du potentiel doit être

$$V = \varphi^2(\theta)\psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right] + C.$$

ψ étant une fonction arbitraire et C une constante arbitraire. La fonction $\varphi(\theta)$, dont dépendent les courbes synchrones, s'obtient par une quadrature.

Le second problème n'est également possible qu'autant que la vitesse initiale est nulle. La solution est alors ramenée à ne dépendre que d'une élimination et d'une quadrature. Le potentiel cherché dépend encore d'une fonction arbitraire. La solution du second problème étant obtenue pour un système de courbes donné, on l'étend à une infinité d'autres, déduits du premier par la transformation de W. Roberts, qui consiste à changer r en r^n et θ en $n\theta$.

M. Fouret applique ces résultats généraux à une classe étendue de courbes dont l'équation contient trois paramètres. Il démontre enfin que le premier problème n'admet généralement pas de solution dans les deux cas suivants : 1° lorsque la force émane d'un point fixe et ne dépend que de la distance du mobile à ce point; 2° lorsque la force a une direction fixe et dépend de la distance du mobile à une droite fixe. Il n'y a de solution que dans les deux cas d'une force centrale proportionnelle à la distance et d'une force constante en grandeur, direction et sens.

Rouché. — Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux. (213-277).

LVIIe Cahier, 1887.

Hugoniot. — Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits. (3-97).

Ce Mémoire a pour objet l'étude du mouvement d'un corps quand ce mouvement s'effectue par tranches parallèles et, par suite, est régi par une équation à deux variables indépendantes seulement. Il comprend cinq Chapitres, dont trois seulement sont publiés dans le LVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Les deux derniers seront insérés dans un des Cahiers suivants.

Le Chapitre Ier renferme une théorie sommaire des *caractéristiques*. L'auteur y a réuni en un corps de doctrine divers résultats disséminés dans les Ouvrages de Monge et d'Ampère. Si, pour se borner au cas le plus utile en Physique mathématique, on envisage une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes x et y, linéaire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé r, s, t,

$$\mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} = 0$$

(H, K, L, M étant des fonctions quelconques de x, y, z, p, q), toute intégrale $z_1 = f_1(x, y)$ représente une surface; et l'on appelle *caractéristique* de cette surface, les courbes suivant lesquelles elle est coupée par une autre surface intégrale $z_2 = f_2(x, y)$ qui se raccorderait avec la première. Quand l'intégrale z_1 est connue, les caractéristiques sont données par l'équation différentielle du premier ordre

$$\mathrm{H}\frac{dy^2}{dx^2} - 2\mathrm{K}\frac{dy}{dx} + \mathrm{L} = 0.$$

Le Chapitre II est consacré à la recherche des équations du mouvement par tranches. On admet sans démonstration suffisante que, dans le mouvement d'un gaz parfait sans variation de chaleur, la détente de chaque tranche s'ef-

fectue suivant la même loi que la détente adiabatique d'un gaz qui se dilaterait avec une lenteur infinie. En s'appuyant sur le principe de l'équivalence, M. Hugoniot justifie cette hypothèse dans le cas où la variation de vitesse s'opère d'une manière continue. Mais, quand il se produit des discontinuités dans le mouvement, la relation primitive entre la pression et la densité subit une modification brusque. On doit alors, dans l'équation du second ordre qui régit le mouvement, laisser subsister une fonction arbitraire, dont l'élimination conduit à deux équations simultanées du quatrième ordre ayant une caractéristique commune. L'auteur applique une méthode analogue à la formation des équations du mouvement par tranches parallèles ou par couches sphériques concentriques pour les fluides non conducteurs autres que les gaz parfaits.

Le Chapitre III, qui est capital, a pour objet l'intégration des équations du mouvement par tranches parallèles. Dans un certain nombre de cas, on est parvenu à représenter la solution dans son ensemble par une formule unique, en faisant usage des séries trigonométriques. Mais ces séries ne sont pas toujours susceptibles de différentiation, et l'on ne peut en faire usage pour calculer les vitesses et les dilatations. De plus, elles ne donnent aucune indication sur le mécanisme des phénomènes, c'est-à-dire sur la propagation et la réflexion. De telles solutions sont évidemment bien imparfaites à côté de celles où les valeurs du déplacement u, de la vitesse $\frac{\partial u}{\partial t}$ et de la dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont exprimées sous forme finie au moyen de fonctions simples, mais dont l'expression change au bout de certains intervalles de temps, en rapport avec certaines phases de la propagation. Voici le principe de cette méthode :

Quand le mouvement d'un corps s'effectue par tranches parallèles, il peut arriver que ce corps soit à un instant donné divisé en deux parties par une section ξ perpendiculaire à la direction des vitesses, le mouvement étant représenté, d'un côté de ξ par une certaine intégrale et de l'autre par une autre intégrale. Dans certains cas, l'une des intégrales s'étend simplement aux dépens de l'autre, de sorte qu'à l'instant suivant les mouvements sont encore représentés par les intégrales primitives; seulement la section de séparation s'est déplacée avec une vitesse qui est la *vitesse de propagation*. Quand il en est ainsi, les deux mouvements sont dits *compatibles*. Quand les deux mouvements sont incompatibles, il naît, au niveau de la tranche de séparation, un nouveau mouvement compatible avec les deux autres et qui se propage dans les deux sens aux dépens des mouvements primitifs.

Le mouvement initial du corps étant donné, ainsi que les conditions imposées aux extrémités, il se développe à ces extrémités des mouvements compatibles avec le mouvement primitif, lesquels finissent par se rencontrer. Au point de rencontre naît un mouvement compatible avec les deux précédents et qui se propage dans les deux sens jusqu'à ce qu'il rencontre une des extrémités. Là prend naissance un nouveau mouvement, etc.

La détermination analytique du mouvement exige donc que l'on calcule une suite de fonctions différentes les unes des autres et dont chacune représente le mouvement d'une partie du corps pendant un certain temps.

Ce sont les *conditions de compatibilité* qui fournissent les règles nécessaires à la détermination de ces diverses intégrales. Le mouvement peut être représenté par une surface dont l'ordonnée verticale est le déplacement u d'une tranche x à l'instant t. Quand il ne se produit pas de discontinuité dans les

vitesses, les dilatations et les pressions, les surfaces représentatives des deux mouvements compatibles se raccordent le long de la ligne d'intersection, qui est une caractéristique commune aux deux surfaces. Il en résulte que la vitesse de propagation d'un mouvement A dans un mouvement B est égale au coefficient angulaire de la projection horizontale de la caractéristique commune. Ce théorème permet de calculer la vitesse de propagation quand on connaît seulement le mouvement B. En particulier, si le corps part du repos, on peut calculer la vitesse de propagation au moyen de l'équation aux dérivées partielles sans effectuer d'intégration.

M. Hugoniot applique cette méthode de détermination des intégrales au mouvement d'une tige élastique fixée à la partie supérieure et portant un poids à l'autre extrémité, problème dont la solution n'avait pas encore été donnée en termes finis.

Passant à l'étude des fluides, il montre que, dans un gaz parfait, primitivement au repos, la vitesse de propagation est égale à la vitesse normale du son, quel que soit le mouvement qui se propage, tant qu'il ne s'y produit pas de discontinuités. Cette vitesse n'est pas modifiée par les frottements ; il en est de même pour tous les fluides non conducteurs.

David. — Développement des fonctions implicites. (147-169).

Étant donnée une équation algébrique $f(y, x) = 0$, déterminer une série qui représente y, ou plus généralement une fonction de y, au moyen de la variable x pour une valeur quelconque de x.

Tel est le problème que M. David résout dans toute sa généralité.

Pour y parvenir, il commence par établir la formule

$$\varphi(y, x) = \frac{1}{2i\pi}\int \varphi(y, x)\,\frac{f'_y(y, x)}{f(y, x)}\,dy,$$

où $\varphi(y, x)$ désigne une fonction uniforme de y, x et, par suite, une fonction très générale d'une racine y de l'équation $f(y, x) = 0$; l'intégration se fait suivant un contour arbitraire tracé dans le plan des y, mais qui ne doit pas dépasser un point singulier de la courbe $f(y, x) = 0$. On reconnaît là une généralisation d'une formule bien connue de Cauchy.

Si maintenant (x_1, y_1) désignant un point ordinaire, on isole la somme Y des termes qui ne contiennent que y et qu'on mette l'équation de la courbe sous la forme

$$f(y, x) = Y - \left(\frac{x - x_1}{y - y_1}\right) G,$$

où G est une fraction rationnelle dont le numérateur ne devient nul ni pour $x = x_1$, ni pour $y = y_1$, et dont le dénominateur ne devient pas nul pour $y = y_1$; si l'on substitue ensuite cette valeur de $f(y, x)$ dans l'intégrale définie ci-dessus, on pourra développer $\varphi(y, x)$ en la série

$$\varphi(y, x) = \varphi(y_1, x_1) + \frac{x - x_1}{1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,G + \frac{(x - x_1)^2}{1.2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,G^2 + \ldots.$$

Cette série se réduit à celle de Lagrange dans le cas particulier où la fonction G ne contient pas y.

Quant au domaine de convergence de la série, son contour est représenté

sur le plan des x par l'équation

$$\operatorname{mod} C(x - x_1) e^{\int \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial v} dv} = T,$$

où T désigne la valeur que prend le premier membre quand on y remplace x par le premier point singulier α, et où C est la valeur de la fonction G pour $x = x_1$ et $y = y_1$.

La série de Lagrange généralisée par M. David est d'ailleurs la seule série à simple entrée qui développe une fonction d'une racine de l'équation proposée. Toutes les autres séries que l'on peut obtenir pour la solution de ce problème sont des séries à double entrée dont le contour de convergence est compris dans celui de la série de Lagrange.

Tel est le cas de la série que M. Gomez Teixeira a proposée récemment pour le développement des fonctions implicites.

Humbert. — Sur les arcs des courbes planes algébriques. (171-187).

Si l'on mène les tangentes communes à une courbe algébrique quelconque et à la courbe de direction représentée en coordonnées tangentielles rectangulaires par l'équation

$$F^2(u, v, w) - \lambda(u^2 + v^2)\varphi^2(u, v, w) = 0,$$

et si l'on fait ensuite varier cette courbe en changeant le paramètre λ, la somme algébrique des arcs décrits par les points de contact des tangentes communes sur la courbe fixe est exprimable en fonction rationnelle de $\sqrt{\lambda}$.

Ce théorème général est susceptible de nombreuses applications, dont voici quelques-unes :

1° Si l'on mène à une courbe algébrique toutes les tangentes sur lesquelles deux droites fixes interceptent un segment de longueur l, et si l'on fait ensuite varier cette longueur, les points de contact de la courbe et de chacune des tangentes décrivent sur cette courbe des arcs dont la somme est à chaque instant une fonction rationnelle de l.

2° Le cas le plus intéressant est celui où les courbes de direction sont des cercles concentriques. Si l'on fait varier le rayon d'un cercle, son centre restant fixe, la somme algébrique des arcs décrits sur une courbe algébrique par les points de contact est à chaque instant égale (à une constante près) à la variation de la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

3° Cette proposition est d'ailleurs comprise dans celle-ci :

Les 2ν points de contact avec une courbe algébrique de classe ν des tangentes communes à cette courbe et à un cercle peuvent être groupés deux à deux de manière à déterminer sur la courbe ν arcs, dont la somme algébrique est égale à la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

Cette proposition, appliquée aux coniques, donne immédiatement le théorème de Graves et Chasles.

M. Humbert signale encore, dans le même ordre d'idées, les propositions suivantes :

Si l'on mène à une courbe algébrique ne passant pas par les points cycliques du plan les normales tangentes à un même cercle, et si l'on fait ensuite varier le rayon de ce cercle, son centre demeurant fixe, la somme algébrique des arcs

décrits sur la courbe par les pieds des normales varie proportionnellement au rayon.

Si l'on considère sur une courbe algébrique tous les points pour lesquels le rayon de courbure a une longueur donnée, et si l'on fait ensuite varier cette longueur, la somme algébrique des arcs décrits par les points considérés est nulle.

Liouville (*R.*). — Sur quelques équations différentielles non linéaires. (189-250).

Il s'agit d'un type très général d'équations du second ordre : celles dont l'intégrale générale

$$\alpha_1 \varphi_1(x, y) + \alpha_2 \varphi_2(x, y) + \alpha_3 \varphi_3(x, y) = 0$$

exprime une relation linéaire entre trois constantes arbitraires.

L'étude de ces équations est intimement liée à celle des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

M. R. Liouville commence par rechercher les conditions que doit remplir un pareil système pour admettre trois ou bien quatre intégrales distinctes. L'expression de ces conditions est notablement facilitée par la considération d'un système *adjoint* que l'auteur enseigne à former. On est alors en mesure de trouver les trois solutions communes à trois équations du second ordre linéaires aux dérivées partielles. Une méthode connue ramène la recherche de ces solutions à l'intégration d'une seule équation différentielle ordinaire, linéaire et du troisième ordre. Mais cette équation contient, en général, un paramètre qu'il faut laisser entièrement arbitraire et il est aisé d'imaginer ce qu'une pareille obligation comporte de difficultés. Il est un cas cependant où aucun paramètre arbitraire n'apparaît dans l'équation du troisième ordre; c'est celui où l'une des équations du système proposé est intégrable par la méthode de Laplace. Or M. Liouville montre que l'on peut ramener tous les cas à celui-là.

Cela fait, il peut aborder l'étude des équations différentielles ordinaires dont l'intégrale exprime une relation linéaire entre trois constantes arbitraires. Toutes ces équations rentrent dans le type

$$y'' + a_1 y'^3 + 3 a_2 y'^2 + 3 a_3 y' + a_4 + 0,$$

où les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 sont des fonctions de x et de y assujetties seulement aux deux conditions

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + 3 a_2 a_1\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_1\right)$$
$$- 3 a_3\left(2\frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_1\right) - a_4\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3 a_1 a_2\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - 3 a_1 a_1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2\frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4\right)$$
$$- 3 a_2\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - 2\frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4\right) + a_1\left(\frac{\partial a_4}{\partial y} + 3 a_2 a_4\right) = 0;$$

et l'intégrale s'obtient en égalant à zéro la solution générale d'un système

d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} - a_2 \frac{\partial z}{\partial y} + z\left[\frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + 2(a_1 a_4 - a_2^2)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x} - a_3 \frac{\partial z}{\partial y} + z\left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 - a_2 a_3\right] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial z}{\partial x} - a_4 \frac{\partial z}{\partial y} + z\left[\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial a_3}{\partial x} + 2(a_3 a_4 - a_3^2)\right] = 0.$$

Il existe deux cas très étendus où l'on peut obtenir sous forme explicite les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 : 1° celui où ces coefficients ne contiennent que l'une des variables x et y; 2° celui où l'on a

$$\frac{\partial a_3}{dy} - 2\frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_3 = 0$$

ou bien

$$2\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x} + a_1 a_4 = 0.$$

Alors, d'après ce qui précède, l'équation non linéaire du second ordre est ramenée à une équation linéaire du troisième.

Le premier de ces cas amène naturellement à l'étude de certaines équations du premier ordre, celles qui expriment $\frac{dy}{dx}$ par un polynôme du troisième degré en y,

$$\frac{dy'}{dx} + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0.$$

Une pareille équation est réductible aux quadratures si ses coefficients supposés ne dépendre que de x et leurs dérivées a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 satisfont à l'identité

$$a_1 L' + K L^{\frac{5}{3}} - 3[a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3)]L = 0,$$

où K est une constante arbitraire, qui peut être nulle, et L l'expression

$$a_2 a'_1 - a_1 a'_2 + a_1(a_1 a_4 - a_2 a_3) - 2a_2(a_2^2 - a_1 a_3).$$

En terminant, M. R. Liouville étudie en détail les équations de la forme simple

$$y'' + 3a_2 y'^2 - 3a_3 y' = 0,$$

et donne quelques exemples.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CIX; 1889 (1).

Darboux et *Kœnigs*. — Sur deux appareils nouveaux de Mécanique. (49-51).

Le premier de ces deux appareils a pour but de décrire le plan dans l'espace au moyen de tiges articulées. Il est fondé sur le théorème suivant, dû à M. Darboux :

« Si trois points d'une tige de longueur invariable décrivent trois sphères dont les centres soient sur une même droite D, tout autre point P de la tige décrit aussi une sphère dont le centre O est sur la droite D. Les points P et O se correspondent homographiquement, et il existe en particulier un point M de la tige qui correspond au point situé à l'infini sur la droite D. Ce point M décrit donc un plan normal à la droite D. »

Le second appareil fournit une représentation du mouvement d'un corps solide tournant librement autour de son centre de gravité. Il est fondé sur une combinaison des deux modes de représentation de Poinsot, l'un consistant dans le roulement de l'ellipsoïde central sur un plan fixe Π, l'autre dans le roulement d'un cône C sur un plan Π′ parallèle à Π.

Si l'on relie invariablement le cône C à la polhodie, et qu'on oblige par un engrenage le cône à rouler sur le plan Π′ animé lui-même d'une rotation uniforme, la polhodie, réalisée physiquement, se trouve entraînée et roulera sur le plan Π, en possédant à chaque instant une vitesse angulaire ω proportionnelle au rayon vecteur du point de contact.

Léauté. — Remarque sur les transmissions à grande vitesse. (52-54).

Pour être assuré d'éviter, dans un ensemble mécanique, les changements relatifs de sens et les perturbations qui en résultent, il suffit que, pour chaque arbre, le rapport du nombre de tours fait par minute au nombre de tours qu'il serait capable de faire si l'action motrice cessait brusquement aille en croissant constamment à mesure qu'on s'éloigne de la machine.

Fontviolant (*de*). — Sur les déformations élastiques d'un corps solide, isotrope ou cristallisé, sous l'action d'une force d'intensité constante pivotant autour de son point d'application. (216-219).

Si une force F_A d'intensité constante pivote autour de son point d'application A appartenant à un corps solide isotrope ou cristallisé, un point quel-

(1) Voir *Bulletin*, t. XV, p. [illegible]

conque B de ce corps se meut sur un ellipsoïde, dont trois diamètres conjugués quelconques représentent les déplacements élastiques du point B correspondants à trois directions rectangulaires déterminées de la force F_A.

Réciproquement, si une force F_B, égale à la première, pivote autour du point B, le point A se meut sur un ellipsoïde égal au premier, dont trois diamètres conjugués quelconques représentent les déplacements élastiques du point A correspondants à trois directions rectangulaires de la force F_B.

En faisant coïncider B avec A, on a ce corollaire :

Si une force F_A d'intensité constante pivote autour du point A, ce point se meut sur un ellipsoïde, dont trois diamètres conjugués quelconques représentent les déplacements élastiques correspondants à trois directions rectangulaires de la force F_A, et dont les axes représentent trois déplacements pour lesquels il y a coïncidence entre la direction de chacun de ces déplacements et la direction correspondante de F_A.

Kœnigs. — Sur les surfaces à double génération circulaire et sur les surfaces doublement enveloppées par des quadriques. (364-366).

L'auteur résout complètement le problème suivant, qui intervient dans plusieurs questions de Géométrie.

Trouver k polynômes linéairement indépendants de la forme

$$f_i = (a_i\lambda^2 + b_i\lambda + c_i)\mu^2 + (a'_i\lambda^2 + b'_i\lambda + c'_i)\mu + (a''_i\lambda^2 + b''_i\lambda + c''_i),$$

et tels que la somme de leurs carrés

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2$$

soit nulle.

M. Kœnigs fait remarquer que k est au plus égal à 9; car tout polynôme f_i est une fonction linéaire et homogène des 9 quantités

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} X = \lambda^2\mu^2, & Y_1 = \lambda^2\mu, & Y_2 = \lambda\mu^2, \\ Z_1 = \lambda^2, & Z = \lambda\mu, & Z_2 = \mu^2, \\ T_1 = \lambda, & T_2 = \mu, & T = 1. \end{array}\right.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} F = {} & A_1(Y_1^2 - XZ_1) + A_2(Y_2^2 - XZ_2) + 2B(Y_1Y_2 - XZ) \\ & + 2B_1(ZZ_1 - Y_1T_1) + 2B_2(ZZ_2 - Y_2T_2) + 2C(T_1T_2 - ZT) \\ & + 2C_1(Y_1Z - Y_2Z_1) + 2C_2(Y_2Z - Y_1Z_2) + 2D_1(XT_1 - Y_2Z_1) \\ & + 2D_2(XT_2 - Y_1Z_2) + 2E_1(Z_1T - T_1^2) + 2E_2(Z_2T - T_2^2) \\ & + 2G_1(Y_1T - TZ_1) + 2G_2(Y_2T - T_1Z_2) + 2H_1(ZT_1 - Z_1T_2) \\ & + 2H_2(ZT_2 - Z_2T_1) + H(XT - Z^2) + K(Z_1Z_2 - Z^2) \\ & + 2K_1(Y_1T_2 - Z^2) + 2K_2(Y_2T_1 - Z_2), \end{aligned}$$

la forme F s'évanouit identiquement lorsqu'on y remplace X_1, Y_1, ... par leurs valeurs (1). Si l'on donne aux vingt coefficients de F des valeurs arbitraires, elle pourra être décomposée en 9 carrés; mais on pourra disposer des arbitraires de façon que F soit réductible à 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 carrés; le problème est donc résolu.

Si l'on prend, par exemple, tous les coefficients nuls, sauf $A_1 = a^2$, $A_2 = b^2$, $B = ab$, $K = H$, la forme

$$F = (aY_1 - bY_2)^2 - X(a^2Z_1 + b^2Z_2 + 2abZ - HT) - HZ_1Z_2$$

est décomposable en une somme de cinq carrés $f_1, f_2, \ldots, f_5$.

Les expressions de $f_1, f_2, \ldots, f_5$ en fonction des paramètres λ, μ sont les coordonnées pentasphériques d'une surface doublement cerclée du huitième ordre; λ, μ sont les paramètres des deux familles de cercles.

Si l'on suppose $k = 6$, les six polynômes f_i sont les coordonnées d'une droite d'une congruence qui est le lieu de deux familles de quadriques. Chacune des surfaces focales est l'enveloppe de deux familles de quadriques, propriété qui les rapproche des cyclides.

Boussinesq. — Complément à la théorie des déversoirs en mince paroi qui s'étendent à toute la largeur du lit d'un cours d'eau; calcul approché, pour les nappes déprimées ou noyées en dessous, de la non-pression exercée à leur face inférieure, d'après l'élévation imposée au niveau d'aval dans le canal de fuite. (541-546).

Liouville (*R.*). — Sur les invariants de certaines différentielles et sur leurs applications. (560-563).

Dans cette Note, extraite d'un Mémoire plus étendu, M. R. Liouville résume l'étude qu'il a faite des équations différentielles de la forme

$$(1) \qquad dx\, d^2y - dy\, d^2x + a_1\, dy^3 + 3a_2\, dy^2\, dx + 3a_3\, dy\, dx^2 - a_4\, dx^3 = 0,$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 sont des fonctions quelconques de x et y.

L'auteur avait antérieurement fait connaître plusieurs invariants de ces équations pour les transformations

$$(2) \qquad x' = f(x, y), \qquad y' = \varphi(x, y).$$

Il restait à trouver les modes de construction propres aux cas exceptionnels et à classer ces cas qui constituent les singularités du type d'équations considéré.

Pour cela, l'auteur fait un usage continuel du système

$$(3) \qquad \begin{cases} dz - p\, dx - q\, dy = 0, \\ dp + (P''p + Q''q + R''z)\, dx + (P'p + Q'q + R'z)\, dy = 0, \\ dq + (P'p + Q'q + R'z)\, dx + (Pp + Qq + Rz)\, dy = 0, \end{cases}$$

dans lequel x et y sont deux variables liées entre elles par une relation qui n'est pas donnée; z, p, q trois inconnues fonctions d'une seule variable indépendante; P, Q, ..., R'' des fonctions déterminées de x, y.

A ce système se rattache d'une manière invariante l'équation (1), lorsque l'on pose

$$P = a_1, \qquad 2P' - Q = 3a_2, \qquad P'' - 2Q' = 3a_3, \qquad -Q'' = a_4.$$

Car, si l'on voulait isoler z, il faudrait, en différentiant les équations du système (3), former une équation linéaire dont l'ordre est en général le troisième, mais s'abaisse au second lorsque l'équation (1) est vérifiée, et cette propriété subsiste évidemment après l'une des transformations (2).

C'est la considération du système linéaire associé qui a permis à M. Liouville de distinguer les cas remarquables que peuvent présenter les équations du type (1).

Ces distinctions conduisent à la solution du problème suivant :

Étant donnée une équation du type (1), reconnaître s'il existe une substitution

$$X = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y),$$

telle que, dans l'équation transformée

$$dX\, d^2Y - dY\, d^2X + A_1\, dY^3 + 3A_2\, dY^2\, dX + 3A_3\, dY\, d^2X + A_4\, dX^3 = 0,$$

les coefficients $A_1, \ldots, A_4$ ne renferment point l'une des variables; et quand cette substitution existe, la calculer ainsi que l'équation transformée correspondante.

La solution de ce problème fournit une classe étendue d'équations différentielles dont on sait abaisser l'ordre par un changement d'inconnue évident.

Une seconde application concerne les équations réductibles à la forme

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + Xy^{m+1} + X_1 y = 0,$$

où X, X_1 désignent des fonctions quelconques de x. On prouve que le nombre m ne change par aucune des transformations (2). Cependant à chacune des équations (4) en correspond une autre

$$\frac{d^2y'}{dx^2} + X'y'^{\frac{m+1}{m}} + X'_1 y' = 0,$$

dans laquelle X'_1, X' sont liés à X_1, X par des relations connues et dont les intégrales se déduisent de celles de la proposée, et réciproquement.

Picard. — Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles par leurs valeurs sur un contour. (499-501).

La méthode d'approximations successives dont M. Picard a fait usage antérieurement (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, déc. 1888) pour intégrer certaines équations linéaires aux dérivées partielles, dont l'intégrale se trouve déterminée par la succession de ses valeurs le long d'un contour fermé, peut être appliquée avec succès à certaines équations non linéaires.

Telle est l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A e^{u},$$

où A désigne une fonction continue de x, y, positive dans la région du plan où restera le point (x, y)

L'auteur montre d'abord qu'il ne peut y avoir deux intégrales de cette équation continues ainsi que leurs dérivées dans un contour C, et prenant sur le contour la même succession de valeurs.

Cela posé, on peut évidemment admettre que ces valeurs se réduisent à zéro. Si l'on forme alors la suite d'équations

$$\Delta S_1 = A, \qquad \Delta S_2 = A e^{S_1}, \qquad \ldots, \qquad \Delta S_n = A e^{S_{n-1}},$$

les S à indices impairs forment une suite croissante et tendent vers une certaine limite représentant une fonction u de x, y; les S à indices pairs forment une suite décroissante et tendent vers une limite v. Les fonctions u et v s'annulent sur le contour et satisfont aux deux équations

$$\Delta u = A e^{v}, \qquad \Delta v = A e^{u}.$$

Les deux limites u et v ne coïncident pas toujours; mais elles le feront si le contour C est suffisamment petit. On obtient alors l'intégrale de l'équation (1) s'annulant le long de C sous forme de série

$$S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots.$$

Pour étendre la solution à un contour quelconque, M. Picard applique au problème actuel une méthode assez analogue au procédé alterné employé par M. Schwarz dans le cas de l'équation de Laplace.

Une méthode d'intégration semblable a celle qui vient d'être développée est applicable à l'équation plus générale

$$\Delta u = A e^{u} - B e^{-u},$$

où A et B sont des fonctions continues et positives de x, y ($A > B$). Pour une suite de valeurs données sur le contour C, la solution est unique et, pour obtenir l'intégrale qui s'annule tout le long de C, on formera les équations

$$\Delta S_1 = A - B, \qquad \Delta S_2 = A e^{S_1} - B e^{-S_1}, \qquad \ldots.$$

Si, pour tous les points intérieurs à C, on a

$$e^{2S_1} > \frac{B}{A},$$

les S à indices impairs et les S à indices pairs auront respectivement deux limites u et v, qui coïncideront lorsque le contour sera suffisamment petit.

Boussinesq. — Complément à la théorie des déversoirs en mince paroi qui s'étendent à toute la largeur du lit d'un cours d'eau : mise en compte des variations de la contraction qu'éprouve la nappe déversante, du côté de sa face inférieure. (515-520).

Brioschi. — Sur la dernière Communication d'Halphen à l'Académie. (520-522).

Dans sa dernière Communication à l'Académie « Sur la résolvante de Galois dans la division des périodes elliptiques par 7 », Halphen a exprimé les racines

de l'équation du septième degré en fonction des racines de l'équation modulaire jacobienne du huitième degré.

Les équations modulaires les plus simples, auxquelles M. Brioschi donne le nom de *jacobiennes,* sont celles dont les racines y s'expriment par la formule

$$y = \left(\mu\sqrt{\frac{\lambda\lambda'}{kk'}}\,\mu\right)^{\frac{2}{3}},$$

μ étant le multiplicateur, k, k' et λ, λ' ayant les significations habituelles.

Les racines de l'équation calculée par Halphen s'expriment, avec une légère modification, de la manière suivante :

$$x^2 = \frac{1}{(\sqrt{-7})^{\frac{3}{2}}}(y_\infty - y_0)(y_1 - y_3)(y_2 - y_6)(y_4 - y_5),$$

et l'on obtient la résolvante

$$x^5(x-1)\left(x + \frac{3+\sqrt{-7}}{2}\right)^3 = \alpha,$$

où

$$\alpha = \frac{12^3}{7^3\sqrt{-7}}\,J,$$

J étant l'invariant absolu.

M. Brioschi montre que cette résolvante peut être ramenée à la forme indiquée il y a longtemps par M. Hermite, au moyen de la formule de transformation

$$Z = (x-1)\sqrt{-7}.$$

Enfin, si l'on pose

$$Z = \xi^3\sqrt{-7},$$

la résolvante prendra la nouvelle forme

$$(\xi^3+1)\left[\xi^3 - \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^3\right] + \beta = 0,$$

dans laquelle

$$\beta = \frac{12}{(\sqrt{-7})^{\frac{1}{3}}}\,J^{\frac{1}{3}}.$$

Kœnigs. — Sur les surfaces dont le ds^2 peut être ramené de plusieurs manières au type de Liouville. (565-568).

L'élément linéaire d'une surface étant donné sous la forme

$$ds^2 = \lambda\,dx\,dy,$$

M. Darboux a montré que, si l'on peut trouver une fonction A de x et une fonction B de y vérifiant l'identité

$$(1)\qquad 2A\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} - 3A'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + A''\lambda = 2B\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3B'\frac{\partial\lambda}{\partial y} + B''\lambda,$$

et qu'on prenne pour nouvelles variables

$$(2)\qquad x' = \int\frac{dx}{\sqrt{A}},\qquad y' = \int\frac{dy}{\sqrt{B}},$$

le ds^2 sera ramené à la forme de Liouville

$$ds^2 = [f(x'+y') - g(x'-y')]\,dx'\,dy'.$$

Si l'on suppose que le ds^2 ait été donné sous la forme de Liouville

$$[A_1(x_1) - B_1(y_1)]\,dx\,dy,$$
$$x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = \frac{x-y}{2},$$

et qu'il puisse prendre une seconde forme de Liouville par la transformation (2), l'équation (1) qui détermine les *coefficients de transformation* A et B devient

$$(A_1 - B_1)(A'' - B'') + (A - B)(A''_1 - B''_1)$$
$$+ \frac{3}{\sqrt{2}}(A' - B')A'_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}(A' + B')B'_1 = 0.$$

Représentant par $\mathfrak{M}$ toute surface dont le ds^2 jouit de cette propriété, M. Kœnigs énonce, entre autres, les théorèmes suivants :

« I. Soient $(A_1 - B_1)\,dx\,dy$ le ds^2 d'une surface $\mathfrak{M}$, A et B un couple de transformation de ce ds^2; le ds^2 exprimé par

$$(A - B)\,dx_1\,dy_1$$

appartient aussi à une surface $\mathfrak{M}$, et A_1, B_1 constituent un couple de transformation de ce nouveau ds^2.

» II. On peut ajouter une même constante aux coefficients de transformation d'un ds^2, sans qu'ils cessent d'être les coefficients de transformation de ce ds^2. »

Ces ds^2 sont conjugués. Du ds^2 d'une surface $\mathfrak{M}$ donnée, on peut déduire sans calcul deux *familles* de ds^2 de surfaces $\mathfrak{M}$, savoir une famille dont fait partie le ds^2 et la famille des ds^2 conjuguées. On peut ensuite, au moyen de quadratures, en déduire toute une chaîne de ds^2 contenant de nouvelles constantes et convenant à des surfaces $\mathfrak{M}$.

Raffy. — Sur les éléments linéaires doublement harmoniques. (609-611).

M. Darboux a signalé ce problème : Trouver tous les éléments linéaires réductibles de deux manières à la forme de Liouville, et il l'a ramené à la recherche de quatre fonctions X de x, Y de y, φ de $x+y$ et f de $x-y$ satisfaisant à l'équation indéterminée

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(X'' - Y'')(\varphi - f) \\ &+ 3(X' - Y')\varphi' - 3(X' + Y')f' + 2(X - Y)(\varphi'' - f'') = 0. \end{aligned}\right.$$

M. Raffy remarque la réciprocité de cette équation : connaissant quatre fonctions $X(x)$, $Y(y)$, $\varphi(x+y)$, $f(x-y)$ qui la vérifient, on en obtiendra une nouvelle solution en prenant pour φ, f, X, Y respectivement les fonctions

$$X\left(\frac{x+y}{2}\right), \qquad Y\left(\frac{x-y}{2}\right), \qquad \varphi(x), \qquad f(y).$$

L'auteur signale une deuxième propriété de la même équation.

Étant donné l'élément doublement harmonique

$$[\varphi(x'+y')-f(x'-y')]\,dx'\,dy',$$

si l'on connaît deux transformations distinctes, savoir

$$dx=\frac{dx'}{\sqrt{X_1}},\qquad dy=\frac{dy'}{\sqrt{Y_1}}\qquad\text{et}\qquad d\xi=\frac{dx'}{\sqrt{\Xi_1}},\qquad d\eta=\frac{dy'}{\sqrt{H_1}}$$

qui lui donnent, l'une la forme harmonique S, l'autre la forme harmonique Σ, on passera de S à Σ en posant

$$d\xi=\frac{dx}{\sqrt{X}},\qquad d\eta=\frac{dy}{\sqrt{Y}},\qquad X=\frac{\Xi_1}{X_1},\qquad Y=\frac{H_1}{Y_1}.$$

On a donc, en adjoignant à X et à Y ainsi définis les valeurs de φ et de f qui figurent dans S, une nouvelle solution de l'équation (1).

En appliquant ce principe à l'élément linéaire des surfaces à courbure constante $\frac{dx'\,dy'}{(x'-y')^2}$, et en désignant par $R(x')$, $R_1(x')$ deux polynômes arbitraires du quatrième degré en x', on trouve pour X, Y les expressions

$$X(x)=\frac{R_1(x')}{R(x')},\qquad Y(y)=\frac{R_1(y')}{R(y')},$$

où x' est une fonction de x et y' une fonction de y données par les formules de transformation

$$dx=\frac{dx'}{\sqrt{R(x')}},\qquad dy=\frac{dy'}{\sqrt{R(y')}}.$$

On peut dire que ces expressions de X, Y fournissent par réciprocité la solution complète du problème de M. Darboux, abstraction faite des surfaces à courbure constante et des surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

Humbert. — Sur l'aire de certaines zones ellipsoïdales. (611-613).

Soit un cône de révolution circonscrit à un ellipsoïde d'axes $2a$, $2b$, $2c$; l'excès de l'aire latérale de ce cône limité à son sommet et à la courbe de contact sur l'aire de la calotte ellipsoïdale comprise à son intérieur peut être exprimé à l'aide des fonctions elliptiques; il est égal à

$$\pi\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{3}}\,(\zeta u+u)-\Sigma_0.$$

Σ_0 étant la demi-aire de l'ellipsoïde et u le plus petit argument positif défini en fonction des coordonnées x_1, z_1, du sommet du cône par les relations

$$x_1^2=\frac{a^2-b^2}{b^2(a^2-c^2)}\,\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{3}\left(\wp u+\frac{2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right),$$

$$z_1^2=\frac{b^2-c^2}{b^2(a^2-b^2)}\,\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{3}\left(\wp u+\frac{2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2}\right).$$

Pour le paraboloïde elliptique, l'excès de l'aire latérale d'un cône de révolution circonscrit sur l'aire de la calotte intérieure est une fonction algébrique des coordonnées du sommet du cône.

De la formule relative à la calotte ellipsoïdale, se déduit ce théorème de Géométrie, analogue à celui de Graves :

« Si l'on appelle *zone ellipsoïdale* la zone comprise sur l'ellipsoïde entre deux ellipses le long desquelles on peut circonscrire à la surface un cône de révolution, les aires de deux zones ellipsoïdales ont une somme ou une différence exprimable algébriquement lorsque les quatre plans qui limitent ces zones touchent un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde primitif. »

Mittag-Leffler. — Sur les invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène. (637-639).

Soit l'équation différentielle linéaire et homogène

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{P_n(x)}{P_0(x)} y = 0,$$

où P_0, P_1, ... sont des polynômes.

Si l'on désigne par $S_1(x-x_0)$, $S_2(x-x_0)$, ..., $S_n(x-x_0)$ des séries entières représentant un système fondamental autour du point ordinaire x_0, et si partant de ce point on y revient par un contour fermé, continu, ne se coupant pas lui-même, $S_m(x-x_0)$ prendra une nouvelle valeur

$$S'_m(x-x_0) = \alpha_{m1} S_1(x-x_0) + \ldots + \alpha_{mn} S_n(x-x_0);$$

les quantités α désignent des constantes indépendantes de la forme du contour tant qu'il varie sans passer par un point singulier.

Si l'on développe le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}+\omega & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn}+\omega \end{vmatrix},$$

suivant les puissances de ω

$$\Delta = \omega^n + V_1\omega^{n-1} + \ldots + V_{n-1}\omega + V_n.$$

on sait que les coefficients V_1, ..., V_n sont des invariants, indépendants non seulement de la forme du contour, mais de plus du point x_0 et du choix des intégrales fondamentales.

M. Mittag-Leffler donne, sous une forme nouvelle, l'expression de ces invariants.

Ils peuvent être développés en séries convergentes suivant les puissances entières et positives des coefficients des polynômes numérateurs $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, et de la quantité $\frac{2\pi i}{\lambda}$, λ désignant un nombre entier positif, qu'on peut choisir arbitrairement à condition de le prendre égal ou supérieur à un entier positif donné λ_0.

Les coefficients de ces séries, qui peuvent être déterminés par voie de récur-

rence, sont tous des fonctions rationnelles des affixes des points singuliers et de la quantité $e^{\frac{2\pi i}{\lambda}}$, avec des coefficients entiers.

Kœnigs. — Sur les surfaces dont le ds^2 est réductible de plusieurs manières à la forme de Liouville. (639-641).

Dans sa précédente Communication sur le même sujet, l'auteur a indiqué sommairement une méthode pour déduire d'un élément réductible à la forme de Liouville d'autres éléments jouissant de la même propriété. Tous les ds^2 qu'on peut déduire de cette manière du ds^2 du plan rentrent dans la forme générale

$$[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)]\, dx\, dy,$$

où l'on a posé

$$\Phi(z) = \frac{A\,\wp^4(z) + B\,\wp^3(z) + C\,\wp^2(z) + D\,\wp(z) + E}{\wp'^2},$$

A, B, C, D, E étant des constantes. Ces ds^2 reprennent la forme de Liouville si l'on prend pour variables

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{\wp(x) + h}} = \int \frac{d\wp}{\sqrt{(\wp + h)(4\wp^3 - g_2\wp - g_3)}}, \qquad y' = \ldots.$$

On retombe ainsi sur un type identique au type d'où l'on est parti, mais où les sept constantes A, B, C, D, E, g_2, g_3 ont des valeurs nouvelles. L'intégration de l'équation d'Euler donne les géodésiques de ces surfaces.

Raffy. — Sur certains éléments linéaires harmoniques. (661-663).

Solution d'un problème relatif aux éléments linéaires harmoniques, c'est-à-dire réductibles à la forme de Liouville :

Étant donné un élément linéaire $\lambda\, dx\, dy$, reconnaître si cet élément est réductible ou non à la forme

$$\varphi(x' + y')\, dx'\, dy'.$$

Si l'on pose

$$\omega = \log\lambda, \qquad e^{\theta} = \frac{\omega''_{xy}}{\lambda},$$

on parvient aux deux conditions, à la fois nécessaires et suffisantes,

$$\frac{\omega'_x}{\theta'_x} - \frac{\omega'_y}{\theta'_y} = \frac{\theta''_{x^2}}{\theta'^2_x} - \frac{\theta''_{y^2}}{\theta'^2_y} = \frac{1}{\theta''_{xy}}\left(\frac{\theta''_{x^2y}}{\theta'_x} - \frac{\theta''_{xy^2}}{\theta'_y}\right).$$

Phillips. — Instrument de mesure des éléments de l'élasticité. (687).

Cet appareil permet de mesurer simplement et exactement le coefficient d'élasticité et la limite d'allongement de tout corps métallique susceptible d'être étiré en fil. Son emploi n'exige pas, comme dans les méthodes ordinaires, la mesure des très petites déformations.

L'instrument n'est autre que l'ensemble d'un spiral et d'un balancier : le ressort spiral est formé de la substance à essayer et se terminé, à ses extrémités, par deux des courbes dont M. Phillips a établi la loi et donné des modèles dans son Mémoire sur le spiral réglant.

Humbert. — Sur certaines aires ellipsoïdales. (734-737).

1° Sur un ellipsoïde (E_1) homofocal et extérieur à un ellipsoïde (E), on prend une conique quelconque dont le plan passe par le centre, et l'on circonscrit à cette conique et à (E) une développable : l'excès de l'aire de cette développable, limitée à la conique et à l'ellipsoïde (E), sur l'aire ellipsoïdale comprise sur (E) à son intérieur, est constante.

2° L'aire comprise, sur un ellipsoïde, entre les deux boucles de la courbe de contact d'une développable circonscrite à cette surface et à une sphère extérieure est égale (à une quantité algébrique près) à celle d'une zone ellipsoïdale à bases parallèles, la zone étant définie algébriquement sur l'ellipsoïde en fonction de la sphère.

Lelieuvre. — Sur les lignes asymptotiques et les systèmes conjugués tracés sur une surface. (792-794).

Dans une précédente Communication, M. Lelieuvre s'est posé ce problème : Parmi les surfaces A pour lesquelles les coordonnées d'un point, exprimées avec deux paramètres t, μ sont rationnelles en μ, quelles sont celles pour lesquelles l'intégrale générale μ de l'équation des asymptotiques n'a que des points critiques fixes?

La forme de cette équation montre qu'alors, pour les conjuguées des lignes $t =$ const., μ est donnée par une équation de Riccati. On est donc conduit à rechercher, parmi les surfaces A, celles sur lesquelles les lignes $\mu =$ const. et $t =$ const. sont conjuguées, problème que l'auteur résout dans le cas où les lignes $t =$ const. sont planes.

La solution de ce problème entraîne celle de quelques autres questions; par exemple, déterminer les surfaces admettant deux systèmes conjugués plans, ou celles qui enveloppent des cônes le long des lignes planes $t =$ const.

Quiquet. — Généralisation de la loi de Makeham. (794-797).

Exprimer seulement à l'aide de n variables, indépendantes de x, la probabilité que, dans x années, un groupe de $n+p$ individus existera encore tout entier.

Si l'on désigne par $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ ces n variables, par $a, b, \ldots, l$, les âges de $n+p$ individus (qu'on assujettit à des relations convenables avec $\alpha, \beta, \ldots, \theta$), on doit avoir

$$\frac{\varphi(a+x)}{\varphi(a)}\,\frac{\varphi(b+x)}{\varphi(b)}\cdots\frac{\varphi(l+x)}{\varphi(l)} = G(\alpha, \beta, \ldots, \theta, x).$$

La fonction $\varphi(z)$, qu'il s'agit de déterminer, représente le nombre des vivants à l'âge z pour un nombre donné de naissances.

Or, si l'on pose

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z).$$

$\psi(z)$ est, comme le montre M. Quiquet, donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\lambda\psi'(a) + \mu\psi''(a) + \ldots + \rho\psi^{(n+1)}(a) = 0.$$

En faisant $n = 1$, on retrouve la loi de Gompertz, celle de Makeham et aussi deux autres lois très simples précédemment signalées par l'auteur.

Lorsque $n = 2$, on trouve pour $\varphi(z)$ diverses expressions à quatre, cinq, et même six constantes, qui permettent de dresser plus exactement que par les formules déjà connues une Table de mortalité déduite d'observations directes.

Markoff. — Sur les séries $\sum \frac{1}{k^2}$, $\sum \frac{1}{k^3}$. (934-935).

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^3} = \sum_1^\infty (-1)^{k-1} \frac{1^3.2^3\ldots(k-1)^3}{1.2.3\ldots(3k-2)} \left[\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{5}{12k(3k-1)}\right],$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{5}{3} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \frac{1^3.3^3.5^3\ldots(2k-1)^3}{1.2.5.7\ldots(6k-1)} \left[\frac{1}{4k^2} + \frac{5}{(6k+1)(6k+3)}\right].$$

Les séries qui forment les seconds membres sont très convergentes. La première a permis à M. Markoff de calculer avec vingt décimales exactes.

$$2 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots = 1,2020569031595942854 0.$$

Ocagne (*D'*). — Deux théorèmes généraux sur les trajectoires et les enveloppes de points et de droites mobiles dans un plan. (959-960).

Si une droite issue d'un point M coupe une courbe C au point P sous l'angle θ, on dira que MP est une *distance sous l'angle* θ du point M à la courbe C.

De même, si une droite perpendiculaire à la droite D au point A coupe la courbe C au point P sous l'angle θ, on dira que AP est une *distance sous l'angle* θ de la droite D à la courbe C.

Cela posé, voici les deux théorèmes démontrés par M. d'Ocagne :

1° Si les distances sous l'angle θ, $MP_1 = l_1$, $MP_2 = l_2$, ..., $MP_n = l_n$ d'un point M à une ou plusieurs courbes C sont liées par la relation

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

et si les projections des centres de courbure $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ répondant à $P_1, P_2, \ldots, P_n$, respectivement sur $MP_1, MP_2, \ldots, M_n$, sont $H_1, H_2, \ldots, H_n$, la normale à la trajectoire du point M passe par le centre de gravité des masses $\frac{1}{MH_1}\frac{d\varphi}{dl}, \frac{1}{MH_2}\frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{1}{MH_n}\frac{d\varphi}{dl_n}$ respectivement appliquées en $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.

2° Si les distances sous l'angle θ, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ d'une droite à une ou plusieurs courbes C sont liées par la relation

$$\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 0,$$

la normale à l'enveloppe de la droite D passe par le centre de gravité des

masses $\frac{d\varphi}{dl_1}, \frac{d\varphi}{dl_2}, \ldots, \frac{d\varphi}{dl_n}$ respectivement appliquées aux centres de courbure correspondants des courbes C.

Lorsque $\theta = 0$, ou $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retrouve des théorèmes déjà connus.

Peano. — Sur une formule d'approximation pour la rectification de l'ellipse. (960-961).

Réclamation de priorité à propos de la formule approchée

$$E = \pi\left(3\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right),$$

récemment indiquée par M. Boussinesq pour la rectification de l'ellipse.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE [1].

Tome XVII, 1889.

Lucas (F.). — Statique des polynômes. (17-69).

Soit un polynôme

$$F(z) = H(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)\ldots(z - z_p)$$

de degré p relativement à la variable complexe $z = x + iy$. Les p racines z_1, z_2, ..., z_p déterminent un système de p points qu'on peut matérialiser par la pensée en supposant que chacun d'eux repousse le point variable N en raison inverse de la distance.

Les projections P et Q, sur les axes, de l'action totale des points-racines sont fournies par la relation

$$P - iQ = \frac{F'(z)}{F(z)}.$$

La condition d'équilibre pour le point N est que ce point coïncide avec un des points-racines de la dérivée du polynôme $F(z)$.

On déduit de là que tout contour fermé convexe environnant les racines d'une équation algébrique environne aussi les racines de l'équation dérivée. Lorsque tous les points-racines sont en ligne droite, cette droite contient aussi les racines de l'équation dérivée; entre deux racines consécutives de l'équation proposée, il y a toujours une racine de la dérivée. On retrouve ainsi le théorème de Rolle.

Si l'on désigne par R le module de $F(z)$, le potentiel de l'action des p points-racines a pour valeur $\log R$.

---

[1] Voir *Bulletin*, XIV, p. 203.

Les courbes de niveau sont des cassinoïdes ayant pour foyers les points-racines.

Les lignes de force (stelloïdes) ont p branches infinies hyperboliques partant respectivement des points-racines et dont les asymptotes passent toutes par le centre des moyennes distances de ces points en figurant une espèce de rose des vents.

Si l'on met le quotient $\frac{F'(z)}{F(z)}$ sous la forme $\frac{1}{k}e^{-\gamma i}$, l'équation

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{k}e^{-\gamma i}$$

donne, pour chaque système des valeurs de k et de γ, p valeurs de z formant un *groupe polaire*.

Tous les points d'un groupe polaire sont également actionnés, en intensité et en direction, par des points racines de $F(z)$.

Il peut arriver qu'un groupe polaire contienne un point-racine (ombilic). L'action algébrique d'un groupe polaire sur un ombilic est constante en grandeur et direction quel que soit ce groupe; cette action est toujours égale à celle du groupe fondamental des points-racines.

Les courbes de degré $2p$ définies par l'équation $P^2 + Q^2 = \text{const.}$ sont des *lignes isodynamiques*. Elles ont pour trajectoires orthogonales un système de lignes correspondant aux actions parallèles.

Les lignes isodynamiques peuvent avoir des points singuliers ou nœuds. Ces nœuds sont aussi ceux des lignes correspondant aux actions parallèles. Ils coïncident avec les ombilics.

Toute ligne isodynamique peut être engendrée par le mouvement d'un groupe polaire; et toute trajectoire orthogonale de lignes isodynamiques peut être engendrée par les mouvements simultanés de deux groupes polaires correspondant à des actions de sens opposés.

Chacune de ces trajectoires orthogonales (de degré $2p - 1$) passe par les points-racines de $F(z)$ et par les points-racines de $F'(z)$; elle établit donc un enchaînement entre les points de ces deux groupes polaires principaux; l'auteur lui donne pour ce motif le nom de ligne *halysique*.

Toute ligne halysique a une seule branche infinie laquelle est hyperbolique et possède une asymptote parallèle aux actions algébriques exercées sur les points de la ligne halysique. Cette asymptote passe toujours par le centre des moyennes distances des points-racines de $F(z)$.

L'auteur fait connaître un grand nombre de propriétés des lignes halysiques.

Il termine par des considérations sur l'assimilation des points-racines à des électrodes.

Si l'on assimile les points-racines à des électrodes (positives) déversant toutes la même quantité d'électricité sur le plan considéré comme une plaque conductrice infinie, les courbes de niveau seront les cassinoïdes de degré $2p$ signalées ci-dessus, ayant pour foyers les points-racines. On peut tracer les cassinoïdes sur la plaque en employant deux fils reliés à un galvanomètre, la pointe de l'un étant maintenue fixe sur un point de la plaque, tandis qu'on déplacerait la pointe de l'autre de manière à n'avoir pas de déviation (méthode de Kirchhoff).

Les points nodaux des courbes de niveau coïncident avec les points-racines du polynôme dérivé $F'(z)$.

Ces courbes tendant rapidement vers une circonférence, on prendra pour électrode négative le contour tout entier de la plaque.

Comme tous les points-racines de $F'(z)$ doivent être à l'intérieur de la petite circonférence qui entoure tous les points-racines de $F(z)$, il suffira pour la recherche des premiers de tracer des arcs de courbes équipotentielles qui se trouvent dans cette circonférence.

Si donc on connaît les points-racines d'un polynôme $F(z)$, l'emploi des courants voltaïques permet d'obtenir sans calculs les points-racines de $F'(z)$.

Frolov. — Égalités à deux degrés. (69-83).

L'auteur dit que deux groupes de termes $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ forment une égalité à deux degrés lorsqu'on a simultanément

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2,$$

et il désigne une telle égalité par la notation abrégée

$$a_1 a_2 \ldots a_n \underline{|} b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Les égalités à deux degrés jouissent des propriétés suivantes :

On peut augmenter ou diminuer d'une même quantité tous les termes d'une égalité; les retrancher d'une même quantité; les multiplier ou diviser par une même quantité; additionner plusieurs égalités.

Parmi les égalités à deux degrés, il faut distinguer les égalités *semblables*, c'est-à-dire celles où les différences des termes correspondants (supposés en même nombre) sont proportionnelles les unes aux autres.

On peut additionner les termes correspondants des égalités semblables; multiplier entre eux les termes correspondants de deux égalités semblables; ajouter aux termes de deux groupes d'une telle égalité une suite de quantités déterminées.

Ces théorèmes fournissent divers moyens pour former des égalités à deux degrés.

L'auteur se propose ensuite de répartir en deux groupes égaux tous les nombres consécutifs d'une progression arithmétique sans omettre ni répéter aucun de ces nombres.

Partant de l'égalité à deux degrés

$$1, 4, 6, 7 \underline{|} 2, 3, 5, 8,$$

il obtient, en augmentant tous les termes de 8,

$$9, 12, 14, 15 \underline{|} 10, 11, 13, 16.$$

En additionnant ces égalités de deux manières, on en obtient deux autres représentant la répartition des seize premiers nombres en deux groupes égaux.

Augmentant encore de 8 les termes de l'égalité primordiale, et répétant le même procédé, on arrive à répartir les $8m$ premiers nombres de 2^{m-1} manières différentes.

Appliquant un procédé analogue à l'égalité

$$1, 3, 7, 8, 9, 11 \underline{|} 2, 4, 5, 6, 10, 12,$$

dont on augmente tous les termes de 12, on parvient à répartir en deux groupes égaux toute progression de $4m$ nombres consécutifs.

Issaly (l'abbé). — Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces. (84-101).

Une *pseudo-surface* est un lieu géométrique produit par deux systèmes de courbes variables ne s'entrecoupant qu'aux infiniment petits du second ordre près.

Un tel lieu ne peut être représenté par une équation finie entre trois variables x, y, z; mais il peut l'être par une équation différentielle

$$dz = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$$

jointe à la condition de non-intégrabilité $\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \neq 0$.

Toute surface peut être considérée comme une limite commune à une double série de pseudo-surfaces infiniment voisines.

En tout point d'une pseudo-surface, on peut concevoir une surface auxiliaire osculatrice F correspondant à la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho''}\right)$ des courbures corrélatives des lignes coordonnées.

Cette surface est étroitement liée aux plans principaux des pseudo-surfaces qui lui sont tangentes.

L'objet que se propose l'auteur est l'extension aux pseudo-surfaces des principales formules proposées comme mesure de la courbure des surfaces.

La courbure d'une pseudo-surface sera par définition la courbure de la surface F correspondante. Mais, abandonnant la mesure de la courbure proposée par Gauss, l'auteur se place, pour définir la courbure, à un point de vue mieux approprié à l'objet qu'il a en vue :

Que l'on porte sur la normale en un point de la surface F des longueurs égales aux courbures des diverses sections normales, et que sur chacune de ces longueurs comme diamètre, dans le plan de la section normale correspondante, on décrive un demi-cercle. On engendre une surface (*hémicyclide*) qui joue le rôle d'une indicatrice convexe au point considéré de la pseudo-surface.

Ces indicatrices (toujours fermées) peuvent présenter trois variétés. Si l'on appelle R_1, R_2 les rayons de courbure principaux de ces trois variétés d'indicatrices, leurs aires sont respectivement

$$\frac{\pi}{8}\left(\frac{3}{R_1^2} + \frac{2}{R_1 R_2} + \frac{3}{R_2^2}\right),\quad \frac{\pi}{8}\left(\frac{3}{R_1^2} - \frac{2}{R_1 R_2} + \frac{3}{R_2^2}\right),\quad \frac{\pi}{8}\,\frac{3}{R_1^2}.$$

Ce sont ces trois expressions qui (suivant les cas) mesurent la courbure des pseudo-surfaces.

On pourrait aussi représenter la courbure par le volume de l'indicatrice. Cette représentation est particulièrement simple dans le cas des pseudo-surfaces minima, où les trois variétés de volumes en question se réduisent à deux, ayant pour valeurs respectives $\frac{1}{9R_1^3}$ et $\frac{5}{96}\,\frac{\pi}{R_1^3}$.

Berdellé. — Démonstration élémentaire d'un théorème énoncé par M. Catalan. (102).

Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs.

Goursat. — Sur une propriété des surfaces minima. (102-104).

Étant donnée une surface minima quelconque, sur chaque normale on porte, à partir du pied M_0 de la normale et de part et d'autre de ce point, deux longueurs M_0M_1 et M_0M_2, la longueur M_0M_1 restant constante quand on se déplace suivant une ligne asymptotique de l'un des systèmes et variant suivant une loi quelconque, quand on passe d'une ligne asymptotique à une autre du même système; les points M_1, M_2 décrivent deux surfaces S_1, S_2 telles qu'un pinceau de normales à la surface S découpe sur ces deux surfaces des aires équivalentes.

On peut déduire de cette propriété la solution de certains problèmes de déblais et remblais.

Laisant. — Sur un déterminant remarquable (104-107).

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ -y & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y & x \end{vmatrix}$$

est identique à

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + a_m y^m.$$

Cette remarque permet donc d'écrire, sous forme de déterminant, soit une forme binaire de degré quelconque, soit un polynôme entier en x (en faisant $y = 1$).

M. Laisant indique une loi intéressante pour former les dérivées partielles successives de ce déterminant.

Ocagne (d'). — Sur les nombres de Bernoulli. (107-109).

Dans son Mémoire *Sur une classe de nombres remarquables* (*American Journal of Mathematics*, t. IX, p. 380), M. d'Ocagne a considéré une suite de nombres définis par les relations

$$k_m^1 = 1, \qquad k_m^m = 1, \qquad k_m^p = p k_{m-1}^p + k_{m-1}^{p-1},$$

d'où résulte pour expression générale de ces nombres

$$k_m^p = \frac{p^m - C_p (p-1)^m + C_p^2 (p-2)^m - \ldots + (-1)^{p-1} C_{p-1}^p}{1.2\ldots p},$$

les C désignant les nombres de combinaisons.

Les nombres de Bernoulli sont liés à ces nombres k_m par la formule

$$B_m = \frac{k_m^1}{2} - \frac{1!\,k_m^2}{3} + \frac{2!\,k_m^3}{4} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!\,k_m^m}{m+1},$$

qui devient, par substitution de la valeur ci-dessus de k_m,

$$B_m = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^{\mu+1} \mu^{m-1} \sum_{\lambda=\mu}^{\lambda=m} \frac{C_{\lambda-1}^{\mu-1}}{\lambda+1}.$$

Bioche. — Sur les courbes de M. Bertrand. (109-112).

On peut déterminer deux courbes, l'une à courbure constante, l'autre à torsion constante, de façon que les tangentes à ces courbes soient deux à deux parallèles. Sur la développable des plans déterminés par ces couples de tangentes les lieux des points qui divisent les génératrices dans un rapport constant sont des courbes de M. Bertrand, c'est-à-dire des courbes telles que les normales principales de chacune d'elles soient normales principales à une autre courbe.

Chailan. — Mouvement d'un point pesant sur une sphère. Détermination, à l'aide des conditions initiales, des cas où le mobile quitte la sphère. (112-118).

Un point pesant se meut à l'intérieur d'une sphère de rayon l. Il est lancé avec une vitesse initiale v_0 à partir d'un point situé à une distance z_0 au-dessus du plan horizontal xy passant par le centre de la sphère.

Premier cas. — Le mobile est au-dessus du plan xy.

Il quittera forcément la sphère si

$$v_0^2 + g z_0 < 0.$$

Il la quittera conditionnellement (c'est-à-dire pour les directions initiales supérieures à un certain angle) si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > -g z_0.$$

Deuxième cas. — Le mobile est au-dessous du plan xy, mais au-dessus du plan $z = \frac{2}{3} l\sqrt{2}$.

Il quittera conditionnellement la sphère si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > 2g z_0.$$

Troisième cas. — Le mobile est au-dessous du plan $z = \frac{2}{3} l\sqrt{2}$.

Il quittera forcément la sphère si

$$\frac{g}{2}\left(7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}\right) > v_0^2 > \frac{g}{2}\left(7z_0 - 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}\right).$$

Il la quittera conditionnellement si

$$\frac{g}{2}\left(7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}\right) > v_0^2 > 2g z_0,$$

ou si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > \frac{g}{2}\left(7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}\right).$$

Antomari. — Sur une propriété caractéristique des lignes géodésiques d'un cône. (118-124).

Dans toute géodésique d'un cône, le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est une fonction linéaire et entière de l'arc de la ligne géodésique, et réciproquement toute courbe qui jouit de cette propriété est une géodésique d'un cône.

Cette proposition, que l'auteur établit en considérant les lignes géodésiques d'un cône comme les arêtes de rebroussement des développables circonscrites à une sphère, peut être rattachée à un ordre d'idées plus général se rapportant aux lignes géodésiques d'une surface développable :

Si l'on appelle ρ le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de la développable, S l'arc de la géodésique, R_1 et R_2 ses deux rayons de courbure, ω son angle avec la génératrice qui passe par un de ses points, on a

$$S - S_0 = C\frac{R_1}{R_2} + \int d\omega \frac{\int \rho \sin\omega \, d\omega}{\sin^2\omega}.$$

Si l'arête de rebroussement est une courbe dont la première courbure est constante, il vient

$$S - S_0 = C\frac{R_1}{R_2} + a\frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{R_2},$$

et dans le cas du cône, on trouve la formule

$$S - S_0 = C\frac{R_1}{R_2}.$$

Teixeira (*G.*). — Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. (125-131).

En profitant des recherches d'Ampère sur les équations aux dérivées partielles, M. Imschenetsky a fait voir que l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N désignent des fonctions de x, y, z, p, q, peut être transformée en une équation linéaire quand on connaît une intégrale primitive particulière avec trois constantes arbitraires.

M. Gomez Teixeira montre comment on arrive aux mêmes résultats par des considérations directes.

Picard. — Sur certaines expressions quadruplement périodiques. (131-142).

On sait que, $f(e^x)$ étant une fonction rationnelle de e^x, la série

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f(e^{x+m\omega}),$$

si elle est convergente, représente une fonction doublement périodique aux périodes $2\pi i$ et ω.

L'extension se présente d'elle-même quand on passe au cas de deux variables. Soit $f(e^x, e^y)$ une fonction rationnelle de e^x et e^y; on forme la série double

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(e^{x+m\alpha+n\beta}, e^{y+m\alpha'+n\beta'}):$$

si elle est convergente, on aura une fonction quadruplement périodique de x et y.

Ces séries, dont on n'avait jusqu'à présent donné aucun exemple effectif, ne sont qu'un cas particulier des *fonctions hyperabéliennes* de M. Picard.

M. Picard est conduit, par le développement de la théorie de ces fonctions, à envisager la série double

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{a^m b^n}{(ua^m b^n + 1)^2} \frac{a'^m b'^n}{(va'^m b'^n - 1)^2},$$

a, b, a', b' étant des quantités positives quelconques.

Il montre qu'elle est convergente pour toute valeur de u, v à l'exception des valeurs réelles et négatives.

Cette série permet d'en former une infinité d'autres jouissant des mêmes propriétés. Il suffit de prendre deux fonctions rationnelles $R(u)$ et $R_1(v)$ dont tous les pôles soient situés sur la partie négative de l'axe des quantités réelles et qui restent finies respectivement pour $u = 0$, $u = \infty$ et pour $v = 0$, $v = \infty$, et de construire le développement

$$F(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} R(a^m b^n u) R_1(a'^m b'^n v) \frac{ua^m b^n}{(1 + ua^m b_n)^2} \frac{va'^m_n b'^n}{(1 + va'^m b'^n)^2}.$$

Si maintenant l'on fait

$$R = R_1 = 1, \qquad v = e^y, \qquad a = e^\alpha, \qquad b = e^\beta, \qquad a' = e^{\alpha'}, \qquad b' = e^{\beta'},$$

la série précédente devient

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{x+m\alpha+n\beta}}{(1 + e^{x+m\alpha+m\beta})^2} \frac{e^{y+m\alpha'+n\beta'}}{(1 + e^{y+m\alpha'+n\beta'})^2}.$$

Cette *expression* admet quatre couples de périodes dont le Tableau est

$$\frac{x \mid 2\pi i,\ 0,\ \alpha,\ \beta}{y \mid 0,\ 2\pi i,\ \alpha',\ \beta'}.$$

Mais elle ne représente pas une fonction quadruplement périodique se comportant pour toute valeur finie de x et y comme une fonction rationnelle. Elle n'est pas définie pour les valeurs de x et y dans lesquelles le coefficient de la partie imaginaire est égal à un multiple impair de π. Ces surfaces de singularités essentielles empêchent le prolongement analytique de l'expression $\varphi(x, y)$.

Il s'agit maintenant de développer la fonction $\varphi(x, y)$ en série trigonométrique. M. Picard traite d'abord le cas d'une fonction d'une seule variable aux

2ud Part

périodes ω (réelle) et $2\pi i$

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{x+m\omega}}{(1+e^{x+m\omega})^2}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$F(x) = \sum A_p \cos \frac{2p\pi x}{\omega}.$$

Par une analyse très élégante, où il est amené à calculer l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos ax\, dx,$$

qu'il trouve égale à $\frac{\pi a i}{2 \sin \pi a i}$, l'auteur obtient l'expression suivante des coefficients A_p :

$$A_p = \frac{4\pi a}{\omega(e^{\pi a} - e^{-\pi a})}.$$

Les fonctions quadruplement périodiques $\varphi(x, y)$ peuvent aussi (après une substitution linéaire effectuée sur les variables) être converties en séries trigonométriques

$$\sum\sum A_{p,q} \cos \frac{2p\pi x}{\omega} \cos \frac{2q\pi y}{\omega'} + B_{p,q} \sin \frac{2p\pi x}{\omega} \sin \frac{2q\pi y}{\omega}.$$

Les coefficients $A_{p,q}$ $B_{p,q}$ sont fournis par les formules remarquables

$$A_{p,q} = \frac{8}{\omega\omega'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}\left(\frac{A}{e^A - e^{-A}}\frac{B}{e^B - e^{-B}} + \frac{A'}{e^{A'} - e^{-A'}}\frac{B'}{e^{B'} - e^{-B'}}\right),$$

$$B_{p,q} = \frac{8}{\omega\omega'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}\left(-\frac{A}{e^A - e^{-A}}\frac{B}{e^B - e^{-B}} + \frac{A'}{e^{A'} - e^{-A'}}\frac{B'}{e^{B'} - e^{-B'}}\right),$$

où l'on a posé

$$A = \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\left(\frac{p\beta'}{\omega} - \frac{q\alpha'}{\omega'}\right), \qquad B = \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\left(-\frac{p\beta}{\omega} + \frac{q\alpha}{\omega'}\right),$$

$$A' = \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\left(\frac{p\beta'}{\omega} + \frac{q\alpha'}{\omega'}\right), \qquad B' = \frac{-2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\left(\frac{p\beta}{\omega} + \frac{q\alpha}{\omega'}\right).$$

Les séries obtenues présentent une grande analogie avec les séries trigonométriques d'une seule variable que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques.

Jonquière. — Note sur la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^s}$.

Dans un Mémoire présenté en 1888 à l'Académie des Sciences de Stockholm, l'auteur a étudié les séries de la forme $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^s}$ en supposant que s est un entier positif.

En appelant $\zeta(s, x)$ la fonction qui coïncide avec cette série dans le cercle de centre $x = 0$ et de rayon unité et en désignant par $\chi(s, x)$ la fonction de Bernoulli définie par l'équation

$$\frac{z e^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \chi(s, x) z^s,$$

il a démontré la relation

$$(1) \qquad \zeta(s, x) + (-1)^s \zeta\left(s, \frac{1}{x}\right) = -(2i\pi)^s \chi\left(s, \frac{\log x}{2i\pi}\right),$$

qui permet de prolonger analytiquement la fonction ζ dans tout le plan des x.

Il se propose maintenant de définir et d'étudier la fonction $\zeta(s, x)$ d'une manière générale, c'est-à-dire pour des valeurs quelconques des variables s et x.

Or, la relation

$$\zeta(s, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x z^{s-1}\, dz}{e^z - x},$$

déduite de l'identité connue

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-nz} z^{s-1}\, dz,$$

définit la fonction ζ pour toutes les valeurs de x; mais l'intégrale n'a de sens que si la partie réelle de s est positive. On lèvera cette restriction en définissant ζ par la formule

$$\xi(s, x) = \frac{e^{-i\pi s}}{2i\pi} \Gamma(1 - s) \int_l \frac{x z^{s-1}\, dz}{e^z - z},$$

l'indice l désignant un lacet partant du point $+\infty$ et contournant le point zéro dans le sens direct.

On peut de cette expression déduire une équation semblable à l'équation (1) et plus générale, d'ailleurs signalée déjà par M. Lerch,

$$\zeta(s, x) + e^{i\pi s} \zeta\left(s, \frac{1}{x}\right) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} e^{\frac{i\pi s}{2}} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{\left(r + \frac{\log x}{2i\pi}\right)^{1-s}}.$$

Mais la série qui figure au second membre n'est convergente que si la partie réelle de s est négative. Il faut encore lever cette restriction. L'auteur y parvient en généralisant la fonction χ de Bernoulli au moyen de la formule

$$\chi(s, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{e^{xz} z^{-s}\, dz}{e^z - 1},$$

où L désigne un lacet qui part du point $-\infty$ et entoure l'origine dans le sens direct. La relation qui précède peut alors être remplacée par la formule tout à fait générale

$$\zeta(s, x) + e^{i\pi s} \zeta\left(s, \frac{1}{x}\right) = (2\pi)^s \chi\left(s, \frac{\log x}{2i\pi}\right) e^{\frac{i\pi s}{2}}.$$

M. Jonquière fait une étude spéciale des fonctions $\chi(s, x)$. Parmi les pro-

priétés qu'il signale, mentionnons celle-ci : la dérivée d'une telle fonction par rapport à x est aussi une fonction de Bernoulli généralisée.

Kœnigs. — Sur les lois de force centrale, fonction de la distance, pour laquelle toutes les trajectoires sont algébriques. (153-155).

Les seules lois de forces centrales fonctions de la distance pour lesquelles les trajectoires sont toutes algébriques sont l'attraction et la répulsion en raison inverse du carré de la distance, et l'attraction et la répulsion proportionnelles à la distance.

La démonstration de ce théorème est curieuse, en ce sens que les deux cas de l'attraction et de la répulsion doivent y être traités d'une manière tout à fait différente.

Perott. — Sur une proposition empirique énoncée au *Bulletin*. (153-155).

L'auteur fournit un exemple numérique qui met en défaut une loi arithmétique énoncée, dubitativement d'ailleurs, par M. Catalan.

Pellet. — Sur les formes réduites suivant un module premier. (156-167).

La théorie des fonctions entières réduites suivant un module premier p offrant la plus grande analogie avec celle des équations abéliennes, l'auteur met à profit les ressources que lui offre cette dernière pour la théorie algébrique des équations.

Voici, dans cet ordre d'idées, un théorème fécond en conséquences :

$\Theta(x)$ étant une fonction rationnelle à coefficients entiers, soit μ le nombre de valeurs distinctes qu'elle prend lorsqu'on remplace x successivement par les m racines d'une congruence irréductible (mod p) et de degré m; μ est un diviseur de m et ces μ valeurs sont racines d'une congruence irréductible.

Comme première application de ce théorème, M. Pellet indique la suivante : Étant donnée la congruence

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

e désignant l'exposant du produit de ses racines, 1° si λ est un facteur premier de e, ne divisant pas $\frac{p-1}{2e}$, $F(x^\lambda)$ est irréductible (mod p); 2° si λ divise $\frac{p-1}{e}$, $F(x^\lambda)$ se décompose en λ facteurs irréductibles de même degré et d'exposant égal; 3° si λ divise $p-1$ sans diviser e, $F(x^\lambda)$ se décompose encore en λ facteurs irréductibles de même degré, mais d'exposants inégaux.

Comme seconde application, $F(x)$ étant une fonction irréductible (mod p), de degré ν, dans laquelle le coefficient du terme de degré $\nu-1$ n'est pas congru à 0 (mod p), la fonction $F(x^p - x)$ est irréductible.

L'autre consacre la dernière partie de son travail à l'étude des périodes des racines de l'unité.

Laquière. — Sur un problème de Géométrie cinématique. (167-169).

Solution, par des considérations de Géométrie infinitésimale, d'une question que M. Laisant avait traitée déjà par la théorie des équipollences (*Bulletin Soc. math.*, 1888).

Laisant. — Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points dont trois sont fixes. (169-170).

Ocagne (d'). — Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites. (171-175).

M. d'Ocagne appelle *isométrique d'une courbe k par rapport à un système de courbes* (*c*) toute courbe telle que son arc compris entre deux quelconques des courbes du système (*c*) soit égal à l'arc de la courbe *k* compris entre les mêmes courbes.

En particulier, une courbe est isométrique d'une droite D par rapport aux droites issues d'un point O lorsque l'arc de cette courbe compris entre deux quelconques des droites issues de O est égal au segment de la droite D compris entre ces droites.

Si l'on prend pour origine le point O, pour axe des x la perpendiculaire abaissée de O sur la droite D, l'axe Oy étant parallèle à D, le problème de la recherche des isométriques de D est résolu par les formules

$$x = \frac{C + au}{\sqrt{p(u)}}, \qquad (g_2 = 1, g_3 = 0),$$

$$y = \frac{(C + au)[a\,p'(u) - 2(C + au)\,p(u)]}{2a\,p(u)},$$

a désignant la distance du point O à la droite D.

Jeffery. — Sur l'identité des nœuds d'une courbe du quatrième ordre et de ses contravariants quartique et sextique. (176-182).

L'équation tangentielle d'une quartique, en fonction de ses contravariants S et T, étant

$$S^3 - 27T^2 = 0,$$

on est conduit à inférer de là que les courbes auxiliaires auront des nœuds si la quartique proposée en a elle-même.

De plus les courbes S = o et T = o sont respectivement les enveloppes d'une droite qui coupe la quartique primitive en quatre points formant une proportion équiharmonique et harmonique. Dans le voisinage d'un nœud, les points d'intersection se rapprochent de plus en plus, jusqu'à ce que trois d'entre eux coïncident ou deviennent infiniment voisins, sur une tangente au nœud.

L'auteur a vérifié par le calcul l'existence et l'identité de ces nœuds dans les cas séparés des quartiques uninodales, binodales et trinodales. Mais il y a lieu de distinguer : bien que les tangentes aux nœuds des trois courbes (quartique, S et T) soient identiques, la courbure des branches peut être différente.

Ordinairement pour la quartique et pour S il n'y a pas d'inflexion; mais il y a deux inflexions en chaque nœud de T. En particulier, les contravariants S et T des quartiques bicirculaires sont doués de foyers respectivement doubles et triples.

Papelier. — Application du Calcul des quaternions à l'étude des surfaces du second ordre. (182-204).

Dans l'étude des quadriques par les quaternions, Hamilton et les auteurs qui l'ont suivi, MM. Tait et Laisant, se sont bornés à considérer les surfaces à centre unique.

M. Papelier montre que le Calcul des quaternions se prête aisément à l'étude des quadriques en général et qu'il permet, comme la Géométrie analytique à trois dimensions, de classer les surfaces du second ordre.

Catalan. — Extrait d'une Lettre. (205-206).

L'auteur fait connaître à la Société une démonstration élémentaire d'un théorème qu'il avait établi par des considérations d'Arithmétique supérieure :

Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs. Cette démonstration lui a été communiquée par M. Berdellé, dont il simplifie le raisonnement.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ [1]. — 3e série.

Tome IX; 1890.

Laisant (*C.-A.*). — Remarques au sujet du théorème de Carnot. (5-20).

Ce théorème est relatif aux intersections des côtés d'un polygone avec une courbe algébrique plane. Simplification des démonstrations habituelles. Extension nouvelle à l'espace et établissement d'un certain nombre de propositions corrélatives.

QUESTIONS PROPOSÉES : 1591, 1592. (20).

Bertrand (*J.*). — Principes généraux sur le choix des unités. (21-35).

Extrait du Chap. XIII des *Leçons sur la théorie mathématique de l'Électricité*. L'article est accompagné d'une Note de la Rédaction que nous croyons devoir reproduire :

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XIV$_2$, p. 142.

« Nous croyons être agréable et utile à nos lecteurs en leur offrant cet extrait d'un Livre dont la lecture est si attrayante, que son auteur semble l'avoir écrit d'un trait de plume et comme en se jouant, malgré les difficultés réelles que le sujet comporte et qui se trouvent élucidées avec cet art incomparable dont M. Bertrand possède le secret. Les cinq premiers Chapitres ont trait à l'attraction des sphères, au potentiel, au théorème de Green, aux lignes de force ; ils forment une sorte d'introduction aux huit Chapitres suivants, qui sont consacrés à l'Électricité statique, aux aimants, aux courants, aux actions électromagnétiques et électrodynamiques, à la théorie de l'induction et aux machines électromagnétiques. Enfin, l'Ouvrage se termine par la théorie des unités, dont la partie générale fait l'objet du présent extrait ».

Papelier. — Autre solution de la question proposée au Concours général en 1889. (35-40).

Sur le système des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes à un cercle et à une parabole. L'auteur emploie les coordonnées tangentielles.

Leinekugel (*G.*). — Remarques géométriques sur la même question. (41-46).

L'auteur arrive à énoncer un assez grand nombre de propositions, obtenues par des considérations purement géométriques.

Motel (*H.-P. du*). — Note de Géométrie descriptive. (46-49).

Solution, par la règle et le compas, de la question suivante : Mener un plan tangent à l'hyperboloïde réglé par une droite donnée.

Question proposée : 1593. (49).

Méray (*Ch.*) et *Riquier* (*Ch.*). — Sur quelques perfectionnements dont serait susceptible l'exposition de la théorie des quantités négatives. (50-59).

Extrait de *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (en préparation). Les auteurs ont pour but d'éviter toute obscurité et d'arriver à ne pas s'écarter du domaine de l'Algèbre pure. Ils prétendent y parvenir en partant de la définition suivante : « Nous appellerons provisoirement *qualifiées* des quantités absolues, conventionnellement pourvues de certaines qualités factices les rendant aptes à subir les opérations également factices qui vont être successivement définies. »

Marie (*M.*). — Réalisation et usage des formes imaginaires en Géométrie. (60-93, 161-181, 375-392, 435-444, 508-528).

Cette série d'articles à laquelle une suite est annoncée reproduisent des conférences données par l'auteur au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge. On y retrouve les doctrines sur les imagi-

naires, auxquelles M. Marie a consacré une bonne partie de son existence scientifique. Ne pouvant ici analyser minutieusement un tel travail, ni instituer une discussion sur les points fondamentaux de cette théorie, qui séparent profondément l'auteur de Cauchy, nous chercherons seulement à indiquer d'une façon sommaire les sujets traités.

Représentation d'un point d'un plan par une relation imaginaire x, y, d'une équation $f(x, y) = 0$. — Conjuguées d'un lieu réel. — Cordes réelles d'une conjuguée. — Conjuguées des coniques. — Éléments d'un lieu; enveloppe imaginaire des conjuguées. — Ligne droite. — Tangentes aux courbes imaginaires. — Propriétés de l'enveloppe imaginaire. — Asymptotes aux courbes imaginaires. — Contacts et courbure des courbes imaginaires. — Courbes osculatrices. — Développées. — Quadratures du lieu réel et de ses conjuguées. — Valeur concrète d'une intégrale. — La valeur d'une intégrale est indépendante du chemin suivi. — Périodes des intégrales. — Extension du second théorème d'Apollonius. — Génération des périodes. — Aire comprise entre une branche de courbe et son asymptote. — Périodes cycliques ou logarithmiques. — Classification des quadratrices des courbes algébriques.

Ocagne (*M. d'*). — Sur les séries récurrentes. (93-97).

Nouvelle démonstration de l'expression du terme général d'une série récurrente, établie par l'auteur précédemment dans le même Recueil (p. 65, 1884) : *Theorie élémentaire des séries récurrentes.*

Marchand (*E.*). — Le théorème de Dupin et la cyclide de Dupin. (98-115, 182-197).

Le théorème dont il s'agit est le suivant :

« Quand une sphère variable touche constamment de la même manière trois sphères fixes, chacun des trois points de contact décrit un petit cercle de la sphère fixe correspondante. »

Cette proposition se rattache étroitement à la recherche de la sphère tangente à quatre sphères données, ou du cercle tangent à trois cercles donnés, et à la génératrice de la cyclide de Dupin (transformée du tore par inversion). L'auteur fait usage de la méthode des cycles.

Amigues (*E.*). — Théorème de d'Alembert. (116-118).

Démonstration nouvelle de cette proposition que toute équation a une racine reposant sur ce que le minimum du module du premier membre est nul.

En présence du grand nombre de démonstrations simples et rigoureuses qu'on possède actuellement, il serait bien à désirer que cette proposition fondamentale reprît dans l'enseignement et dans les programmes la place à laquelle elle a droit.

Saint-Germain (*de*). — Note sur le problème de Mécanique proposé à l'Agrégation en 1889; extrait d'une Lettre à M. Rouché. (118-123).

Mouvement relatif d'un point assujetti à rester sur la surface $z = e^{x+y}$ et sollicité par une force connue; les axes coordonnés tournant uniformément autour de la droite $x = y = z$ supposée fixe.

Borel (*E.*). — Note sur un théorème de M. Humbert et sur un théorème de M. Fouret. (125-129).

Sur la somme des angles que forment avec une droite fixe les tangentes communes à deux courbes algébriques. — Sur les produits des coefficients angulaires des droites joignant un point fixe aux points d'intersection de deux courbes algébriques variables, rencontrant les axes coordonnés en des points fixes.

Gambey. — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'Agrégation des Sciences mathématiques de 1889. (129-138).

Questions diverses relatives à un cône du second degré et à deux quadriques inscrites dans ce cône.

Husquin de Rhéville. — Sur l'aberration de courbure. (138-140).

L'axe d'aberration est la droite qui joint un point d'une courbe plane au milieu d'une corde infiniment voisine, parallèle à la tangente. δ étant l'angle de cet axe avec la normale, on a $\operatorname{tang}\delta = \frac{1}{2}\frac{dR}{ds} = \frac{1}{3}\frac{R'}{R}$.

Husquin de Rhéville. — Sur la courbure d'une podaire. (140-143).

Démonstration simplifiée d'une formule du *Traité d'Analyse* de M. Laurent. — Construction géométrique. — Application aux courbes $\rho^m = a^m \cos m\omega$.

Cesaro (*E.*). — Remarques sur l'osculation. (143-157).

L'auteur traite la question par l'emploi des équations intrinsèques. Application à d'assez nombreux exemples. Étude spéciale de la parabole osculatrice. Cette étude doit être rapprochée de celles de M. Ribaucour sur le même sujet.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1566. (147-159).

Propriété d'une conique.

Kallenberg van den Bosch (*C.-R.-J.*). — Solution de la question 1591. (159-160).

Sur les trois normales à une parabole menées par un point de son plan.

Niewenglowski (*B.*). — Note sur le théorème de Sturm. (181-182).

Étude du nombre des racines imaginaires.

Kallenberg van den Bosch (*C.-R.-J.*). — Solution de la question 1592. (198-199).

Sur les quatre normales à une ellipse menées par un point de son plan.

Barisien. — Solution de la question proposée au Concours pour les bourses de Licence (Toulouse, 1888). (200-203).

Sur les paraboles osculatrices à une ellipse en un de ses points.

Issaly (l'abbé). — Théorie des systèmes triples de pseudo-surfaces. (204-222).

L'auteur appelle *pseudo-surface* le lieu géométrique que forment deux systèmes de courbes variables lorsqu'elles s'entrecoupent, non pas rigoureusement, mais aux infiniment petits du second ordre près, tout au plus. Voici les divisions principales du Mémoire :

Préliminaires. — Relations différentielles. — Équations fondamentales de la théorie des systèmes triples de pseudo-surfaces. — Application aux systèmes triples de surfaces; généralisation du théorème de Dupin relatif aux surfaces orthogonales. — Extension des équations de Codazzi et du théorème de Gauss.

Fouret (*G.*). — Remarque sur le cas douteux relatif à certains caractères de convergence des séries. (222-226).

L'objet principal de cet article est de montrer que, si l'application du critère basé sur l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ ne donne aucune conclusion sur la convergence de la série, il en est de même du critère fondé sur la considération de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; et réciproquement.

Mannheim (*A.*). — Théorème de Géométrie cinématique (Extrait d'une Lettre). (227-228).

Sur les droites, passant par un même point, liées à une figure mobile de grandeur invariable. Pour une position de ces droites, les points centraux des surfaces engendrées appartiennent à un cylindre de révolution.

Bibliographie. — *G. de Longchamps :* Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre. Compte rendu par M. Rouché. (228-233).

Ravier. — Propriétés focales des coniques et des quadriques. (233-239).

Emploi des coordonnées tangentielles; démonstration simple d'assez nombreuses propriétés.

QUESTION PROPOSÉE : 1593. (239).

Maleyx (*L.*). — Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition. (240-258, 318-337, 424-435, 481-495, 596-613).

Le titre donnant une idée assez claire du sujet traité, nous nous bornons à reproduire l'indication des divisions principales du Mémoire :

Définitions; classification des sections coniques en trois genres. — Centre et diamètres dans l'ellipse; premières propriétés de direction. — Premières propriétés métriques des diamètres de l'ellipse; théorèmes d'Apollonius. — Centre et diamètres dans la parabole. — Centre et diamètres dans l'hyperbole; premières propriétés de direction. — Sécantes à l'hyperbole; construction par points; intersection avec une droite. — Premières propriétés métriques des diamètres de l'hyperbole. — Théorèmes d'Apollonius dans l'hyperbole. — Pôle et polaire dans les coniques. — Involution; définition; deux théorèmes. — Involution des diamètres conjugués des coniques à centre. — Théorème de Pappus. — Construction des points communs à une droite et à une conique donnée par cinq points. — Théorème de Desargues; généralisation. — Théorème corrélatif. — Construction d'une conique dont on donne cinq points. — Construction de coniques définies par cinq données.

Fouret (*G.*). — Démonstration et applications d'un théorème de Liouville sur l'élimination. (258-288).

Il s'agit d'une proposition sur les termes dont dépend le coefficient d'un terme de degré déterminé dans l'équation résultante. M. Fouret en donne une démonstration remarquable par sa simplicité. Les nombreuses applications géométriques qu'il en déduit sont relatives au théorème de Chasles sur les points de contact des tangentes à une courbe algébrique, parallèles à une direction donnée, aux normales à une courbe menées par un point donné, aux points communs à deux courbes algébriques, et à plusieurs extensions de ces propriétés aux surfaces algébriques. Le cas des courbes isotropiques donne lieu à d'intéressantes remarques. On peut rapprocher ce Mémoire d'une autre étude de l'auteur *Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques*, publiée dans les *Comptes rendus du cercle mathématique de Palerme*, t. III, p. 42.

Ocagne (*M. d'*). — Deux théorèmes généraux sur les trajectoires de points et les enveloppes de droites dans le plan. (289-293).

L'auteur appelle *distance sous l'angle* θ d'un point M à une courbe (C) la longueur MP, quand la droite MP coupe la courbe en P sous l'angle θ. Cette notion lui permet de démontrer simplement diverses propositions de Poinsot et de MM. Pomey et Laurent.

Cesaro (*E.*). — Sur l'étude intrinsèque des surfaces réglées. (294-297).

Cet article de M. Cesaro se rattache à ses *Remarques sur les surfaces gauches*, parues dans le même Recueil (1889, p. 445). Il retrouve des propriétés énoncées par M. Bioche dans une Communication à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 10 mars 1890).

Pirondini (*G.*). — Sur les trajectoires orthogonales d'une ligne mobile. (297-317).

L'étude en question est fondée sur le déplacement du trièdre trirectangle formé par la tangente, la normale principale et la binormale à une courbe gauche, lorsque ce trièdre entraîne avec lui une ligne mobile. Partant de là, l'auteur parvient à plusieurs propositions intéressantes et concernant surtout les courbures.

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1889). Mathématiques élémentaires. Mathématiques spéciales. Analyse et ses applications géométriques. Mécanique rationnelle. Énoncés des compositions. (338-340).

Agrégation de l'enseignement secondaire spécial (Concours de 1889). — Algèbre et Trigonométrie. Géométrie descriptive. Mécanique. — Énoncés des compositions. (340-342).

Concours d'admission a l'École Normale supérieure en 1889. — Mathématiques. Physique. — Énoncés des compositions. (342-344).

Concours d'admission a l'École spéciale militaire (1889). — Mathématiques. Géométrie descriptive. — Énoncés des compositions. (344-345).

Concours pour les bourses de licence (Paris, 1889). — Énoncé de la composition. (345-346).

Concours d'admission a l'École Centrale en 1889 : première et deuxième session. — Géométrie analytique. Calcul trigonométrique. Épure. Physique. Chimie. — Énoncés des compositions. (346-351).

Concours général de 1889. — Mathématiques élémentaires. Philosophie. Enseignement secondaire spécial. — Énoncés des compositions. (351-352).

Cesaro (*E.*). — Nouvelles remarques sur divers articles concernant la théorie des séries. (353-367).

Suite des travaux précédents, notamment sur la série de Lerch (*Nouv. Ann.*, 1888, p. 401). Il s'agit surtout des séries qui sont convergentes bien que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt une succession convenable de valeurs entières. Discussion d'articles de M. Gutzmer (voir *Nouv. Ann.*, 1889, p. 26). Remarques sur divers caractères de convergence et spécialement sur un théorème de Cauchy.

Brisse (*Ch.*). — Nouvelle méthode de discussion de l'équation en S. (367-372).

L'auteur examine rapidement les propriétés principales de l'équation en S et en déduit ensuite diverses conséquences, principalement au point de vue des décompositions en sommes de carrés. La méthode, comme on le fait remarquer, s'applique à une équation en S de degré quelconque.

Pellegrin (*E.*). — Solution de la question 1591. (373-374).

Sur les trois normales menées d'un point à une parabole.

Audibert. — Solution de la question 1592. (374-375).

Sur les quatre normales menées d'un point à une ellipse.

Robert (*Ch.*). — Note sur une propriété du cylindre droit ayant pour directrice une spirale logarithmique. (392-395).

Sur la transformée par déroulement du cylindre, de l'intersection avec une surface de révolution dont l'axe, parallèle aux génératrices, passe par le pôle de la spirale.

Kallenberg van den Bosch (*C.-R.-J.*). — Relations entre la distance d'un point P du plan d'une conique au foyer et les rayons vecteurs des pieds des normales abaissées du point P sur la courbe. (395-400).

L'auteur étudie successivement les cas de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole et arrive à des relations d'une remarquable simplicité.

Publications récentes. — (400-402).

C. B. — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École centrale en 1888; première session. (403-410).

Sur un faisceau de coniques ayant une directrice commune et un sommet commun sur l'axe focal.

C. B. — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École centrale en 1888; seconde session. (410-417).

Lieux géométriques relatifs à une ellipse.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1890. — Mathématiques. Composition française. Physique et Chimie. Langues vivantes autres que l'allemand. Géométrie descriptive. (417-419).

Maupin (*G.*). — Solution de questions proposées pour la Licence en juillet 1889, à Rennes. (420-424).

1° Équation différentielle de certaines courbes tracées sur une surface donnée; 2° équation générale des surfaces satisfaisant à deux équations simultanées aux dérivées partielles.

Ocagne (*M. d'*). — Quelques propriétés générales des courbes algébriques obtenues au moyen des coordonnées parallèles. (445-455).

La méthode des coordonnées parallèles a été exposée par M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales* en 1884. Dans le présent article, il en fait application à plusieurs propriétés des courbes algébriques, et retrouve en particulier le théorème de Chasles d'une façon remarquablement simple.

Fontaneau (*E.*). — Sur l'équilibre d'élasticité d'une enveloppe sphérique. (455-471).

La question a été traitée par MM. Thomson et Tait. L'auteur emploie un procédé différent, qui semble, dit-il, ouvrir la voie à des applications plus générales. Les calculs, fondés sur les notations de Lamé, paraissent présenter une assez grande complication; mais cette complication est, au moins en partie, on doit le dire, inhérente au sujet lui-même.

Ocagne (*M. d'*). — Addition à une Note sur une application des coordonnées parallèles. (471-472).

Voir même Recueil, 1889, p. 568. Étude de formules de transformation.

Biehler (*Ch.*). — Sur les équations binômes. (472-476).

L'auteur fait usage des fonctions $V_m = x^m + \frac{1}{x^m}$ et $U_m = V_m + V_{m-1} + \ldots + V_1 + 1$. Ces dernières jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions de Sturm.

Balitrand. — Application des coordonnées intrinsèques. Caustiques par réflexion. (476-479).

La définition des caustiques est généralisée, les rayons incidents étant ici tangents à une courbe donnée. La méthode permet même de remplacer l'égalité des angles d'incidence et de réflexion θ, θ' par une relation quelconque $\theta' = f(\theta)$.

Stieltjes. — Note sur l'intégrale $\int_0^\infty e^{-u^2} du$. (479-480).

Simplification d'une démonstration récente donnée par M. Méray et fondée sur l'emploi de la formule de Wallis.

Jamet (*V.*). — Recherche de quelques courbes planes, par l'intermédiaire de leurs développées. (496-502).

L'article débute par un théorème concernant l'expression de l'arc de certaines courbes. M. Jamet en déduit une méthode pour trouver une équation différentielle applicable à la développée, et en fait une application au cas des coniques.

Maleyx (*L.*). — Méthode élémentaire pour étudier les variations des fonctions continues. Maximums et minimums. (502-508).

La méthode repose sur cette remarque que, si $F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, on a

$$F(x) - F(x_1) = (x - x_1) F_1(x, x_1).$$

L'auteur en fait ensuite application à deux exemples.

Soulier (*P.*). — Démonstration des théorèmes de Pascal et de Brianchon sur les hexagones inscrits et circonscrits. (529-530).

Ces démonstrations, d'une extrême simplicité, sont fondées sur la perspective.

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1890). — Mathématiques élémentaires. Mathématiques spéciales. Analyse et ses applications géométriques. Mécanique rationnelle. — Énoncés des compositions. (530-532).

Agrégation des Sciences mathématiques. (Concours de 1891). — Programme d'où seront tirés les sujets de composition : Analyse, Mécanique. — Sujets de leçons : Mathématiques élémentaires, Mathématiques spéciales. (532-537).

Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1890. — Géométrie descriptive (deuxième sujet). — Énoncé de la composition. (537).

Concours d'admission a l'École Normale supérieure en 1890. — Mathématiques. Physique. — Énoncés des compositions. (538-539).

Concours d'admission a l'École Centrale en 1890; Première et deuxième session. — Géométrie analytique. Calcul trigonométrique. Épure. Physique. Chimie. — Énoncés des compositions. (539-544).

Concours d'admission a l'École spéciale militaire (1890). — Mathématiques. Géométrie descriptive. — Énoncés des compositions. (544-545).

Saint-Germain (*de*). — Note sur le problème de Mécanique proposé au Concours d'agrégation en 1890. (546-552).

Extrait d'une Lettre à M. Rouché. Ellipsoïde d'inertie et mouvement d'un tétraèdre homogène non pesant, dont l'un des angles solides est trirectangle.

Sanctis (*P. de*). — Recherche d'une équation des surfaces moulures. (552-556).

Méthode permettant d'obtenir l'équation générale des surfaces moulures. Cette équation contient les dérivées partielles du second ordre de deux fonctions qui définissent la génératrice.

Bosi (*L.*). — Généralisation et solution de la question 1593. (556-558).

Propriétés de coniques passant par des points déterminés.

Correspondance. — Extrait d'une Lettre de M. d'Ocagne concernant une solution inexacte de la question 1566. (558).

Pomey (*J.-B.*). — Démonstration des formules de Frenet. (559-560).

Il s'agit des formules connues concernant les courbes gauches. La démonstration est fondée sur la théorie des projections.

Auric. — Formule de Waring. (561-564).

Expression d'une fonction symétrique en fonction des sommes de puissances semblables des éléments constituants. L'auteur fait application d'une identité générale qu'il établit tout d'abord.

Tano (*J.*). — Quelques théorèmes sur les coefficients binomiaux. (564-567).

M. Tano emploie les racines primitives des équations binômes. Il arrive notamment à un théorème de Richelot : « Le nombre 3 est racine primitive des nombres premiers de la forme $2^k + 1$ (nombres gaussiens) ».

Fouret (*G.*). — Sur la méthode d'approximation de Newton. (567-585).

L'auteur s'est proposé de préciser les conditions dans lesquelles la méthode de Newton peut être employée utilement et à coup sûr. Il discute la règle de Fourier en signalant ce qu'elle présente de trop restrictif, et établit, après une discussion complète, une règle générale. Il examine ensuite la convergence des résultats obtenus, puis la limite de l'erreur. Il montre enfin comment on peut étendre l'usage de la méthode. L'article se termine par un certain nombre d'exemples, qui achèvent de porter la clarté sur cette intéressante discussion.

Carvallo (*E.*). — Contact de deux quadriques. (586-594).

Étude très complète de la question. M. Carvallo étudie les conditions de simple, double, triple et quadruple contact, puis les contacts en nombre supérieur à quatre. Dans ce dernier cas, il y en a une infinité, et cela peut se produire de trois manières différentes.

Duporcq (*E.*). — Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres. (594-595).

Méthode ingénieuse, s'appuyant sur la formation d'un déterminant obtenu par le triangle de Pascal.

Ravier (*S.*). — Solution de la question proposée au Concours général de 1890. (614-619).

Il s'agit des propriétés d'une quadrique. M. Ravier, qui a obtenu le prix d'honneur, donne une solution analytique, puis une solution géométrique de la question.

A. L.

2ud Part.

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATHIK UND PHYSIK, édité par *G. von Escherich* et *Em. Weyr*.

Première année, 1890.

Stefan (*J.*). — Sur la théorie de la formation de la glace. (1-6).

König (*J.*). — Sur les fonctions continues possédant dans chaque intervalle des maxima et des minima. (7-12).

Si la fonction $F(x)$ est continue entre les limites A et B et qu'elle possède des valeurs égales dans tout intervalle, aussi petit qu'il soit, contenu entre ces limites, alors on pourra déterminer un nombre ξ aussi voisin qu'on voudra d'un nombre arbitraire, tel que $\lim \frac{F(\xi + h_n) - F(\xi)}{h_n} = 0$, pourvu que les h soient des grandeurs tendant vers zéro et convenablement choisies. A la fin, on traite, en s'appuyant sur le théorème cité, la fonction donnée par Weierstrass $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n \pi)$ et l'on montre qu'il y a des nombres ξ aussi voisins que l'on veut d'un nombre arbitraire tels que $\lim \frac{f(\xi + h_n) - f(\xi)}{h_n} = C$, C étant un nombre arbitraire et les h étant choisis de la manière déjà mentionnée.

Mertens (*F.*). — Les symboles invariants de la collinéation de l'espace. (13-32).

On déduit un système de symboles invariants de la forme bilinéaire quaternaire $f(x, u) = \Sigma a_\alpha b_\beta x_\alpha u_\beta (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ et l'on exprime par ces symboles d'une manière entière tous les autres symboles invariants de la forme donnée.

Meyer (*F.*). — Sur les dérivées d'ordre supérieur d'un quotient de deux fonctions. (33-38).

Si l'on pose

$$\varphi_i = \frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(x), \qquad f_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(x), \qquad \varphi_0 = \varphi(x), \qquad f_0 = f(x),$$

$$(-1)^k \varepsilon_k = (-1)^k \frac{1}{k!}, \quad f_0^{k+1}\left(\frac{1}{f}\right)^{(k)} = \sum (-1)^{\alpha_0} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!} f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \ldots f_k^{\alpha_k},$$

alors on formera la $m^{\text{ième}}$ dérivée du quotient $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ d'après la loi

$$\frac{1}{n!} f_0^{n+1}\left(\frac{\varphi}{f}\right)^{(n)} = \varphi_0 \varepsilon_n + \varphi_1 f_0 \varepsilon_{n-1} + \varphi_2 f_0^2 \varepsilon_{n-2} + \ldots + \varphi_{n-1} f_0^{n-1} \varepsilon_1 + \varphi_n f_0^n,$$

où l'on doit mettre à la place de i et k, $1, 2, \ldots, n$ et où les α doivent par-

courir tous les nombres $\geqq 0$ satisfaisant à la relation

$$a_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + k\alpha_k = k.$$

On trouve pour $\varphi(x) = f'(x) = f_1$ que la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée du quotient $\frac{f'(x)}{f(x)}$ se forme d'après la loi

$$(-1)^{n-1} f_1^n \left(\frac{f_1}{f}\right)^{(n)} = n \sum (-1)^{\beta_0} \frac{(n-1-\beta_0)!}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_n!} f_0^{\beta_0} f_1^{\beta_1} \ldots f_n^{\beta_n},$$

où les β doivent parcourir toutes les valeurs entières $\geqq 0$ satisfaisant à la relation $\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n = \beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + n\beta_n = n$. On rapproche cette formule de la formule de Waring pour les sommes de puissances.

Gegenbauer (*L.*). — Quelques théorèmes arithmétiques. (39-46).

On déduit quelques formules de Bugajef, Tchebychef d'un théorème général et l'on ajoute quelques nouveaux résultats.

Wistinger (*W.*). — Remarques sur les équations irréductibles d'ordre entier.

Dans un cercle, avec le rayon $\rho < \frac{1}{2(2R)^{n(2n-1)}}$, il y a tout au plus une seule racine d'une équation d'ordre n dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance est 1; R est le rayon d'un cercle autour de l'origine renfermant toutes les racines.

Biermann (*O.*). — Sur la représentation des fonctions fuchsiennes de la première famille par des produits infinis. (49-79).

On donne la forme la plus simple des fonctions analytiques uniformes qui s'annulent simplement pour un point a du polygone fondamental et pour les transformées de ce point par les substitutions $[z, f_r(z)]$ d'un groupe de la première famille, et pour lesquelles tous les points de la circonférence du cercle fondamental sont des points critiques essentiels. On recherche ensuite comment se comportera cette fonction vis-à-vis des substitutions du groupe et l'on forme l'expression la plus générale d'une fonction (avec des zéros et infinis donnés), analytique et uniforme à l'intérieur du cercle fondamental, et l'on recherche également comment cette fonction se comporte vis-à-vis des substitutions.

Puis on donne les conditions pour que la fonction soit fuchsienne; toutefois, ces conditions ne sont pas nécessaires et suffisantes.

Kohn (*G.*). — Sur la relation qu'il y a entre les différents systèmes de coniques tangentes à une courbe générale du quatrième degré. (71-91) et (129-158).

On démontre qu'un système de coniques détermine sur une conique d'un

autre système des points composés de groupes correspondants de deux involutions projectives; l'une est cubique et l'autre de premier ordre (suite simple de points), ou bien toutes deux sont quadratiques. Les deux systèmes ont, dans le premier cas, six tangentes doubles en commun avec la courbe donnée; dans le second cas, seulement quatre.

L'involution cubique donne, dans le premier cas, une véritable conique comme conique involutive; dans le second cas, cette conique se réduit à un couple de points, les deux points par lesquels passent les droites qui joignent les couples de points des involutions quadratiques. La conique involutive reste la même dans les deux cas, si l'on remplace une des deux coniques par une conique du même système. Chaque couple des soixante-trois systèmes de coniques quadruplement tangents donne donc une telle conique involutive. Les tangentes doubles relatives aux deux systèmes touchent la conique involutive correspondante. On développe ensuite les propriétés de ces coniques d'involutions surtout celles de leurs tangentes et de leurs relations mutuelles. Enfin, on développe les propriétés des réseaux (*Netze*) dans lesquels les systèmes de coniques quadruplement tangentes sont compris.

Dantscher (*v. V.*). — Remarques sur le Calcul intégral. (92-94).

On a

$$\int_{t_0}^{t_1} |f(t) + i\varphi(t)|\, dt > \left| \int_{t}^{t_1} |f(t) + i\varphi(t)\, dt \right|,$$

où $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions réelles finies et uniformes si le quotient $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$ ne garde pas la même valeur dans l'intervalle réel $t_0 \leqq t \leqq t_1$.

Küpper (*C.*). — Le mouvement hélicoïdal, le *Nullsystem* et le complexe linéaire. (95-104).

Contient les développements élémentaires de ces sujets comme il serait désirable de les exposer dans les écoles techniques.

Lerch (*M.*). — Communication sur le Calcul intégral. (105-112).

On déduit la formule de Weber

$$\int_0^\infty J(z) \log z\, dz = \Gamma'(1) \log 2$$

de la propriété des fonctions de Bessel-Fourier

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos a}\, da;$$

ensuite on déduit de la relation de Lipschitz

$$\int_0^\infty e^{-ar} J(\beta r)\, dr = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \beta^2}}$$

la formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin(z+u)}{z+u} \mathrm{J}(z)\, dz = \frac{\pi}{2} \mathrm{J}(u);$$

ensuite les relations

$$\int_0^\infty \frac{da}{\Gamma(a)} = e + \int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{\pi^2 + (\log x)^2}$$

et

$$\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \mathrm{E}\left(\frac{hn}{m} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{8}(m-1)(n-1)$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(m+n-1)z \sin(m-1)nz \sin(n-1)mz}{\sin z \sin 2mz \sin 2nz}.$$

Dans cette dernière formule m et n sont des nombres entiers impairs. De cette dernière expression pour la somme arithmétique $\sum \mathrm{E}\left(\frac{kn}{m} + \frac{1}{z}\right)$ se déduit immédiatement la propriété bien connue

$$\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \mathrm{E}\left(\frac{hn}{m} + \frac{1}{z}\right) - \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \mathrm{E}\left(\frac{km}{n} + \frac{1}{z}\right).$$

Wirtinger (*W.*). — Sur une généralisation de la surface de Kummer et de ses relations avec les fonctions thèta de deux variables. (113-128).

On démontre que ces relations ont pour analogues des relations entre les fonctions thèta de p variables et les multiplicités, à p dimensions dans l'espace R_N à N dimensions, $\mathrm{N} = 2^{p-1}$. Cette multiplicité algébrique M_p^m est de l'ordre $m = p!\,2^{p-1}$ et ses coordonnées ponctuelles homogènes $x_i (i = 1, \ldots, p)$ se laissent exprimer comme carrés des fonctions thèta. Aux seize plans tangents à la surface de Kummer, suivant des coniques, répondent 2^{2p} espaces $\mathrm{R}_{\mathrm{N}-1}$ qui touchent M_p^m le long de $\mathrm{M}_{p-1}^{\frac{m}{2}}$. M_p^m se transforme par 2^{2p} collinéations (y compris la collinéation identique) qui forment un groupe en lui-même; cette multiplicité possède 2^{2p} points qui sont d'ordre 2^{p-1}. Ces points forment avec les 2^{2p} espaces $\mathrm{R}_{\mathrm{N}-1}$ une configuration $(2^{2p})_{2^{p-1}(2^p-1)}$ analogue à la configuration de Kummer $(16)_6$, de telle sorte que $2^{p-1}(2^p-1)$ points sont situés sur un $\mathrm{R}_{\mathrm{N}-1}$, et que $2^{p-1}(2^p-1)$ espaces $\mathrm{R}_{\mathrm{N}-1}$ passent par un point. Ensuite on montre que M_p^m se transforme en elle-même par $2^{p-1}(2^p-1)$ systèmes zéro, et par $2^{p-1}(2^p+1)$ systèmes zéro. Ces 2^{2p} transformations et les 2^{2p} collinéations déjà nommées forment un groupe, tel que les points et les $\mathrm{R}_{\mathrm{N}-1}$ de R_N conduisent aux configurations $(2^{2p})_{2^{p-1}(2^p-1)}$ .... A la fin on discute des cas spéciaux correspondant au cas où la surface de Kummer se transforme en hyperboloïde.

Gmeiner (*J.*). — Preuve d'un théorème d'arithmétique. (159-162).

On donne une preuve arithmétique du théorème suivant : Si $m, k, a_{\nu}, \ldots,$

a_{n3} sont des nombres positifs entiers, et si

$$n = a_{11}a_{21}\ldots a_{15} + a_{21}a_{22}\ldots a_{25} + \ldots + a_{n1}\ldots a_{n3},$$

alors le produit

$$m(m+k))m+2k)\ldots[m+(n-1)k].k^{m-n}$$

est divisible par le produit

$$\prod_{k}^{n}(a_{k1}!)^{a_{k2}a_{k3}\ldots a_{k5}}(a_{k2}!)^{a_{k3}a_{k4}\ldots a_{k5}}\ldots(a_{k,5-1}!)^{a_{k5}}(a_{k5}!). \text{ »}$$

Weyr (*Ed.*). — Sur la théorie des formes bilinéaires. (163-236).

Contient un résumé d'un Mémoire paru en langue tchèque et couronné par l'Académie des Sciences de Prague, *O theorii forem bilineárných* (La théorie des formes bilinéaires). On y introduit une nouvelle méthode, pour traiter cette théorie. Elle consiste à considérer certains systèmes de valeurs liés à une matrice. Ces considérations permettent la solution de bien des problèmes, par exemple, le problème, déjà résolu par Weierstrass, de la transformation simultanée de deux formes bilinéaires.

Spath (*F.*). — Construction de coniques avec des éléments contenant des imaginaires. (237-246).

On emploie le théorème de Pascal même pour le cas où, parmi les cinq points donnés, il y a un ou deux couples de points imaginaires conjugués. On enseigne comment construire avec la règle le second point de rencontre de la courbe et d'une droite réelle passant par un point réel de la courbe. Ces constructions ont été données par M. le professeur Stolz, de Innsbruck, dans son cours à l'Université de cette ville.

Haubner (*J.*). — Sur la rupture du courant dans les conducteurs superficiels. (248-274; 358, 370).

Lichtenfels (*O.*). — Sur le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles. (275-282).

A la preuve de Cauchy, simplifiée par Briot et Bouquet, est ajoutée une nouvelle : elle est analogue à la preuve que Weierstrass a donnée pour le développement de la racine d'une équation algébrique.

Study (*E.*). — Sur les systèmes des nombres complexes et sur leur emploi dans la théorie des groupes de transformations. (283-355).

On traite d'abord la question de tous les systèmes de nombres complexes avec n unités principales, puis on forme les deux systèmes de nombres complexes avec deux unités principales, les cinq systèmes avec trois unités princi-

pales, les seize systèmes avec quatre unités principales. Parmi ces systèmes se trouvent les quaternions, et l'on fait quelques remarques sur les systèmes particuliers à n unités. On discute ensuite les groupes de transformations les plus simples, reliés à un système de nombres complexes, le groupe de transformations projectives réciproques, le groupe projectif dont toutes les transformations peuvent être permutées avec d'autres transformations infinitésimales données, la représentation des paramètres d'un certain groupe, la rotation de la sphère et le mouvement du plan.

Ameseder (*A.*). — Éléments d'une théorie purement géométrique de la collinéation et de la réciprocité. (371-406).

Dans cette première partie de la Communication, on traite de la collinéation et l'on développe une théorie purement géométrique de la question. Toutes considérations analytiques, comme le principe de la continuité et la représentation des imaginaires, sont soigneusement évitées. On emploie exclusivement des éléments réels; la plupart des preuves sont nouvelles et s'appuient sur les concepts de la projectivité cyclique, de la projection d'une collinéation de l'espace; de la perspective et de l'intersection (*Schein und Schnitt*), d'un quadrilatère.

Cette première communication contient les parties suivantes : I. Projectivités; II. Collinéations; III. Systèmes de collinéations (*Netze, Gebüsche*); IV. Collinéations de Hermite (collinéations transformant les surfaces du second degré en elles-mêmes). C'est de cette dernière partie que l'on devrait partir pour traiter la seconde partie, la réciprocité. Malheureusement la mort est venue, le 17 janvier 1890, enlever le si jeune géomètre autrichien, avant qu'il ait pu finir cette dernière partie.

Birkeland (*Kr.*). — Un théorème sur les courbes algébriques. (417-424).

Le lieu d'un point tel que la somme des carrés des distances à une courbe algébrique est constante est une courbe de second degré. Chaque asymptote de la conique forme, avec les asymptotes de la courbe algébrique, des angles tels que la somme des carrés de leurs cosinus soit $m+n$, m étant le degré et n la classe de la courbe.

Mertens (*F.*). — Le potentiel d'une ellipse homogène. (425-428).

Le potentiel de l'ellipse $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ par rapport au point (a, b, c) peut être mis sous la forme

$$P = 2AB\int\frac{\sqrt{1-S}\,ds}{\sqrt{s(s+A^2)(s+B^2)}},$$

où $S = \frac{a^2}{s+A^2}+\frac{b^2}{s+B^2}+\frac{c^2}{s^2}$, et où l'on intègre dans l'intervalle $s = 0$, $1-S = 0$.

Wintinger (*W.*). — Remarque sur les fonctions modulaires. (429-432).

L'auteur se demande si ces fonctions peuvent se ranger sous les formules de Poincaré (*Acta mathematica*, t. II, p. 4), et il trouve que cela a effectivement lieu.

Stolz (*O.*). — Sur la théorie des courbes de l'espace. (433-442).

On déduit une série de formules élémentaires en considérant toujours le principe des signes.

Puchta (*A.*). — Loxodromies et géodésiques du tore. (443-450).

Si l'on met l'équation du tore

$$(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2)^2+4a^2z^2=4a^2b^2$$

sous la forme

$$x=(a-b\cos u)\cos v,$$
$$y=(a-b\cos u)\sin v,$$
$$z=b\sin u,$$

alors l'équation différentielle des loxodromies qui coupent les parallèles sous l'angle α devient

$$\cos\alpha=\frac{a-b\cos u}{\sqrt{b^2\left(\frac{du}{dv}\right)^2+(a-b\cos u)^2}},$$

ou, après l'intégration,

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tang}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2b}v\operatorname{tang}\alpha+C\right).$$

On peut supposer $C=0$, car il suffit de considérer la courbe passant par le point ($x=a-b$, $y=z=0$). La notation mU_v+nU_v désigne chaque loxodromie se fermant après avoir traversé chaque parallèle m fois et chaque méridien n fois. Son équation est

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tang}\frac{mv}{2n}\qquad\text{où}\qquad\operatorname{tang}\alpha=\frac{bm}{n\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Ces courbes sont algébriques de l'ordre $n(2m+2)$. Les géodésiques du tore sont données par

$$v=\int\frac{du}{(a-b\cos u)\sqrt{C(a-b\cos u)^2-\frac{1}{b^2}}}+C.$$

Sur le tore il y a entre deux points fixes P_0 et P_1, en général, une infinité de géodésiques qui toutes sont contenues dans ce type mL_v+nL_n; à chaque cas spécial de m et n (nombres entiers), correspondent deux d'entre elles.

Küpper (*C.*). — Sur les rayons obliques d'un complexe linéaire. (450-456).

Quand deux hyperboloïdes d'un complexe, passant par une droite a de ce complexe, ne se touchent qu'en deux points de a, alors chacun de ces deux

points est le foyer du plan tangent commun aux deux surfaces à l'autre point. Si l'on joint, à une droite a, deux autres droites b et b_1, infiniment voisines, définies par des projectivités, on donnera par là-même deux faisceaux de rayons dont les centres sont situés sur a, dont les plans passent par a et dont les rayons sont tous coupés par a, b et b_1. En dehors des rayons de ces deux faisceaux, il n'y a point de droites qui jouissent de cette propriété (*comparez* les recherches cinématiques de M. Mannheim).

Guber (*E.*). — Sur la théorie des erreurs d'observation. (457-464).

On démontre que, quand les fautes inhérentes aux observations suivent la loi de Gauss $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2}$, les corrections relatives à la moyenne arithmétique suivent une loi semblable, cependant avec une précision plus grande dans le rapport V_n à V_{n-1}, quand n est le nombre d'observations.

Mandel (*M.*). — Sur la généralisation d'un algorithme de Gauss. (465-472).

Il s'agit du critère de Gauss, généralisé par Schering, du reste quadratique d'un nombre par rapport à un autre (*Berliner Monatsberichte*, p. 330; 1876), qui a été prouvé par Kronecker (*loc. cit.*, p. 331-334).

En se basant sur la représentation d'Eisenstein du symbole de Legendre $\left(\frac{r}{n}\right)$. M. Mandel donne une autre preuve de ce théorème en s'appuyant sur des considérations originales sur le partage en classes des nombres $1, 2, 3, \ldots, \frac{P-1}{2}$.

Wassmuth (*A.*). — Sur la variation de la chaleur spécifique en fonction de la température. (473-480).

Teixeira (*G.*). — Extension d'un théorème dû à Jacobi. Extrait d'une lettre à M. Lerch. (431-484).

Il s'agit du déterminant jacobien $\Sigma \pm f_{11} f_{22} \ldots f_{nn}$ d'un système de n fonction f_k de n variables x_i qui s'annule quand il y a une relation entre les fonctions.

2nd part.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE [1].

LVIIIe Cahier, 1889.

Hugoniot. — Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. (1-125).

L'auteur poursuit l'étude du mouvement des fluides dans les tuyaux cylindriques (voir *Journal de l'École Polytechnique*, 57e Cahier).

Il a démontré que, si l'on néglige les forces extérieures, le frottement contre l'enveloppe, la viscosité et la conductibilité, si de plus on suppose qu'à l'état initial la pression et la température sont constantes à l'intérieur du fluide, le mouvement est régi par une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Parmi les mouvements possibles, M. Hugoniot examine ceux qui se produisent quand, le fluide étant primitivement en repos, on assujettit l'une des extrémités de la colonne à une condition déterminée, en imprimant, par exemple, à la tranche extrême un certain mouvement tel que la vitesse soit nulle à l'origine et varie ensuite d'une manière continue.

Les intégrales correspondantes sont celles qui sont compatibles avec l'intégrale $u = 0$, laquelle correspond à l'état de repos de la colonne. Si l'on représente le mouvement du corps par une surface rapportée à trois axes rectangulaires Ox, Ot, Ou, l'intégrale $u = 0$ n'est autre que le plan horizontal xOt, et les surfaces intégrales cherchées se raccordent avec ce plan suivant la droite $x = \frac{\varphi(0)}{\rho_0}t$ qu'elles admettent pour caractéristique (ρ_0 désigne la densité initiale du gaz).

Supposant la longueur de la colonne fluide infinie, afin de n'avoir pas à se préoccuper des phénomènes de réflexion, l'auteur montre que tous les mouvements qui peuvent se propager dans cette colonne primitivement en repos sont représentés géométriquement par des surfaces développables dont les arêtes de rebroussement ont la même indicatrice sphérique. Cet important résultat lui permet de donner immédiatement les expressions du déplacement et un point quelconque quand on donne la condition imposée à l'extrémité $x = 0$.

Mais il y a des cas exceptionnels où les intégrales ainsi obtenues ne représentent pas complètement le mouvement du fluide; ce sont ceux où il s'introduit dans ce mouvement des discontinuités, ce qui, chose remarquable, peut arriver lors même que la vitesse de la tranche ébranlée est nulle à l'origine et varie ensuite d'une manière continue.

Une des principales applications des théories de l'auteur, c'est l'intégration

---

[1] Voir *Bulletin*, XV_2.

de l'équation du mouvement dans les gaz parfaits

$$\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{mp_0}{\rho_0}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1},$$

où m représente le coefficient de détente et p_0 la pression initiale.

L'approximation admise habituellement et qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{mp_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dénature notablement les phénomènes qui se produisent dans la réalité.

Ainsi, tandis que, d'après la théorie ordinaire, la courbe des vitesses, correspondant au mouvement vibratoire, s'avancerait uniformément sans se déformer, en réalité cette courbe s'avance uniformément encore, mais en se déformant d'une manière continue.

M. Hugoniot consacre un intéressant Chapitre au mouvement d'un mobile soumis à la pression d'une colonne gazeuse; il fait ressortir, à ce sujet, toute l'insuffisance de la théorie du mouvement des projectiles, qu'avaient tenté d'édifier Lagrange et, après lui, Piobert.

Il termine par d'importantes considérations sur les discontinuités qui peuvent naître d'elles-mêmes dans le mouvement des fluides, sans qu'on les ait introduites dans les conditions imposées aux limites.

Callandreau. — Sur le développement en séries du potentiel des sphéroïdes de révolution. (127-154).

Poisson a donné, dans la *Connaissance des Temps* pour 1829, deux formules pour représenter le potentiel de l'attraction d'un sphéroïde homogène de densité ρ

$$r = a(1 + \alpha y'),$$

sur un point extérieur ou intérieur situé à la distance r du centre du sphéroïde. Poisson distingue deux cas :

1° Le sphéroïde attirant est tout entier compris dans une sphère décrite de l'origine comme centre avec r pour rayon. Alors, si l'on désigne par $d\omega$ l'élément de la surface sphérique de rayon unité, et qu'on désigne par P_1, P_2, ... les coefficients du développement de

$$\left(1 - 2\frac{r'}{r}p + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 = \frac{r'}{r}P_1 + \frac{r'^2}{r^2}P_2 + \ldots,$$

on aura, pour le potentiel du sphéroïde sur les points extérieurs suffisamment éloignés de la surface,

$$V_r = \frac{4}{3}\pi\rho a^3\frac{1}{r} + \rho\sum_0^\infty \frac{1}{r^{n+1}}\int\left(\int_a^H r'^{n+2}\,dr'\right)P_n\,d\omega.$$

2° Si la sphère de rayon r est tout entière comprise dans le sphéroïde et à

l'intérieur de la sphère de rayon a, le potentiel aura pour valeur

$$V_i = 2\pi\rho a^2 - \frac{2\pi\rho r^2}{3} + \rho \sum_0^\infty r^n \int \left(\int_a^u \frac{dr'}{r'^{n-1}} \right) P_n \, d\omega.$$

Mais ces formules s'appliquent-elles à toutes les positions du point attiré? C'est là le point que M. Callandreau se propose d'élucider.

Il y parvient en s'aidant du théorème suivant, qui n'est qu'une application d'une proposition bien connue de Dirichlet.

1° Si V_e, V_i vérifient respectivement les équations

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V_e}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V_e}{\partial \theta}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V_i}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V_i}{\partial \theta}\right)\right]\right. = -4\pi\rho;$$

2° Si V_e, V_i et leurs premières dérivées par rapport à r et θ sont continues à l'extérieur et à l'intérieur du corps et s'accordent pour la surface du corps, l'ensemble des formules V_e et V_i représentera le potentiel en tous les points de l'espace.

Il ne reste, grâce à ce théorème, qu'à constater que la continuité n'est pas rompue à la surface et que V_e, V_i; $\frac{\partial V_e}{\partial r}$, $\frac{\partial V_i}{\partial r}$, $\frac{\partial V_e}{\partial \theta}$, $\frac{\partial V_i}{\partial \theta}$ y prennent les mêmes valeurs.

Cette question peut, dans le cas des sphéroïdes de révolution, être réduite à une autre plus facile. L'auteur montre en effet que les séries

$$V_e = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2\pi\rho X_n}{n+3} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{-1}^{+1} r^{n+3} X_n \, d\mu,$$

$$V_i = \pi\rho \int_{-1}^{+1} r^2 \, d\mu - \frac{2\pi\rho r^2}{3} + 2\pi\rho X_1 r \int_{-1}^{+1} r X_1 \, d\mu$$
$$+ 2\pi\rho X_2 r^2 \int_{-1}^{+1} \log r X_2 \, d\mu + \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{2\pi\rho X_n}{2-n} r^n \int_{-1}^{+1} r^{2-n} X_n \, d\mu,$$

où X_n désigne un polynôme de Legendre, représenteront le potentiel du sphéroïde pour les points extérieurs et intérieurs respectivement, si les valeurs de $\frac{1}{r^{n+1}}$, r^{n+3}, ..., développées en partant de l'équation

$$r = a(1 + \alpha y),$$

étant substituées dans les expressions de V_e, V_i, la convergence absolue des séries est assurée.

M. Callandreau donne, dans des cas très étendus, le moyen de reconnaître la convergence de ces deux séries.

LIXe Cahier, 1889.

Léauté. — Sur une condition du bon fonctionnement des installations mécaniques comportant des transmissions par liens rigides ou flexibles. (1-6).

Les installations mécaniques établies d'après les règles ordinaires donnent lieu à de fréquents mécomptes, surtout quand elles comportent des transmissions à longues portées et des masses animées de grandes vitesses. Les engrenages sont le siège de chocs dangereux, les liens flexibles ont des oscillations d'une amplitude exagérée.

C'est que, sur l'arbre de la machine à vapeur, la poussée motrice est loin d'être constante; il existe d'ordinaire des points morts où la composante tangentielle de cette poussée est nulle. Il y a donc des périodes pendant lesquelles l'ensemble mécanique fonctionne sous sa seule inertie, sans être soumis à d'autres forces qu'aux résistances qu'il doit vaincre. De là des mouvements relatifs en arrière qui, nés de la machine, se transmettent dans tout le réseau et qui, aux points de jonction, sont capables de produire ces chocs et ces oscillations.

Pour éviter ces mouvements en arrière, il suffit que, même dans le cas limite de la puissance nulle, le mouvement ne cesse jamais, pour chacune des portions du système, de se transmettre dans le sens normal. On obtiendra cette condition en exprimant que l'accélération de chaque portion de l'ensemble dans le mouvement retardé qu'elle prend alors est supérieure à l'accélération de la portion qui précède et inférieure à celle de la portion qui suit.

Si donc il s'agit d'un engrenage, soient N_1 le nombre de tours par minute, en marche normale, de la roue menante; R_1 son rayon; $\mathfrak{N}_1$ sa *caractéristique cinématique*, c'est-à-dire le nombre de tours qu'elle ferait sous la seule action des résistances si l'on supprimait brusquement la puissance; T_1 le temps pendant lequel elle tourne dans ces conditions; γ_1 l'accélération du mouvement retardé ainsi défini; on a

$$\frac{2\pi R_1 N_1}{60} = \gamma_1 T_1, \qquad 2\pi R_1 \mathfrak{N}_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 T_1^2$$

et deux équations analogues pour la roue menée. La condition $\gamma_1 < \gamma_2$, si l'on tient compte de ce que les nombres de tours N_1 et N_2 sont inversement proportionnels aux rayons R_1 et R_2, donne

$$\frac{N_1}{\mathfrak{N}_1} > \frac{N_2}{\mathfrak{N}_2}.$$

Ainsi, pour être assuré d'éviter dans un ensemble mécanique les changements relatifs de sens et les perturbations qui en résultent, il suffit que, pour chaque arbre, le rapport du nombre de tours faits par minute à la caractéristique cinématique aille en augmentant constamment à mesure qu'on s'éloigne de la machine.

Le raisonnement ne s'applique pas au premier point de jonction, celui sur lequel agit directement la machine. M. Léauté a déjà montré que, dans ce cas,

le quotient $\frac{N}{n}$, compté sur l'arbre du volant, doit être inférieur au quotient correspondant du premier pignon diminué du terme $9000\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{P}{F}$, où P est la puissance de la machine en chevaux à l'indicateur; F la force vive des masses mises en mouvement depuis le moteur jusqu'au pignon exclusivement; $\frac{1}{k}$ la fraction de l'action tangentielle moyenne de la vapeur rapportée à la circonférence du volant et représentant le minimum de cette action.

Liouville (*R.*). — Mémoire sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications. (7-76).

Ce Mémoire a pour objet l'étude des équations différentielles de la forme

$$(1)\qquad \frac{d^4y}{dx^4}+a_1\frac{dy^3}{dx^3}+3a_2\frac{dy^2}{dx^2}+3a_3\frac{dy}{dx}+a_4=0,$$

où les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 sont des fonctions quelconques de x et de y.

Cette étude est faite à l'aide des substitutions générales

$$(2)\qquad x'=f(x,y),\qquad y'=\varphi(x,y)$$

et des expressions qu'elles laissent invariantes. L'auteur a obtenu ces invariants en profitant de la liaison qu'il établit entre l'équation proposée et un système d'équations différentielles linéaires qui reste toujours associé à l'équation dans toutes les transformations que lui font subir les substitutions précédentes.

La connaissance de ces invariants conduit tout naturellement à la solution de ce problème, du moins dans les cas ordinaires :

Étant données deux équations du type (1), reconnaître si elles peuvent être réduites l'une à l'autre par l'une des transformations (2) et effectuer cette réduction quand elle est possible.

Il existe toutefois des équations pour lesquelles la construction successive des invariants ne peut être faite d'après la méthode générale. Ces équations exceptionnelles présentent d'ailleurs une simplicité particulière.

Parmi les applications de cette théorie à l'intégration elle-même, la plus étendue est relative aux équations dont l'ordre peut être abaissé parce que leurs coefficients cessent, après certaines transformations, de contenir l'une des variables.

M. R. Liouville indique les caractères auxquels ces équations sont reconnaissables et les calculs qui permettent de les ramener à celle-ci :

$$\frac{dy}{dx}+\alpha_1y^3+3\alpha_2y^2+3\alpha_3y+\alpha_4=0,$$

dans laquelle α_1, α_2, α_3, α_4 sont des fonctions quelconques de x.

L'auteur signale en second lieu un second type très simple d'équations qui peuvent se grouper par couples; celles d'un même couple s'intègrent à la fois; quelques-unes sont rendues linéaires par une transformation convenable.

On est encore conduit à des équations linéaires quand on cherche les conditions pour qu'une équation du type (1) représente les lignes géodésiques d'une surface.

Quand une pareille équation représente les géodésiques d'une surface, dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = [f(u) + F(v)](du^2 + dv^2),$$

sans que l'on connaisse d'ailleurs $f(u)$ ni $F(v)$, la réduction de l'élément linéaire à la forme précédente dépend d'une équation différentielle *linéaire et du second ordre,* dont l'intégration fournit aussi l'intégrale complète de l'équation proposée.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par F. Klein et A. Mayer [1].

Tome XXX, 1887.

Lilienthal (*R. v.*). — Sur la théorie des surfaces des centres de courbure. (1-14).

L'auteur a publié précédemment des *Recherches sur la théorie générale des surfaces courbes et des systèmes de rayons rectilignes* (Bonn, 1886). Il montre ici l'avantage que présente la méthode qu'il a employée dans l'étude de la courbure des surfaces des centres de courbure, en se plaçant dans le cas où, ni la surface d'où l'on part, ni aucune de ses deux surfaces des centres de courbure, n'est ou bien une sphère, ou bien une surface développable. En désignant par ρ_1 et ρ_2, ou $\rho_1 > \rho_2$, les deux rayons de courbure principaux en un point non singulier d'une surface, l'auteur appelle première et seconde surfaces des centres de courbure les surfaces correspondant respectivement aux rayons ρ_1 et ρ_2. Il établit tout d'abord les formules relatives à chacune de ces deux surfaces qui donne l'équation aux rayons de courbure principaux et l'équation de leurs lignes de courbure et de leurs lignes asymptotiques et retrouve par une voie simple des résultats obtenus, d'autre part, par Halphen et Ribaucour.

Hilbert (*D.*). — Sur un mode de représentation des expressions invariantes dans le domaine des formes binaires. (15-29).

Reproduction abrégée et extension sur certains points des résultats exposés par l'auteur, dans sa dissertation inaugurale *Sur les propriétés invariantes de certaines formes binaires, et en particulier des fonctions sphériques.*

Meyer (*F.*). — Sur la théorie des fonctions entières réductibles à n variables. (30-74).

La théorie de la réductibilité des fonctions entières a été étudiée jusqu'ici, surtout à un point de vue particulier. Ou bien il s'agissait, comme l'a fait

[1] Voir *Bulletin*, t. XIII, p. 58-92; 1886.

Serret dans son *Algèbre*, d'établir sur une base solide les propositions fondamentales de l'Algèbre supérieure, et, en particulier, de la théorie des substitutions. Ou bien encore, le but principalement poursuivi n'était point en réalité algébrique, mais se rapportait presque exclusivement à l'application ultérieure des résultats obtenus à la théorie des nombres; c'est la voie suivie par Kronecker et le but vers lequel tendaient ses efforts autant dans la série des leçons faites sur ce sujet, à l'Université de Berlin, que dans les résultats publiés dans son Mémoire *Théorie arithmétique des quantités algébriques.*

L'auteur s'est placé à un point de vue plus algébrique : il s'est proposé dans ce travail de développer le côté purement algébrique de la question et cela en appuyant à dessein sur le développement pratique et effectif des calculs. L'importance de l'étude des cas où une fonction entière à un nombre quelconque de variables peut se décomposer en plusieurs facteurs est considérable; en Géométrie, tout spécialement, les cas des décompositions des formes rationnelles trouvent, à chaque instant, leur application.

Cayley (*A.*). — Sur les équations auxquelles satisfont les quantités L de Kiepert dans la transformation des fonctions elliptiques. (75-77).

Si l'on compare le Mémoire de Klein, sur la transformation (*Math. Ann.*, t. XIV, p. 144; 1878), à celui de Kiepert, *Sur la division et la transformation des fonctions elliptiques* (*Math. Ann.*, t. XXVI; 1886), on reconnaît que la quantité L de Kiepert est, en réalité, le carré du multiplicateur dans l'intégrale rendue normale au moyen du facteur $\sqrt[12]{\Delta}$.

L'auteur donne pour quelques cas particuliers une vérification de cette propriété.

Cayley (*A.*). — Note sur l'équation sextique de Jacobi. (78-84).

Soient A, B, C, D, E, F les racines carrées prises avec un signe déterminé des racines z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_∞ de l'équation

$$(z-a)^6 - 4a(z-a)^5 + 16b(z-a)^3 - 4c(z-a) + 5b^2 - 4ac = 0,$$

il existe entre ces six quantités des systèmes de trois équations linéaires (Cf. Brioschi, *Funzioni ellittiche*, Milan, p. 402; 1880). L'auteur étudie dans cette Note les différentes relations qui existent entre ces systèmes d'équation.

Cayley (*A.*). — Sur l'intersection des courbes. (85-90).

Remarques sur le Mémoire de Bacharach, *Sur le théorème des points d'intersection de Cayley* (*Math. Ann.*, t. XXVI, 274-299; 1885). L'auteur n'admet pas que l'on doive rejeter comme non valable la méthode de l'énumération des constantes.

Delisle (*A.*). — Détermination de la fonction la plus générale qui satisfait à l'équation fonctionnelle relative à la fonction σ. (97-119).

Publication d'un Mémoire posthume tel que l'auteur l'avait écrit, et avec une lacune en un point important que l'auteur avait nettement reconnue et signalée. On sait que la fonction $\sigma(u)$ satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}&\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)\\&+\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1)\\&+\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)=0.\end{aligned}$$

Weierstrass (*Sitzungsber.* Berlin, 1882, p. 508) a énoncé ce fait que cette équation pouvait être considérée comme suffisante à définir la fonction σ. Il a donné quelques indications sur la marche à suivre pour établir le résultat. Ce sont ces indications que l'auteur a développées dans le présent Mémoire.

Study (*E.*). — Sur les formes linéaires ternaires (120-126).

L'auteur se propose dans cette Note d'établir que les calculs symboliques suffisent pour établir toutes les relations entre les invariants ou les expressions symboliques.

Pasch (*M.*). — Sur la Géométrie projective et la représentation analytique des êtres géométriques. (127-131).

L'auteur revient, à propos d'une Note de M. Ventura Reyes y Prosper (*Math. Ann.*, XXIX, p. 154), sur les considérations relatives à l'indépendance de la géométrie métrique qu'il a exposées dans ses *Leçons sur la Géométrie récente;* Leipzig, 1882.

Pasch (*M.*). — Sur quelques points de la théorie des fonctions. (132-174).

Contributions à l'étude des principes fondamentaux de la théorie des fonctions telle qu'elle se trouve aujourd'hui constituée grâce aux travaux des du Bois-Reymond, Darboux, Dini, Cantor, Harnack, Scheffer et Thomae.

Appell (*P.*). — Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes (155-156).

Exemple simple de fonction de trois variables réelles satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$ et qui admet, en un point de l'espace, plusieurs déterminations échangeables entre elles si l'on décrit des courbes fermées entourant une ligne singulière.

Schafheitlin (*P.*). — Sur la représentation de la série hypergéométrique par une intégrale définie. (157-178).

On sait, depuis Euler, que la série hypergéométrique peut être représentée, à un facteur constant près, par l'intégrale

$$\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du.$$

L'auteur établit l'existence d'un mode de représentation tout différent; sous le signe $\int$ apparaissent les fonctions de Bessel, et l'intégrale n'est valable que pour les points de l'axe réel (*voir* plus loin la Note de Sorrine parue à la fin du même volume).

Kneser (*A.*). — Sur le genre (Gattung) du plus petit ordre possible, qui comprend les genres de quantités algébriques donnés. (179-202).

Soient ξ, ξ', ... un nombre quelconque d'irrationnelles algébriques et soit

$$\eta = u\xi + u'\xi' + \ldots,$$

où u, u', ... sont des coefficients indéterminés. L'auteur se propose d'étudier dans ce Mémoire de quelle façon le caractère algébrique de la quantité η est déterminé par le caractère algébrique des quantités ξ, ξ', ... Il s'occupe en particulier de la détermination du degré de l'équation irréductible dans un domaine rationnel donné à laquelle satisfait la quantité η et montre l'application des résultats obtenus tant en Algèbre que dans la théorie des groupes.

Segre (*C.*). — Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. (203-226).

Les résultats obtenus par Veronèse (*Math. Ann.*, t. XIX) et par l'auteur (*Atti della R. Acc. di Torino*, t. XIX et XXI) et relatifs aux surfaces réglées d'ordre n quelconque et de genre p égal à 0, 1 et 2, avaient conduit à penser que, pour le cas général où p est quelconque, tout aussi bien que dans les cas particuliers déjà étudiés, il existe un espace tel que les surfaces appartenant à des espaces inférieurs, soient les projections sur ces derniers des surfaces contenues dans celui-là. C'est en réalité ce qui arrive. Si n est suffisamment grand, l'espace cherché est à $n - 2p + 1$ dimensions. De là une méthode simple et naturelle pour étudier ces surfaces, méthode qui conduit à d'importantes et de nombreuses propositions. Il était nécessaire d'établir tout d'abord certaines propriétés relatives aux courbes algébriques dans un espace quelconque. La première Partie est consacrée à cette étude et constitue ce premier Mémoire. La seconde Partie formant un tout bien distinct paraîtra ultérieurement.

Voss (*A.*). — Contribution à la théorie des surfaces algébriques. (Deuxième Partie). Sur les systèmes de rayons correspondant à deux surfaces reliées ensemble univoquement. (227-290).

Hurwitz (*A.*). — Sur une courbe particulière du troisième ordre. (291-298).

Soient K et K' deux cercles égaux situés dans des plans parallèles, perpendiculaires à la ligne verticale OO' qui joint leurs centres. Les différents points de la circonférence K sont reliés par des fils aux points correspondants, et immédiatement placés au-dessous de la circonférence K'. Chacun des fils est tendu par un poids. Si l'on fait tourner la circonférence K autour de OO', les fils qui

d'abord se trouvaient sur un cylindre, se trouveront, après une rotation déterminée, sur un hyperboloïde de révolution déterminé. Quelle est la courbe qui correspond à une courbe donnée sur l'une de ces hyperboloïdes, lorsque, par une rotation nouvelle, cet hyperboloïde est transformé en un autre? L'auteur examine en particulier le cas où la courbe donnée est une génératrice de l'hyperboloïde appartenant au système autre que celui formé par les fils. Les courbes correspondantes sont des courbes du troisième ordre.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur le nombre des transcendantes propres à une équation différentielle algébrique. (299-307).

L'auteur, comme suite de son Mémoire paru dans les *Acta mathematica*, t. III, sur les transcendantes propres à une équation différentielle quelconque du premier ordre, étudie ici une question plus générale, et se propose de montrer qu'il y a toujours des équations différentielles algébriques irréductibles d'ordre donné quelconque, pour lesquelles le nombre des transcendantes qu'elles définissent est fini, mais supérieur à l'ordre de l'équation différentielle.

Segre (*C.*). — Sur un théorème de la Géométrie à n dimensions. (308).

Remarques sur un théorème donné par M. Klein, dans son Mémoire sur la signification géométrique du théorème d'Abel, dans le cas des intégrales hyperelliptiques (*Math. Ann.*, t. XXVIII).

Riecke (*E.*). — Sur quelques relations entre les phénomènes hydrodynamiques et électriques. (309-325).

Étude du mouvement d'un liquide sans frottement qui occupe l'espace compris entre des corps fermés et s'étend jusqu'à l'infini. L'auteur examine en particulier les mouvements oscillatoires semblables à ceux étudiés théoriquement et pratiquement par Bjerknes.

Il y a des analogies entre les courants hydrodynamiques et les courants galvaniques lorsque l'on tient compte du frottement intérieur.

Love (*A.-E.-H.*). — Sur les recherches récentes faites en Angleterre sur les mouvements des vortex. (326-344).

L'auteur expose rapidement les principaux résultats auxquels sont arrivés les mathématiciens anglais dans l'étude du mouvement des vortex dans un liquide parfait. Après avoir rappelé les résultats fondamentaux obtenus par Helmholtz et Sir W. Thomson, il passe successivement en revue les travaux ultérieurs de ce dernier : *Vortex Statics* (*Proc. R. Soc. Edinb.*, 1876 et *Phil. Mag.*, t. X_5; 1880). *On maximum and minimum energy in vortex motion* (*Brit. Ass. Rep.*; 1880, *Nature*, t. XXIII, p. 618); *On the vibrations of a columnar vortex* (*Phil. Mag.*, t. X_5); de J.-J. Thomson, *A Treatise on the motion of vortex-rings* (London, 1883); de Lewis, *On the images of vortices in a spherical vessel* (*Quart. J.*, t. XIV); de Hicks, *On the problem of two pulsating spheres in a fluid* (*Camb. Phil. Proc.*, t. III): *On toroidal functions* (*Phil. Trans.*, 1881): *On the steady motion and small vibrations of a*

hollow vortex (*Phil. Trans.*, 1884); *Researches on the theory of vortex-rings* (*Phil. Trans.*, 1885); de Hill, *On some properties of the equations of Hydrodynamics* (*Quart. J.*, t. XVII, *Camb. Phil. Trans.*, 1883); *On the motion of fluid part of which is moving rotationnally and part irrotationally* (*Phil. Trans.*, 1884); *On the differential equation of cylindrical and annular vortices* (*Proc. L. M. S.*, t. XVI). L'auteur termine en indiquant les problèmes particuliers traités dans la question des filaments en vortex par Greenhill, Coates, Hicks, Basset et Lewis.

Fricke (*R.*). — Sur les sous-groupes particuliers de genre $p = 1$, qui sont contenus dans le groupe des substitutions linéaires ω. (345-400).

Stickelberger (*L.*). — Sur un théorème de M. Noether. (401-409).

Le théorème donné par Noether dans les *Math. Ann.*, t. VI, p. 351, a été de nouveau démontré par Voss (*Id.*, t. XXVII, p. 528-532). L'auteur se propose ici d'établir les relations qui existent entre la méthode de Noether et celle de Voss, ce qui le conduit à une démonstration nouvelle du théorème dont voici l'énoncé :

Si Φ, F, f sont des fonctions entières de x, y, les deux premières sans diviseur commun, et si, dans le voisinage de toute position x_0, y_0 à distance finie, on peut mettre f sous la forme $\Psi\Phi + XF$, où Ψ et X représentent des séries ordonnées suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, f peut être mis sous la forme $\psi\Phi + \chi F$, ψ et χ représentant des fonctions rationnelles entières.

Noether (*M.*). — Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions algébriques. (410-417).

Examen des remarques faites par Voss et rappelées précédemment à propos du théorème dont nous venons de reproduire l'énoncé. Les démonstrations qui en ont été données sont de nature purement algébrique ou bien moins directes et font entrer en ligne de compte la considération de la convergence de certains développements.

Voss (*A.*). — Sur la théorie du déterminant de Hesse. (418-424).

L'auteur recherche relativement à une forme quelconque f le covariant qui, égalé à zéro, exprime qu'un point parabolique de f est aussi un point parabolique du hessien H de f. La formation de la forme H_H dans le cas général paraît pénible. En supposant $H = 0$, on peut donner de cette forme une représentation simple.

Krause (*M.*). — Sur les développements des fonctions doublement périodiques de seconde et de troisième espèce en séries. (Premier Mémoire). (405-436).

La théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce a été

établie par Hermite dans les Notes qu'il a ajoutées au *Traité de Calcul différentiel et intégral* de Lacroix, et plus tard dans les Notes *Sur quelques applications des fonctions elliptiques;* Paris, 1885. Les fonctions de seconde espèce se forment de la façon la plus simple à l'aide de fonctions primaires dont le développement en séries trigonométriques a été donné successivement par Jacobi, par Scheibner : *Sur la réduction des intégrales elliptiques à la forme réelle;* Leipzig, 1879, 1880, et par Hermite (*Ann. de l'École Norm. sup.*, t. II_3, 1885).

Les fonctions de troisième espèce ont fait le sujet de travaux importants de Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 2e sem. 1861; 2e sem. 1862); de Biehler, *Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce* (Paris, 1879, et *Journal de Crelle*, t. 88); d'Appell, *Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espece* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1883; *Ann. de l'École Norm. sup.*, t. I_3 et t. II_3). *Voir* aussi HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I; 1886.

L'auteur résume rapidement les résultats obtenus jusqu'ici et il parvient, par une méthode élégante, à généraliser et à étendre à tous les cas les formules données par Hermite pour les fonctions de seconde espèce. Il suffit, dès lors, de développer en séries trigonométriques les fonctions primaires pour résoudre la question d'une façon générale.

Hilbert (*D.*). — Sur les singularités de la surface discriminante. (437-441).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ les coordonnées homogènes d'un point dans un espace à n dimensions. A ce point on peut faire correspondre une fonction entière de degré n d'une variable t

$$X(t) = x_1 t^n - x_2 t^{n-1} - \ldots - x_{n+1}.$$

$X(t) = 0$ représente alors un plan qui, lorsque t varie, enveloppe la surface discriminante. L'auteur étudie les singularités de cette surface, ou plutôt de cet espace.

Maisano (*G.*). — Le discriminant de la forme binaire du sixième ordre. (442-452).

L'auteur dans un Mémoire sur la sextique binaire (*Atti Acc. Lincei*, t. XIX) a employé le discriminant établi par Brioschi dans les *Annali di Matematica*. Il donne ici le calcul symbolique de ce discriminant en s'appuyant sur les résultats de Gordan relatifs aux résultants de deux formes binaires du cinquième ordre.

Schlesinger (*O.*). — Sur les courbes conjuguées; et, en particulier sur la relation géométrique entre une courbe du troisième ordre et une courbe de troisième classe qui lui est conjuguée. (453-477).

On dit qu'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre $u_n^n = 0$ et une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe

$u_\alpha^n = 0$ sont conjuguées lorsque l'invariant simultané bilinéaire de ces deux formes est égal à zéro (ROSANES, *Journal de Crelle*, t. 76, p. 316). Le cas où n est égal à 2 a été étudié depuis longtemps, en particulier par Hesse, dans le *Journal de Crelle*, t. 45, p. 87, par Salmon (*voir* SALMON-FIEDLER, *Kegelschnitte*, 2e édition, p. 145), par Rosanes (*Math. Ann.*, t. VI), par Smith (*Proc. L. M. S.*, t. II) et par M. Darboux (*Bull. des Sciences math.*, t. I_1).

L'auteur donne quelques propositions générales dans le cas de n quelconque et, lorsque n est égal à 3, il montre en particulier que, si une courbe de troisième ordre est conjuguée d'une courbe de troisième classe, la première contient une infinité de pentagones polaires relativement à la seconde.

Bolza (*O.*). — Représentation des invariants rationnels entiers de la forme binaire du sixième degré au moyen des zéros des fonctions θ correspondantes. (478-495).

Quelques cas particuliers de cette question générale avaient été jusqu'ici traités par Rosenhain et Thomæ. L'auteur traite le problème avec tous les développements qu'il comporte.

Maschke (*H.*). — Sur les groupes de substitutions linéaires, quaternaires, finis des modules de Borchardt. (496-515).

Krause (*M.*). — Sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde et de troisième espèces en séries trigonométriques. (Second Mémoire). (516-534).

Weltzien (*C.*). — Sur la théorie des courbes planes dont les coordonnées s'expriment sous forme rationnelle entière de deux fonctions linéaires et de deux racines carrées de fonctions entières d'un paramètre. (535-545).

Étude des courbes représentées par les équations

$$\begin{aligned} \rho x &= (a_1 t + a_2)\sqrt{E(t)} + (a_3 t + a_4)\sqrt{F(t)}, \\ \rho x_2 &= (b_1 t + b_2)\sqrt{E(t)} + (b_3 t + b_4)\sqrt{F(t)}, \\ \rho x_3 &= (c_1 t + c_2)\sqrt{E(t)} + (c_3 t + c_4)\sqrt{F(t)}, \end{aligned}$$

où $E(t)$ et $F(t)$ sont des fonctions entières de t. Il ne considère d'une façon spéciale que les cas où la courbe est du quatrième, cinquième ou sixième ordre.

Bolza (*O.*). — Sur les formes linéaires du sixième ordre transformables en elles-mêmes par des substitutions linéaires. (546-552).

Résumé d'un travail paru *in extenso* dans l'*American Journal of Mathe-*

matics, important au point de vue de la théorie des fonctions modulaires hyperelliptiques.

Henri (*K.*). — Intégration des équations différentielles linéaires, régulières, du second ordre, au moyen du développement en fractions continues des intégrales abéliennes entières de troisième espèce. (553-560).

Les résultats obtenus par une voie différente sont ceux établis par Humbert (*Journ. de l'École polytechnique*, XLVIIIe Cahier).

Hilbert (*D.*). — Sur les faisceaux de formes binaires dont les combinants ont une propriété particulière. (561-570).

Généralisation de la théorie des formes transformables en elles-mêmes par des substitutions linéaires.

Caspary (*F.*). — Sur une démonstration simple des formules fondamentales de Rosenhain. (571-577).

L'auteur a déjà démontré et généralisé les formules de Rosenhain dans des travaux précédents (*Journal de Crelle*, t. 94, p. 83; t. 97, p. 165; *Math. Ann.*, t. XXIX, p. 493). Il a appliqué la même méthode aux fonctions thêta d'un nombre quelconque de variables dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. CIV, p. 1094 et 1255).

Il revient ici sur les formules de Rosenhain pour en donner une nouvelle démonstration qui montre, une fois de plus, les liens qui existent entre les travaux de Rosenhain et ceux de Göpel.

Kürschák (*J.*). — Sur les polygones inscrits et circonscrits au cercle. (578-581).

Sonine (*N.*). — Sur les fonctions cylindriques. (582-583).

M. Schafheitlin (*Math. Ann.*, t. XXX, *voir* plus haut) a donné la représentation de la série hypergéométrique par une intégrale définie contenant les fonctions de Bessel ou fonctions cylindriques. La même expression avait été obtenue antérieurement par Sonine dans les *Recherches sur les fonctions cylindriques* publiées dans le t. XVI des *Math. Ann.*

Tome XXXI, 1888.

König (*J.*). — Sur une nouvelle interprétation des équations fondamentales de la Dynamique. (1-42).

Les équations fondamentales de la Dynamique sont, en réalité, des propositions déduites de l'expérience, ou plutôt, comme, en fait, on ne peut réellement pas les vérifier d'une façon absolue par l'expérience, ce sont des axiomes.

L'auteur se propose, dans ce Mémoire, d'étudier quelles sont les lois simples, les principes de la Mécanique, qui comprennent les équations fondamentales de la Dynamique, desquelles ces lois sont des conséquences purement mathématiques. Nous devons renvoyer au Mémoire pour l'étude de cette question délicate.

Schönflies (*A.*). — Sur les configurations régulières n_3. (43-69).

Dans le présent Mémoire, l'auteur se propose d'établir et de généraliser les propositions sur les configurations régulières qu'il a données ailleurs dans les *Göttingen Nachrichten*, p. 410; 1887. Les configurations dont il s'agit sont toutes comprises dans un ordre plus général de configurations, celles qui se déduisent de cycles de polygones inscrits et circonscrits d'une façon régulière les uns aux autres et les uns dans les autres. L'auteur donne les différentes configurations de cette espèce et aussi les groupes des substitutions qui correspondent à chacune d'elles.

Les travaux de Kantor (*Sitzb. Wien.*, t. LXXXIV, p. 915 et 1291), de Martinetti (*Ann. di Matem.*, t. XV_2, p. 1) et de Schröter (*Journal de Crelle*, t. 100, p. 237) se trouvent ainsi reliés et complétés.

Busche (*E.*). — Sur la fonction φ d'Euler (70-74).

Gauss a montré que la fonction $\varphi(x)$ d'Euler qui représente le nombre des nombres premiers à x et inférieurs à x jouit de la propriété définie par l'équation

$$\sum_x \varphi(x) = m \qquad (m \equiv 0, \bmod x);$$

l'auteur donne une proposition plus générale, comprenant la précédente. Citons un autre cas particulier du théorème général. On a

$$\Sigma \varphi(x) = n^2,$$

lorsque x prend toutes les valeurs pour lesquelles $\frac{n}{x} - \mathrm{E}\left(\frac{n}{x}\right) \gtreqless \frac{1}{2}$.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur les relations algébriques qui, relativement à une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, existent entre les intégrales fondamentales et leurs dérivées. (75-84).

Soit l'équation irréductible

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0;$$

il ne peut exister de relation algébrique entre deux intégrales fondamentales et leurs dérivées que si $f_1(x)$ est la dérivée logarithmique d'une fonction algébrique, et dans ce cas la relation

$$y_1y_2' - y_2y_1' = ae^{-\int f_1(x)\,dx}$$

est la seule relation algébrique qui existe.

Lilienthal (*R. von*). — Sur une espèce particulière de systèmes de rayons. (85-95).

En un point d'une surface on considère la normale et les deux tangentes aux lignes de courbure passant par ce point. Si par ce point on mène une droite faisant avec les droites construites précédemment des angles constants, on obtient un système de rayons. L'auteur établit les principales formules relatives à un tel système et en tire quelques conclusions relativement aux relations entre les lignes de courbure et les lignes géodésiques.

Meyer (*F.*). — Sur la génération algébrique de toutes les courbes planes rationnelles du quatrième ordre, même lorsqu'elles se décomposent. (96-133).

Wiltheiss (*E.*). — Équations aux dérivées partielles des fonctions thêta hyperelliptiques et de leurs périodes. (134-155).

Dans le tome 99 du *Journal de Crelle*, l'auteur a établi les équations qui relient les dérivées partielles des fonctions thêta hyperelliptiques prises par rapport aux arguments et aux paramètres. Dans les *Math. Ann.*, t. XXIX, p. 272, à l'égard des fonctions thêta à deux variables, il a montré que les différentes expressions qui se présentaient dans ces équations étaient ou bien des covariants, ou en tout cas en relation des plus étroites avec la théorie des invariants.

L'auteur revient ici à la question générale des fonctions thêta hyperelliptiques à ρ variables. Il s'appuie non seulement sur la définition des fonctions thêta, mais aussi sur les propriétés principales dont elles jouissent et qui sont connues d'autre part. Il forme tout d'abord les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les périodes des intégrales normales de première et de seconde espèce, et en conclut ensuite les équations aux dérivées partielles relatives aux fonctions thêta elles-mêmes.

Schafheitlin (*P.*). — Sur une représentation sous forme d'intégrale de la série hypergéométrique. (156).

L'auteur reconnaît que la formule qu'il avait établie est due à Sonine (voir *Math. Ann.*, t. XXX, p. 157 et p. 582).

Dingeldey (*F.*). — Les concomitants des formes cubiques ternaires, et, en particulier, de la forme

$$x_1 x_3^2 - f x_2^3 + g_2 x_1^2 x_2 + g_3 x_1^3.$$

(157-176).

On emploie le mot *concomitant* comme terme collectif pour indiquer les invariants, les covariants, les contravariants, les formes intermédiaires. Ce travail peut être considéré comme le complément du Mémoire de Cayley *Sur les trente-quatre concomitants de la cubique ternaire* (*Amer. Jour. of Math.*) qui contient les concomitants relatifs à la forme

$$f = a x_1^3 + b x_2^3 + c x_3^3 + 6 l x_1 x_2 x_3.$$

2ud Part.

La courbe $f = 0$ est une cubique. Cette cubique peut avoir un point double, mais le cas où elle possède un point de rebroussement est exclus. De là la nécessité de compléter les calculs de Cayley. L'auteur avait d'abord choisi la forme $x_1 x_3^2 - 4x_2^3$; mais, sur une remarque de Klein, il a choisi de préférence la forme

$$x_1 x_3^2 - 4x_2^3 + g_2 x_1^2 x_2 + g_3 x_1^3,$$

intimement reliée à l'équation qui définit la fonction $\wp(u)$ de Weierstrass

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Dingeldey (*F.*). — Sur la transformation de l'équation de la courbe plane du troisième ordre à point double en sa forme normale. (177-181).

La transformation de l'équation de la courbe générale du troisième ordre en sa forme normale ou forme de Hesse

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6l x_1 x_2 x_3 = 0$$

a fait le sujet de nombreux travaux de Hesse, Aronhold, Clebsch et Gundelfinger. L'étude de la transformation, lorsque la courbe offre des singularités, n'a pas été faite. Dans la présente Note l'auteur examine le cas des courbes du troisième ordre possédant un point double, en renvoyant au Mémoire analysé précédemment en ce qui concerne les courbes à point de rebroussement. Il prend pour forme normale

$$f = a(x_1^3 + x_2^3) + 6l x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Schlesinger (*O.*). — Sur l'emploi des fonctions thêta dans les courbes du troisième ordre. Application aux courbes apolaires relativement à une courbe du troisième ordre. (182-219).

Kœnigsberger (*L.*). — Sur les relations algébriques entre les intégrales des équations différentielles linéaires. (220-226).

Soit

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \ldots + p_{m-1} y' + p_m y$$

une équation différentielle linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre à coefficients algébriques, y_1 étant une intégrale qui ne satisfait pas à une équation d'ordre inférieur au $m^{\text{ième}}$; existe-t-il une relation de la forme

$$y_2 = F[x, y, y'_1, y''_1, y_1^{(m-2)}],$$

F étant une fonction algébrique?

Pour le cas du troisième ordre par exemple, il faudrait que les trois intégrales fondamentales fussent de la forme

$$e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_1-g\right)\frac{dx}{f}}, \quad e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_2-g\right)\frac{dx}{f}}, \quad e^{\int\left(\frac{c}{3}+\alpha_3-g\right)\frac{dx}{f}},$$

où c est une constante, f et g des fonctions algébriques quelconques de x. Et

alors on a la relation

$$v_2 = f y'_1 + g y_1.$$

Fricke (*R.*). — Sur les sous-groupes particularisés dans le groupe des fonctions modulaires elliptiques. (227-234).

Ce travail comprend une généralisation des résultats obtenus par l'auteur dans les sections I et II de son Mémoire *Sur les groupes particularisés de genre un* publiés dans le tome précédent des *Math. Ann.*

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés. (236-251).

Dans ce travail l'auteur revient sur la démonstration du théorème fondamental de Nœther pour donner, lui aussi, une contribution importante à l'étude qu'ont poursuivie Halphen, Voss, Stickelberger, Brill, Valentiner, Cayley, Bacharach, etc. L'auteur appuie d'une façon toute spéciale sur les propositions de Cayley sur l'intersection des courbes et sur la détermination des courbes par des points distincts ou des ensembles de points.

Killing (*W.*). — La composition des groupes de transformation finis, continus. (252-290).

Contribution importante à la théorie des groupes de transformation de Lie et suite des travaux de l'auteur sur l'extension de la notion d'espace (Braunsberg, 1884) et sur la théorie des transformations de Lie (*id.*, 1886).

Küpper (*C.*). — Sur le faisceau linéaire $g_m^{(2)}$ détaché par les ∞^2 droites C du plan sur une courbe C_m^p d'ordre m et de genre p. (291-301).

Généralisation des résultats de Nœther et application à la détermination du maximum du genre des courbes gauches et des surfaces réglées.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'abaissement de l'ordre des équations différentielles algébriques à l'aide d'intégrales connues. (302-308).

On a la proposition suivante qui s'étend immédiatement aux équations différentielles d'ordre quelconque :

« Parmi les équations différentielles algébriques du second ordre qui ne résultent pas immédiatement de la composition d'expressions différentielles du premier ordre et de leurs dérivées, il n'y a que les équations *linéaires* du second ordre qui jouissent de la propriété de pouvoir être réduites à des équations différentielles algébriques du premier ordre par l'adjonction d'*une* intégrale. »

Isenkrahe (*C.*). — Sur l'application de l'itération des fonctions à

la représentation des racines des équations algébriques et transcendantes. (309-317).

Dans le volume XXIX des *Math. Ann.*, Netto a publié un Mémoire *Sur un algorithme pour la résolution des équations numériques algébriques*, où il a montré que la résolution de l'équation

$$x^n - x - a = 0$$

pouvait être obtenue par l'emploi répété de l'opération

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{x_k + a}.$$

Hoffmann (*Arch. f. Math.*, p. 33; 1881) a montré que, relativement à l'équation

$$x^m - px^n + q = 0,$$

l'emploi des deux expressions

$$x = \sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}}$$

et

$$x = \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x^m}}$$

conduit à deux algorithmes dont l'itération fournit les racines réelles de l'équation proposée. M. Isenkrahe s'occupe de la généralisation de ces résultats et de la détermination de la convergence des algorithmes auxquels il a recours.

V. Gall. — Le système de formes complet de la forme binaire du septième ordre. (318-336).

L'ensemble des formules données par l'auteur forme un complément important qui vient s'adjoindre aux travaux de Sylvester (*Amer. Journ. of Math.*, t. II, p. 230) et de Hammond (*Proc. L. M. S.*, t. XIV, p. 85-88). Des formes fondamentales nouvelles importantes se trouvent ainsi ajoutées à l'ensemble déjà déterminé par Sylvester.

Nekrassof (*P.*). — Le module du maximum maximorum d'une fonction $\psi(re^{\varphi i})$ relativement à φ. Application de ses propriétés à la série de Lagrange. (337-358).

Ce Mémoire contient quelques-uns des résultats obtenus par l'auteur dans un travail publié dans le *Journal mathématique de Moscou*, t. XII, 1885, sur la série de Lagrange. Il forme une suite aux travaux de Cauchy : *Mémoire sur divers points d'Analyse* (*Mém. Acad. France*, t. VIII, 1829; *Résumé d'un Mémoire sur la Mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites* (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II; 1841), et de Rouché : *Mémoire sur la série de Lagrange* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cah. XXXIX, 1841). *Voir* aussi Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 477-480, 4e édition; 1877. Le travail de l'auteur précise et complète les résultats auparavant connus.

Neovius (*E.*). — Sur un problème géométrique particulier de minimum. (359-362).

Soit CAB un angle donné, on demande de mener par un point M une droite EMF telle que le segment EF détaché par les côtés de l'angle sur cette droite soit minimum.

Le problème a été traité depuis longtemps, mais on ne paraît pas avoir remarqué que l'équation du troisième degré auquel il conduit possède parfois trois racines telles que deux d'entre elles correspondent à un minimum et la troisième à un maximum.

Heun (*K.*). — Sur le multiplicateur linéaire homogène d'Euler pour l'intégration des équations différentielles linéaires régulières du second ordre. (363-373).

Dans ses *Inst. Calc. Integr.*, Euler s'est occupé avec détail de la détermination d'un multiplicateur linéaire homogène qui rende intégrable l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre. L'auteur expose tout d'abord cette méthode élégante d'intégration et, en la comparant à la théorie des équations différentielles linéaires de Riemann, en établit la base naturelle. Il montre, en particulier, que la méthode employée par Fuchs pour intégrer l'équation de Lamé découle immédiatement de la méthode d'Euler. Des considérations d'ordre plus général permettent de faire voir que ce cas particulier est le seul dans lequel la détermination du multiplicateur intégrant conduit à une simplification effective.

Brill (*A.*). — Sur les correspondances algébriques. (374-409).

Wiltheiss (*Ed.*). — Sur les séries de puissances des fonctions thêta hyperelliptiques. (410-423).

La distinction principale entre les fonctions thêta hyperelliptiques de Weierstrass et celles de Jacobi consiste surtout en ce que les coefficients du développement des premiers suivant les puissances des arguments sont des fonctions rationnelles des points de ramification et de certaines quantités qui se présentent dans les intégrales de seconde espèce. Si l'on détermine convenablement ces quantités dans les intégrales de seconde espèce, les coefficients, indépendamment d'un facteur commun, peuvent être rendus des fonctions entières des points de ramification. On n'avait pas de démonstration simple, immédiate, de cette propriété. L'auteur en donne une ici, en s'appuyant simplement sur la définition d'*une* fonction thêta par une intégrale de troisième espèce, sur les formules qui permettent par addition de systèmes de demi-périodes de passer de cette fonction aux autres et enfin sur le théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce.

V. Gall. — Les syzygants irréductibles de deux formes cubiques simultanées. (424-440).

Stroh (*E.*). — Sur un théorème de la théorie des formes. (441-443).

La théorème de Cayley sur le nombre des covariants linéairement indépendants relatifs à une forme binaire a été démontré à l'aide des développements en séries par Hilbert (*Math. Ann.*, t. XXX, p. 20); l'auteur se propose ici de le déduire sans calcul de la théorie de Gordan.

Stroh (*E.*). — Sur les covariants asyzygétiques du troisième degré d'une forme binaire. (444-454).

L'auteur cherche à établir des criteriums nouveaux, suffisants dans tous les cas, pour reconnaître si, dans un système de covariants donné, toute forme est irréductible, et, par suite, pour reconnaître nettement si l'on a affaire à un système complet de formes.

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie de la fonction gamma. (455-481).

Exposé des propriétés fondamentales de la fonction gamma.

§ 1. Première méthode pour le développement de la fonction Γ en un produit infini. Déduction des formules fondamentales.

§ 2. L'intégrale de Gauss et de Dirichlet pour $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$. L'intégrale de Cauchy pour $\log \Gamma(x+1)$.

§ 3. Autre méthode pour obtenir le développement en produit de $\Gamma(x)$.

§ 4. L'intégrale eulérienne de première espèce.

Hilbert (*D.*). — Sur les formes binaires de discriminant donné. (482-492).

Si l'on considère deux formes binaires du $\nu^{\text{ième}}$ ordre

$$\varphi = \alpha_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \alpha_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_2^\nu,$$

$$\psi = \beta_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \beta_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ldots + \beta_\nu x_2^\nu,$$

il y a dans la multiplicité simplement infinie des formes

$$k\varphi + m\psi,$$

en tout $2\nu - 2$ formes possédant un facteur linéaire élevé au carré.

Le produit de ces $2\nu - 2$ facteurs linéaires est donné par le déterminant fonctionnel des deux formes (φ, ψ), et les valeurs du rapport $\frac{k}{m}$ correspondant à ces $2\nu - 2$ formes s'obtiennent en égalant à zéro le discriminant de la forme $k\varphi + m\psi$. Dans le travail présent, l'auteur établit toutes les formes de cette nature pour lesquelles les $2\nu - 2$ rapports $\frac{k}{m}$ ont des valeurs donnees à l'avance.

ou, ce qui revient au même, pour lesquelles le discriminant $\delta(k, m)$ est une forme binaire donnée d'ordre $2\nu - 2$ relativement aux variables k et m.

Maisano (*G.*). — Le covariant steinérien de la forme binaire du sixième ordre. (493-506).

L'auteur appelle *covariant steinérien d'une forme binaire* f le covariant qui, égalé à zéro, représente les points du domaine binaire dont les premières polaires ont une racine double. Ce covariant s'annule identiquement si la forme fondamentale possède une racine triple. On reconnaît assez facilement que la condition que le covariant steinérien soit nul est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que la forme fondamentale possède un point triple.

L'auteur donne le calcul de ce covariant dans le cas de la forme binaire du sixième ordre.

Kneser (*A.*). — Recherches synthétiques sur les plans d'osculation des courbes gauches quelconques et sur les relations de réalité qui existent relativement à certains systèmes de coniques. (507-548).

Si, d'un point quelconque, on projette une courbe gauche donnée quelconque sur un plan, il y a autant de plans osculateurs qui passent par le centre de projection que la courbe plane possède de tangentes d'inflexion. Si l'on veut se rendre compte des différentes formes sous lesquelles on voit une même courbe en se plaçant en des points différents, il faut connaître combien passent de plans osculateurs à la courbe par un point quelconque, lorsque ce point occupe successivement toutes les positions. Ce nombre ne peut varier que si le point traverse la surface développable formée par les tangentes à la courbe, ou encore certains plans singuliers. L'espace se trouve donc divisé en régions, telles que, relativement à deux points situés dans la même région, le nombre des points d'inflexion apparents est le même. L'auteur étudie dans son Mémoire le mode de distribution de ces régions, détermine leur nombre et leurs caractères dans les cas les plus simples, ce qui le conduit à des théorèmes remarquables, en particulier sur les systèmes de coniques.

Simony (*O.*). — Sur quelques propositions arithmétiques obtenues en écrivant les nombres dans le système binaire. (549-566).

Gordan (*P.*). — Le discriminant de la forme du septième degré $f = a_x^7$. (567-609).

Les procédés de Bézout et de Cauchy permettent d'arriver rapidement à la détermination du discriminant d'une forme f; mais le discriminant se présente alors sous forme de déterminant, et non pas sous sa forme la plus naturelle, qui est celle où sont mis en évidence les invariants fondamentaux de f.

L'auteur applique, au cas du septième degré, précisément la même méthode

que celle qu'il a exposée dans ses *Vorlesungen über Invarianten*, t. II, et qui lui a fourni les résultats relatifs au quatrième, cinquième et sixième degrés.

Stolz (*O.*). — Sur deux espèces de quantités infiniment petites et de quantités infiniment grandes. (601-604).

SITZUNGSBERICHTE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU WIEN [1].

Tome LXXXI; 1880.

Weyer (*Emil*). — Sur des polygones complets inscrits. (80-84).

L'auteur montre qu'en général il n'existe pas de pentagone complet inscrit dans une courbe plane du quatrième ordre, mais que, s'il en existe un, il en existe une infinité. C'est ce qui arrive lorsqu'il existe sur la courbe trois points en ligne droite tels que les tangentes en ces points forment un triangle inscrit.

Stefan (*S.*). — Sur la force portative des aimants. (89-116).

La force portative d'un aimant est calculée dans deux cas.

Le premier est celui d'un anneau aimanté (à l'intérieur duquel il n'existe aucune masse magnétique libre) partagé en deux parties, l'aimant et l'armature, par un plan.

Le second cas est celui d'un système où l'aimant et l'armature réunis forment une sphère uniformément aimantée.

Boltzmann (*Ludwig*). — Sur la théorie du frottement des gaz. (117-158, avec 7 gravures sur bois).

Rappelons d'abord brièvement que, dans la première méthode employée par Maxwell (*Phil. Mag.*, t. XIX) pour la détermination de la constante de frottement ainsi que des constantes de diffusion et de conductibilité calorifique des gaz, il peut arriver que l'on trouve, pour ces constantes, des valeurs approchées qui diffèrent notablement entre elles, suivant l'hypothèse que l'on adopte pour la distribution des vitesses des molécules gazeuses. Cependant, Maxwell a montré, ensuite, que l'on aurait, pour les valeurs exactes de ces constantes, des résultats indépendants de la loi de distribution des vitesses, si l'on pouvait supposer que les molécules gazeuses se repoussent en raison inverse de la cinquième puissance de la distance de leurs centres. Cette nouvelle hypothèse, opposée à l'ancienne, d'après laquelle les molécules gazeuses se comporteraient comme des sphères élastiques, a été souvent mal interprétée. Boltzmann essaye de la reprendre tout en donnant, à côté de cette nouvelle théorie de Maxwell, de nouveaux développements sur l'ancienne hypothèse des sphères élastiques

---

[1] Voir *Bulletin*, t. X_2, p. 65.

et il montre que, par une étude, aussi approfondie que possible, de ces deux théories, l'on peut poser les bases de recherches nouvelles sur le sujet.

La présente série de publications, qui fait suite à de précédents travaux du même auteur (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie,* t. LXVI, 1872; t. LXXII, 1875), est une contribution à l'étude de l'ancienne théorie des sphères élastiques. Comme on ne connaît pas, actuellement, dans l'hypothèse des sphères élastiques, de méthode, pour la détermination de la constante de frottement, qui soit indépendante de la loi de distribution des vitesses, la recherche de cette loi constitue, évidemment, la partie essentielle du problème proposé. L'auteur, à cet effet, donne, dans des développements mathématiques très étendus qui occupent la majeure partie de la présente série de Mémoires, la solution de l'équation que vérifie la fonction qui détermine la loi de distribution des vitesses, équation qui avait été formée dans des Mémoires antérieurs.

Le Paige (*C.*). — Sur une relation entre les éléments singuliers d'involutions cubiques. (159-161).

Une involution cubique possède quatre éléments doubles d_1, d_2, d_3, d_4 qui représentent avec les quatre éléments de ramification v_1, v_2, v_3, v_4 quatre triples de l'involution. Il existe alors *une* seconde involution cubique (conjuguée) qui possède les mêmes éléments doubles d_1, d_2, d_3, d_4 et qui aura quatre éléments de ramification v'_1, v'_2, v'_3, v'_4.

Les trois quadruples d_i, v_i, v'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) appartiennent à *une* involution biquadratique.

Weyr (*Emil*). — Remarque sur le Mémoire de M. Le Paige : *Sur une relation entre les éléments singuliers d'involutions cubiques.* (162-164).

L'auteur recherche les involutions cubiques conjuguées (en particulier celles qui sont conjuguées à elles-mêmes) sur les courbes planes de troisième classe et de quatrième ordre. Une involution cubique est conjuguée à elle-même lorsque l'un des quatre éléments doubles est en même temps un élément double de la projectivité cyclique déterminée par les trois autres.

Weyr (*Emil*). — Sur des projectivités et des involutions sur des courbes planes rationnelles du troisième ordre. (169-195).

On considère, sur une courbe plane du troisième ordre et de quatrième classe, des systèmes projectifs de points et des involutions cubiques de points et on recherche les enveloppes des droites qui joignent les points correspondants.

Drasch (*Heinrich*). — Sur la construction du plan osculateur à la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre. (254-259).

Les plans du faisceau ayant pour axe une tangente à la courbe contiennent

des bisécantes de la courbe qui déterminent sur l'axe une division de points qui correspondent projectivement au faisceau de plans. Le plan osculateur correspond alors, évidemment, au point de contact de la tangente.

Mertens (*F.*). — Sur les conditions de divisibilité algébrique d'une expression entière de n^2 éléments arbitraires par le déterminant formé avec ces éléments. (260-270).

Soit A une expression entière des éléments du déterminant $\Sigma \pm a_1 b_2 \ldots e_n$; lorsqu'elle est algébriquement divisible par la puissance $m^{\text{ième}}$ de ce déterminant, elle est divisible par t^m si l'on remplace e_i par $pa_i + qb_i + \ldots + te_i$; cette propriété est suffisante pour que A soit divisible par la puissance $m^{\text{ième}}$ du déterminant. On fait diverses applications de cette proposition : en particulier, on en tire une démonstration simple de la loi de formation du produit de deux déterminants.

Ameseder (*Adolf*). — Contribution à la théorie des surfaces réglées du quatrième ordre à conique double. (271-299).

On considère une involution quadratique de plans tangents à un cône de seconde classe qui correspond projectivement à un faisceau de plans. Les droites d'intersection des plans de l'involution engendrent une surface réglée du quatrième ordre qui admet l'axe Δ du faisceau de plans comme droite double. Cette surface possède, en outre, une conique double qui passe par le sommet du cône, rencontre la droite Δ et est située dans le plan qui contient les droites d'intersection des couples de plans tangents confondus de l'involution. On démontre que, par tout point de l'espace, il passe deux cônes de seconde classe circonscrits à la surface et qu'on peut remplacer le cône donné par l'un quelconque de ces cônes. Enfin on donne diverses propriétés et divers modes de génération de la surface.

Pelz (*Carl*). — Étude scientifique de l'axonométrie orthogonale. (300-330, avec 1 planche).

L'auteur se propose de faire une exposition directe de la projection axonométrique indépendante, autant que possible, de la projection orthogonale ordinaire. Quelques-uns des problèmes fondamentaux les plus importants sont résolus en supposant que l'on ne connaisse que l'ensemble des axes et, pour terminer, il effleure aussi la théorie de la projection circulaire.

Lang (*Viktor von*). — Remarques sur la théorie de la double réfraction de Cauchy. (369-375).

On montre quelles sont les modifications qu'il faut faire à la théorie de la lumière de Cauchy pour que ses conclusions, relatives à la double réfraction, soient conformes à l'expérience.

Schier (*Otto*). — Sur la résolution de l'équation indéterminée $x^n + y^n = z^n$ en nombres rationnels. (392-398).

L'auteur essaye de démontrer la proposition de Fermat que l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

n'a pas de solutions rationnelles quand $n > 2$.

Simony (Dr *Oskar*). — Sur l'extension des cas de validité de quelques théorèmes généraux de la Mécanique. (399-414).

On montre que, dans un système de n points matériels, les théorèmes du mouvement du centre de gravité, de la conservation des forces vives et des aires sont, *sous certaines conditions,* applicables quand les forces varient non seulement avec la distance, mais encore avec le temps et avec les vitesses. On traite quatre exemples, pour terminer.

Gegenbauer (*L.*). — Sur la loi de réciprocité cubique. (436-440).

Ce travail contient la démonstration de la loi de réciprocité cubique pour des nombres primaires premiers, impairs, de la forme $a + b\rho$, où ρ désigne une racine cubique primitive de $(+1)$. La fonction elliptique $\wp(u; 0, 1)$ est employée dans la démonstration.

Ettingshausen (*Albert von*). — Détermination de la vitesse absolue de l'écoulement de l'électricité dans le phénomène de Hall. (441-452).

Tesar (*Josef*). — Le cercle de raccourcissement dans l'axonométrie orthogonale. (453-478, avec une planche).

On emploie un cercle auxiliaire, le cercle de raccourcissement, pour résoudre le problème fondamental de l'axonométrie au moyen de droites et de cercles.

Gegenbauer (*L.*). — Sur des suites de Sturm. (576-592).

On recherche les systèmes de fonctions entières $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$ respectivement d'ordres n_k, $n_k - 1$ qui vérifient les relations suivantes

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_k} \frac{\psi_\mu(x_\lambda)\,\psi_r(x_\lambda)\,\varphi_k(x_\lambda)}{\psi'_k(x_\lambda)}\, x_\lambda^\sigma = \delta_{\mu,r}\,\delta_{\sigma,n_{r+1}-n_r-1}\,\alpha_r\,\beta_r,$$

où $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ désignent deux constantes différentes de zéro et où on a posé

$$\delta_{\mu,r} = 0, \qquad \delta_{\mu,\mu} = 1, \qquad (\mu,\ r < k), \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, n_{r+1} - n_r - 1),$$
$$\beta_r = [\psi_r(x)]_{n_r}, \qquad \alpha_r \neq 0, \qquad \psi_k(x_\lambda) = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n_k).$$

Ameseder (*Adolf*). — Sur des surfaces réglées du quatrième ordre dont les génératrices se groupent par quadruples. (615-647).

On cherche, d'abord, la surface qui contient une conique double et une droite double, puis on étudie synthétiquement la surface qui admet trois droites doubles.

Binder (*Wilhelm*). — Sur des constructions projectives des courbes du second ordre. (648-654, avec 1 planche).

Wittenbauer (*Ferd.*). — Théorie du mouvement sur des surfaces développables. (697-742, avec 17 figures dans le texte).

On étudie le mouvement d'un point pesant sur l'hélicoïde développable, sur un cylindre circulaire oblique, et sur un cône.

Weyr (*Emil*). — Sur des groupes polaires. (841-844).

On montre comment on peut construire les milieux harmoniques du second ordre d'un point donné par rapport à un triple de points donné.

Le Paige (*C.*). — Remarques sur des involutions cubiques. (845-852).

On recherche les éléments singuliers d'involutions cubiques et on montre qu'en annulant la hessienne de la forme a_x^4 on obtient les éléments doubles de l'involution cubique qui se compose des groupes polaires cubiques de la forme a_x^4.

Mertens (*Franz*). — Sur la théorie des fonctions symétriques. (988-1000).

Contient une démonstration de la proposition qu'une fonction symétrique entière de n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut s'exprimer au moyen des n fonctions symétriques simples Σx, Σxx, ...

Weyr (*Emil*). — Sur des involutions biquadratiques de seconde classe et leurs courbes types. (1007-1031).

L'involution, dont il s'agit, est définie par les quadruples de points qui sont les points de rencontre d'une courbe plane du quatrième ordre, à trois points doubles, avec les droites de son plan.

Ces groupes de points peuvent être représentés sur une conique fixe de manière à être les quadruples de ses points d'intersection avec une conique circonscrite à un triangle fixe. Les côtés du triangle coupent la conique fixe aux points représentatifs des trois points doubles de la courbe du quatrième ordre. Les involutions quadratiques et les systèmes quadratiques, symétriques, de points situés sur cette courbe fournissent des coniques quadruplement tangentes.

Frebitscher (*Michel*). — Sur des relations entre des faisceaux de coniques et des courbes rationnelles de troisième classe. (1080-1091).

On recherche les courbes de troisième classe qui sont enveloppées par les axes ou les asymptotes des coniques d'un faisceau.

Peschka (*Gustav-Ad.*). — Contribution à l'étude des surfaces de normales. (1128-1162, avec 1 planche).

Les surfaces étudiées sont engendrées par les normales à une surface donnée en tous les points d'une courbe tracée sur elle. L'auteur trouve que, lorsque la surface donnée est de l'ordre m, la courbe, située sur elle, de l'ordre m', et que cette courbe a s points communs avec les courbes doubles de la surface, l'ordre de la surface des normales est $(mm'-s)$. La surface des normales à une surface d'ordre m, le long de sa courbe d'intersection avec une surface d'ordre m', possède une courbe double d'ordre $\frac{mm'}{2}[m^2m'-4m-m'+4]$.

Enfin, l'auteur donne les caractères essentiels des surfaces de normales et de leurs courbes doubles.

Peschka (*Gustav-Ad.*). — Surfaces de normales le long de sections planes. (1163-1214, avec 3 planches).

Les surfaces de normales à des surfaces du second ordre, le long de sections planes, sont des surfaces du quatrième ordre ayant une courbe double du troisième ordre.

On étudie, spécialement, le cas où le plan de la conique directrice est parallèle à un ou à deux des axes de la surface du second ordre. Enfin, on recherche les surfaces des normales le long de sections planes de cylindres quadratiques.

Weyr (*Emil*). — Note sur les milieux harmoniques d'un quadruple. (1218-1219).

Une courbe gauche rationnelle du quatrième ordre possède quatre plans osculateurs stationnaires; les milieux harmoniques du troisième ordre d'un point quelconque de la courbe, par rapport au quadruple formé par les quatre points de contact de ces quatre plans, sont les points de contact des trois plans osculateurs passant en ce point.

Finger (*Josef*). — Sur l'influence de la rotation de la Terre sur les mouvements à sa surface, en particulier, sur les courants marins et aériens. (1248-1277).

Tome LXXXII; 1880.

Weyr (*Eduard*). — Construction de l'hyperboloïde osculateur aux surfaces à courbures opposées. (7-14).

Kantor (*S.*). — Remarque sur les transformations linéaires. (34-38).

On étudie des transformations linéaires telles que tout point p du plan et ses transformées d'ordre $n_1, n_2, \ldots, n_\rho$ soient situés sur une courbe d'ordre s.

On appelle *transformé d'ordre n_i d'un point p* le point que l'on obtient en appliquant la transformation au point p, puis au point ainsi obtenu, puis au nouveau point et ainsi de suite n_i fois.

Kantor (*S.*). — Sur des transformations linéaires successives. (39-90).

On étudie des réseaux de collinéations (transformations linéaires). Trois couples de points aa', bb', cc' d'un plan ne suffisent pas pour définir une collinéation; mais, si l'on se donne, en outre, un point v variable comme correspondant d'un point fixe d, on obtient un réseau de collinéations. On peut, alors, considérer v comme appartenant au système a, b, c, d et chercher son homologue v', puis considérer v' comme appartenant au système a, b, c, d et prendre son homologue v'' et on obtient, ainsi de suite, les points v''', v^{IV}, ..., $v^{(n)}$. Lorsque v décrit une droite, v' décrit une conique. Il existe n^2 points v qui, considérés comme homologues d'un point fixe d, conduisent au bout de la $n^{\text{ième}}$ transformation à un même point donné $v^{(n-1)}$. Ces n^2 points v appartiennent à un réseau de courbes d'ordre n (sommets d'un faisceau d'ordre n). On étudie, de plus près, ces réseaux.

On obtient un résultat analogue pour des collinéations dans l'espace, dans lesquelles on connaît quatre couples de points aa', bb', cc', dd'. Pour parvenir d'un point fixe e à un point donné $v^{(n-1)}$, au bout de la $n^{\text{ième}}$ transformation, on peut faire correspondre à e n^3 points v différents.

Durège (*H.*). — Sur le criterium donné par Mœbius pour reconnaître le genre d'une conique définie par cinq points ou cinq tangentes. (123-134).

Rectification du travail de Hungady, sur ce sujet, publié dans le tome 89 du *Journal de Crelle*.

Durège (*H.*). — Sur la courbe à nœud de Hoppe (135-146, avec 3 figures dans le texte).

Les équations de cette courbe sont

$$x = \cos u(3\cos u + 2), \qquad y = 5\sin u\cos u, \qquad z = \sin u(25\cos^2 u - 1).$$

Cette courbe possède un nœud qui est étudié en transportant la courbe dans un espace à quatre dimesions.

Kantor (*S.*). — Sur la théorie des transformations quadratiques, successives, dans le plan. (237-259).

Étant donnée une relation quadratique dans un plan, il correspondra à tout point d'un système Σ un point du système Σ' (premier transformé suivant Σ'); si l'on considère ce nouveau point comme appartenant au système Σ et que l'on prenne son correspondant dans Σ', on obtient le second transformé suivant Σ' et

ainsi de suite. On peut de même construire le premier, le deuxième, le troisième, etc., transformé d'un point, suivant Σ.

Le lieu des points, tels que leurs premiers transformés suivant Σ ou Σ' soient situés sur les droites qui les joignent à un point fixe, est une courbe du quatrième ordre. Il existe six points qui sont conjugués de leurs premiers transformés par rapport à un quadrilatère donné. Le lieu des points qui sont en ligne droite avec leurs deux premiers transformés suivant Σ et Σ' est une courbe du cinquième ordre. Il existe neuf points qui sont les pôles, par rapport à une conique donnée, de la droite qui joint leurs deux premiers transformés suivant Σ et Σ' et vingt-quatre points pour lesquels cette droite contient ses pôles par rapport à deux quadrilatères donnés.

Le lieu des points qui sont situés avec leur $n^{\text{ième}}$ transformé sur une droite passant par un point fixe est une courbe d'ordre (2^n+1); toutes ces courbes forment un réseau. Le lieu des points qui sont en ligne droite avec leur $n^{\text{ième}}$ transformé suivant Σ et leur $n_1^{\text{ième}}$ transformé suivant Σ' est une courbe d'ordre $2^n+2^{n_1}+1$.

On dit qu'une transformation quadratique est périodique d'indice n lorsque tout point coïncide avec son $n^{\text{ième}}$ transformé. On étudie cinq positions spéciales des triangles fondamentaux lorsque les transformations sont périodiques, en particulier, le cas où les deux triangles fondamentaux coïncident. On montre alors que : « la condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation quadratique soit périodique est que deux points fondamentaux se correspondent directement, tandis que chacun des deux autres points fondamentaux d'un des systèmes puisse être, par un certain nombre de transformations, transformé en un point fondamental de l'autre système, en le considérant comme appartenant à cet autre système ».

Enfin on étudie des réseaux de transformations périodiques et, en particulier, deux sortes de transformations pour lesquelles les triangles fondamentaux coïncident.

Puchta (*Anton*). — Sur une certaine classe de surfaces de Riemann qui ne peuvent pas être transformées en des surfaces simplement connexes. (260-262).

Ces surfaces appartiennent à la fonction

$$\omega^{f(\varphi)}+\psi(z)=0,$$

où $\psi(z)$ désigne une fonction rationnelle entière et où

$$f(\varphi)=2m_1\varphi\left(\varphi-\frac{1}{z}\right)-4m_2\varphi(\varphi-1)+2m_3(\varphi-1)\left(\varphi-\frac{1}{z}\right),$$

$$\varphi(\gamma)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\xi}{\xi}\cos\gamma\xi.d\xi,\qquad\text{avec}\qquad\gamma=\operatorname{mod}z.$$

Kunerth (*Adolf*). — Calcul des racines entières d'équations quadratiques indéterminées à deux inconnues au moyen des fractions trouvées pour ces inconnues. Criterium pour l'impossibilité de cette résolution. (342-375).

Winckler (*Anton*). — Sur le dernier multiplicateur d'un système d'équations différentielles du premier ordre. (628-651).

On s'occupe du cas, étudié par Jacobi, d'un système de n équations différentielles du premier ordre entre $(n+1)$ variables où l'on connaît $(n-1)$ intégrales et un multiplicateur de la dernière équation différentielle qui reste à intégrer. On ne se sert que des règles générales du Calcul différentiel pour résoudre le problème.

Simony (*Oskar*). — Sur les surfaces que l'on obtient en faisant une coupure longitudinale fermée dans des bandes, n'ayant pas de nœuds, et fermées sous forme d'anneaux. (691-697, avec 5 figures dans le texte).

On tord l'une des extrémités d'une bande (ou ruban de papier) un certain nombre entier K de fois, autour de l'axe de longueur de la bande de 180° et on la réunit à l'autre extrémité. On obtient ainsi une bande fermée (surface fermée en forme d'anneau) dans laquelle on pratique une coupure tout le long de la ligne médiane (axe de longueur). Si $K = 2n+1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, on obtient de nouveau un ruban fermé, en forme d'anneau, ayant $4(n+1)$ torsions de 180° et possédant un nœud qu'on peut faire disparaître. Si $K = 2n$, on obtient deux rubans fermés en forme d'anneau qui ont en tout $2n$ torsions de 180° et dont l'un paraît être suspendu plusieurs fois (n fois) dans l'autre.

Gruber (*Emanuel*). — Sur la théorie de l'ellipse d'erreur. (698-723, avec 2 figures).

Ce travail contient une théorie de l'ellipse d'erreur avec le mode de représentation d'Andrae (1858, *Astron. Nachr.*, t. XLVII) et de Helmert (*Zeitschrift fur Mathem. u. Phys.*, année XIII), mais en prenant pour bases celles qui avaient été données, à ce sujet, par Bienaymé dès 1852 (*Journal de Liouville*, t. XVII).

Kohn (*Gustav*). — Sur des courbes gauches algébriques. (755-770).

Toute courbe gauche algébrique peut être considérée, d'une infinité de manières, comme l'intersection d'un cône, qui passe par elle, avec une surface algébrique, qui n'a, en dehors de la courbe, que des génératrices en commun avec le cône. Des propriétés de ces surfaces on déduit alors des propriétés des courbes gauches. Une courbe gauche d'ordre $2n$ a, au moins, $n(n-1)$ points doubles réels. Toute courbe gauche d'ordre $2n$ qui a $n(n-1)$ points doubles réels est située sur une surface du second ordre et le nombre des paramètres d'une telle courbe gauche est $2n(n+2)$. Une courbe gauche d'ordre $(2n-1)$ a, au moins, $(n-1)^2$ points doubles réels et est, par suite, au plus, du genre $(n-1)(n-2)$. Une courbe gauche d'ordre $(2n-1)$ qui a $(n-1)^2$ points doubles réels est déterminée d'une manière univoque si on en connaît $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ sécantes doubles, passant par un point, et six points. Le

nombre des paramètres d'une telle courbe est $n(n+1)+8$ et elle est située sur une surface du second ordre. Si l'on désigne par *excès* d'une courbe gauche la différence entre le nombre de ses points doubles réels et le nombre minimum de ces points, on a la proposition suivante : « Le nombre des points d'intersection de deux courbes gauches d'ordres ν et ν' et dont les excès sont e et e' ne peut dépasser le nombre $\frac{\nu\nu'}{2}+e+e'$ ».

Fumlirz (*Ottokar*). — Sur la propagation des ondes sphériques et cylindriques de cordes vibrantes de longueur finie. (779-807, avec 2 figures).

Boltzmann (*Ludwig*). — Sur la théorie de la dilatation électrique ou *électrostriction*, I. (826-839, avec 1 figure).

Le Mémoire contient une théorie mathématique des condensateurs sphériques et cylindriques et du condensateur à plateaux.

Schier (*Otto.*). — Sur la théorie des sommes de puissances semblables. (883-892).

Lorsque n désigne un nombre premier impair, la somme de trois puissances $n^{\text{ièmes}}$, ne peut être une puissance $n^{\text{ième}}$ que si $n=3$. On étudie les équations

$$x^3+y^3+z^3=u^3, \qquad x^2+y^2+z^2=u^2,$$

et l'on montre que les nombres 3, 4, 5 sont les seuls nombres premiers entre eux dont la somme des cubes est un cube parfait (6^3).

Pick (*Georg*) et *Ungar* (*Max.*). — Fondements de la théorie d'une classe d'intégrales abéliennes. (893-930).

Les auteurs s'occupent des intégrales abéliennes qui appartiennent au domaine de rationalité des racines des équations binômes.

Gegenbauer (*Leop.*). — Algorithmes pour la détermination du symbole généralisé de Legendre. (931-937).

M. Sylvester (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 1053; 1880), emploie pour la détermination du symbole de Legendre deux suites de nombres; l'auteur donne deux algorithmes avec lesquels il suffit de former une seule suite de nombres.

Gegenbauer (*Leop.*). — Sur un déterminant symétrique particulier. (938-942).

On considère le déterminant symétrique général étudié par Nöther dans le tome XVI des *Mathematische Annalen*, p. 551. On donne, d'abord, une démonstration simple de la décomposition de ce déterminant en un produit de facteurs linéaires et homogènes de ses éléments et on démontre, ensuite, que

2ᵘᵈ Part

ce déterminant s'annule lorsqu'il existe entre ses éléments une relation linéaire et homogène qui ne change pas lorsqu'on fait une permutation circulaire.

Igel (*B.*). — Sur les conditions pour qu'une forme binaire d'ordre m soit un diviseur d'une forme binaire d'ordre n. (943-955).

Ces conditions sont données de deux façons différentes, sous forme de résultants égalés à zéro.

Röllner (*Ferd.*). — Sur la réflexion de points sur un cercle et l'inversion du problème des normales. (1129-1139).

On cherche les coniques d'un système confocal qui touchent un cercle donné.

Drasch (*Heinrich*). — Construction de la tangente à la courbe de contact d'une surface à courbures opposées et de sa surface directrice. (1140-1150, avec 1 planche).

Une tangente mobile à une surface fixe F glisse sur deux droites fixes et décrit, par suite, une surface réglée tandis que le point de contact décrit la courbe de contact de ces deux surfaces. On donne une construction de la tangente à cette courbe de contact.

Boltzmann (*Ludwig*). — Sur la théorie de la dilatation électrique ou *électrostriction* II. (1157-1168).

L'auteur établit les équations générales de l'électrostriction.

Wittenbacher (*Ferd.*). — Théorie des courbes d'accélération. (1169-1206, avec 15 figures dans le texte).

Dans le mouvement curviligne d'un point dans un plan, la direction de l'accélération varie à chaque instant ; on appelle *courbe d'accélération* l'enveloppe de toutes ces directions.

On montre, d'abord, comment on peut trouver l'équation de la courbe d'accélération connaissant : 1° l'équation $y = f(x)$ de la trajectoire et la vitesse $v = F(x)$; 2° $y = f(x)$ et la composante $v_x = F(x)$ de la vitesse ; 3° $y = f(x)$ et l'accélération $\gamma = F(x)$. Inversement, on cherche ensuite l'équation de la trajectoire connaissant : (A), l'équation de la courbe d'accélération $\eta = \varphi(\xi)$ et l'accélération $\gamma = F(\xi)$; (B), $\eta = \varphi(\xi)$ et $\gamma = F(x, y)$. Enfin, on introduit la notion de courbe d'accélération d'ordre n, qui est la courbe d'accélération de la courbe d'accélération d'ordre $(n-1)$: la trajectoire initiale donnée doit alors être considérée comme courbe d'accélération d'ordre zéro.

Pelz (*Carl*). Sur les focales de Quételet. (1207-1218, avec 1 planche).

Démonstrations synthétiques des propositions de Chasles sur ces courbes (*Aperçu historique*, Note IV).

Igel (*B.*). — Sur la théorie des déterminants. (1288-1294).

E. W.

ATTI DEL R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. In-8°, 6e série.

Tome VII; 1888-1889 (1).

Favaro (*A.*). — Sur la *Bibliotheca mathematica* de Gustave Eneström, quatrième Communication. (119-125).

Favaro (*A.*). — Sur quelques nouveaux matériaux pour l'étude de la correspondance de Ticho Brahe et de ses relations avec Galilée. (199-215).

Favaro (*A.*). — Sur les œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société néerlandaise des Sciences. Première Communication. (403-421).

Fambri (*P.*) et *Cassani* (*P.*). — Sur le nouveau cours d'Analyse infinitésimale du professeur Ph. Gilbert, de l'Université de Louvain (relation). (589-601).

Ninni (*A.-P.*). — Sur les signes préalphabétiques employés aujourd'hui même par les pêcheurs de Chioggia dans la numération écrite. (679-686, 4 pl.).

Il semble que ces notations aient de l'analogie avec celles des Étrusques.

Lorenzoni (*G.*). — Sur la déviation du pied de la verticale qu'éprouve un corps pesant tombant librement de la surface de la terre au fond d'une mine. (759-784, 1 pl.).

Turazza (*D.*). — Sur quelques propriétés des axes de rotation. (1221-1233).

---

(1) Voir *Bulletin*.

7e série, t. I; 1889-1890.

Favaro (*A.*). — Sur les services extraordinaires rendus par Galilée à la République vénitienne. (91-109).

Favaro (*A.*). — Sur la *Bibliotheca mathematica* de Gustave Eneström, cinquième Communication. (157-163).

Padova (*E.*). — Sur le mouvement d'un cône circulaire pesant qui roule sur un plan incliné. (235-241).

L'auteur établit les équations du mouvement par la méthode d'Hamilton; les variables qui déterminent la position du cône à chaque instant sont : l'angle ϑ que la génératrice de contact fait avec la ligne de plus grande pente, et l'espace s parcouru par le sommet du cône. Pour ϑ l'auteur arrive à l'équation

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + G \sin\vartheta = 0$$

(G étant une certaine constante), qui coïncide avec l'équation que l'on rencontre dans l'étude du pendule simple. Pour s il trouve

$$s = \frac{g \sin i}{2G}\left[c\int\frac{a\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}} + c_1 + \int\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}\int\frac{\cos\vartheta\, a\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}\right)a\vartheta\right].$$

On n'a pas égard au frottement, mais on suppose que le glissement du cône sur le plan ne puisse avoir lieu que le long d'une génératrice.

Favaro (*A.*). — Autres renseignements sur la publication des manuscrits de Léonard de Vinci. (251-276).

Padova (*E.*). — Sur le mouvement d'un corps non soumis à des actions accélératrices. (437-444).

L'auteur introduit dans la solution de ce problème les deux fonctions σ et $\wp$ de Weierstrass.

Padova (*E.*). — Le potentiel des forces élastiques en des milieux isotropes. (445-451).

L'auteur a proposé (*Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, t. V) de définir les espaces isotropes comme ceux dans lesquels le potentiel d'élasticité ne change pas de forme par une transformation de coordonnées. Dans cette Note il montre l'identité de cette définition avec la définition ordinaire.

Abetti (*A.*). — Observations astronomiques faites à Padoue en 1889. (505-522).

Padova (*E.*). — Sur quelques problèmes de Mécanique. (547-562).

L'auteur traite successivement cinq problèmes dans lesquels les inconnues sont des fonctions elliptiques d'expressions linéaires en t, en employant les fonctions σ et p de Weierstrass. Les problèmes sont les suivants :

1. Pendule conique.
2. Mouvement d'un solide de révolution homogène et pesant, soutenu en un point de son axe de symétrie.
3. Mouvement d'une sphère roulant sur un plan horizontal, et soumise à l'action d'une force constante verticale appliquée à l'un quelconque de ses points.
4. Mouvement d'un cône homogène roulant sur un plan incliné.
5. Mouvement d'un solide de révolution dans un liquide illimité.

RENDICONTO DELLE SESSIONI DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA. In-8°.

1876-77.

Fais (*A.*). — Sur quelques formules relatives au changement des variables indépendantes. (60-70).

Les *Comptes rendus* de 1877-78, 78-79 et 79-80 ne contiennent aucune Note de Mathématiques.

1880-81.

Riccardi (*P.*). — Commémoration de M. Chasles. (37-70).

Les pages 51-70 contiennent un catalogue des publications de Chasles mentionnées dans le discours de M. Riccardi.

1881-82.

Ruffini (*F.-P.*). — Commémoration de D. Chelini. (17-24).

1882-83.

Retali (*V.*). — Sur les systèmes de points en ligne droite. (38-41).

L'auteur déduit d'un théorème sur les déterminants les relations établies dans la Géométrie supérieure de Chasles pour les points en ligne droite.

Pincherle (*S.*). — Sur une application des fonctions sphériques au théorème de Mittag-Leffler, et à la détermination des fonctions à espaces lacunaires. (100-105).

Pincherle (*S.*). — Une formule sur les déterminants. (105-106).

Voici la formule

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & h_2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & h_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & m-1 & \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} & \cdot & \dots & h_m \end{vmatrix}$$

$$= h_m - (m-1)h_{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} h_{m-2} - \dots + (-1)^m h_m.$$

Un cas particulier remarquable est le suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & X \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & X^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ 1 & m & \frac{m(m-1)}{1.2} & 0 & \dots & X^m \end{vmatrix} = (1-X)^m.$$

Arzelà (*C.*). — Une observation sur les séries de fonctions. (142-159).

L'auteur établit par la considération des fonctions de deux variables les propositions principales sur les séries dont les termes sont des fonctions d'une variable, c'est-à-dire les théorèmes sur la continuité de leur somme, et sur l'applicabilité de la dérivation par série.

Pincherle (*S.*). — Sur les produits infinis de fonctions analytiques. (159-169).

Fais (*A.*). — Note sur une classification des surfaces gauches. (170-173).

1883-84.

Arzelà (*C.*). — Sur la continuité de la somme d'un nombre infini de fonctions continues. (79-84).

Par la considération des fonctions de deux variables l'auteur arrive aux résultats suivants :

1° Soit $S(x)$ une série de fonctions de x, continues entre a et b, qui soit

déterminée en chaque point de cet intervalle. La condition nécessaire et suffisante pour que $S(x)$ soit elle-même finie et continue entre a et b est que pour chaque nombre positif arbitraire σ, et pour chaque nombre entier arbitraire m_1 on puisse trouver un autre nombre entier $m_2 \geqq m_1$ tel que pour un nombre m compris entre m_1 et m_2 on ait en valeur absolue

$$R_m(x) < \sigma,$$

$R_m(x)$ étant le reste de la série, pris à partir du terme $u_m(x)$, et le nombre m pouvant varier avec x.

2° Si les termes $u_n(x)$ de $S(x)$ ont respectivement pour dérivées $u'_n(x)$, finies et continues entre a et b, la condition nécessaire et suffisante pour que la série $\Sigma u'_n(x)$ soit la dérivée de $S(x)$ est qu'elle soit déterminée et convergente de la manière indiquée en 1°.

1885-86.

Retali (*V.*). — Sur la projection imaginaire des surfaces du second ordre et des courbes gauches du quatrième ordre. (21-33).

Dainelli (*U.*). — Sur le mouvement d'un point pesant sur des droites inclinées, dans le vide et sans frottement. (50-57).

Retali (*V.*). — Observations sur la projection imaginaire des courbes du second ordre. (72-79).

Arzelà (*C.*). — Sur les produits infinis. (92-100).

1886-87.

Pesci (*G.*). — Une formule relative aux fonctions symétriques. (49-54).

Retali (*V.*). — Sur les coniques conjuguées dégénérées. (88-91).

1887-88.

Razzaboni (*A.*). — Sur certaines familles de surfaces de révolutions applicables. (19-21).

M. Bianchi a démontré (*Annales de l'École Normale supérieure de Pise*, t. II, p. 296; 1879) que les projections de la tractrice sur des plans passant par l'asymptote engendrent, par une rotation autour de cette droite, des surfaces applicables les unes sur les autres. M. Razzaboni démontre que cette propriété n'appartient pas exclusivement à la tractrice, mais à toutes les courbes

données par l'équation

$$z = \int \sqrt{\frac{c}{r^2} + c'}\, dr.$$

z et r étant les coordonnées, et c, c' deux constantes arbitraires.

Arzelà (*C.*). — Sur la théorie des fonctions analytiques. (25-37).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions monogènes d'une variable complexe, convergente dans un champ connexe C, représente elle-même une fonction monogène est que cette série et sa série dérivée aient une certaine convergence spéciale que l'auteur appelle *convergence uniforme par couches* (uniforme a strati).

1888-89.

Arzelà (*C.*). — Sur les intégrales de fonctions qui outre la variable d'intégration contiennent d'autres variables. (16-22).

L'auteur trouve la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\varphi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

soit une fonction continue de y, et la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une dérivée finie et continue $\varphi'(y)$ de cette même fonction.

Donati (*L.*). — Illustration du théorème de Menabrea. (97-98).

Ingrami (*G.*). — Sur les fonctions implicites d'une variable réelle. (108-118).

L'auteur donne pour l'existence d'une fonction implicite définie par l'équation $f(x, y) = 0$ des conditions moins restrictives que celles données dans les traités de MM. Dini et Genocchi. Il démontre qu'une fonction $y = \varphi(x)$ est toujours déterminée par l'équation $f = 0$ dans un intervalle $b - a$, lorsque dans un champ, dont le contour ait pour projection orthogonale l'intervalle $b - a$, se trouve un point (x_0, y_0) pour lequel on a $f(x_0, y_0) = 0$, la fonction $f(x, y)$ est finie et continue absolument dans ce champ, et il y a un extrême oscillatoire par rapport à x, et un par rapport à y, numériquement inférieurs à une quantité assignable, et un extrême oscillatoire par rapport à y, conserve un même signe, et reste distant de zéro plus d'une quantité m.

MEMORIE DEL REALE ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. In-4°.

Tome XIV; 1868-69-70 (1).

Bellavitis (*G.*). — Considérations sur la Mathématique pure. (1-34).

Avec 14 pages d'indications bibliographiques sur les sujets suivants : Systèmes de numération, calculs d'approximation, quantités négatives et imaginaires, résolution générale des équations, théorème de Sturm, combinaisons, substitutions.

Santini (*G.*). — Exposition abrégée de la manière la plus utile de résoudre un système d'équations linéaires, qui résultent d'observations également probables pour la détermination des éléments d'une théorie proposée. (477-510).

Tome XV; 1870-71.

Santini (*G.*). — Positions moyennes de 1425 étoiles au commencement de 1860, distribuées dans la zone comprise entre 0° et 3° de déclinaison australe, déduites des observations faites par feu prof. Trettenero, dans l'Observatoire royal de Padoue, du 18 avril 1861 au 3 février 1863. (329-374).

Bellavitis (*G.*). — Considérations sur la Mathématique pure. (375-423).

Avec 31 pages d'indications bibliographiques sur les sujets suivants : Congruences, équations homogènes à trois ou plusieurs inconnues, résolution en nombres entiers des équations non homogènes, autres sujets relatifs à la théorie des nombres, théorie des entiers imaginaires ou complexes, partition des nombres, inégalités, questions générales sur les fonctions, fonctions interpolaires, séries semi-convergentes, somme des séries, conditions de convergence des séries.

Turazza (*D.*). — Sur les systèmes de forces constituées par deux seules forces et qui sont équipollents à un système quelconque de forces agissant sur des points liés invariablement entre eux. (461-481, 1 pl.).

Démonstration géométrique des théorèmes de Chasles sur les translations et rotations infiniment petites.

---

(1) Voir *Bulletin*.

2ne Part.

Tome XVI; 1872.

Bucchia (*G.*). — Sur la poussée des terres. (495-563).

Tome XVII; 1872-73.

Turazza (*D.*). — Sur les formules de Bazin et sur les équations du mouvement permanent de l'eau dans les lits naturels ou artificiels. (171-188).

Bellavitis (*G.*). — Considérations sur la Mathématique pure. (189-253).

Cappelletto (*A.-A.*). — Sur le pendule conique. (517-527).

Tome XVIII; 1874-75.

Bellavitis (*G.*). — Tables numériques du logarithme-intégrale, c'est-à-dire de l'exponentielle-intégrale, et d'autres intégrales eulériennes. (125-162).

Bucchia (*G.*). — Considérations sur la solidité des chaussées de terre. (171-201).

Turazza (*D.*). — Équilibre d'une tige parallélépipédique rectangulaire. (219-238).

Bellavitis (*G.*). — Sur la logique. Discours académique. (321-341).

Turazza (*D.*). — Sur les systèmes de droites conjuguées, c'est-à-dire le long desquelles on peut faire agir un système de deux forces équipollent à un système donné. (467-481).

Tractation analytique du problème.

Tome XIX; 1876.

Bellavitis (*G.*). — Sur les origines de la méthode des équipollences. (449-491).

L'auteur reproduit ici son *Essai d'applications d'une nouvelle méthode*

de Géométrie analytique (*Calcul des équipollences*) (publié dans les *Annali delle Scienze del R. Lombardo-Veneto*, t. V; 1835), en y ajoutant des Notices sur les travaux de Buée, De Foncenex, Argand, Français, Mourey, concernant la représentation des imaginaires, et sur ses propres travaux, relatifs au calcul des équipollences et à l'Algèbre des imaginaires. Le Mémoire se termine par une exposition abrégée des principes fondamentaux du calcul des *Quaternions*.

Tome XX; 1877-78-79.

Ne contient aucun Mémoire de Mathématiques.

Tome XXI; 1880-82.

Turazza (*D.*). — Sur les formules les plus appropriées au calcul des écoulements des basses plaines, et sur la manière d'en calculer la plus grande portée. (189-219, 1 pl.).

Bellavitis (*G.*). — Sur les livres de raison et sur la logismographie. (379-417).

Favaro (*A.*). — Inedita galilæiana. Fragments tirés de la Bibliothèque nationale de Florence. (433-473, 1 pl.).

Tome XXII; 1884-85-87.

Favaro (*A.*). — Notices historiques et critiques sur la division des surfaces. (129-154).

Minich (*R.-S.*). — Sur les caractéristiques génératrices des surfaces courbes. (169-230).

Le Mémoire se compose de deux Parties, dont voici le sommaire :

Ire Partie. — Sur la génération des équations aux dérivées partielles. Méthode pour éliminer d'une équation primitive à trois variables x, y, z un nombre quelconque $m+1$ de paramètres m, desquels soient des fonctions arbitraires du restant, que l'on suppose exprimé en fonction de x, y, z au moyen d'une équation donnée. Application de cette méthode à la recherche de l'équation aux dérivées partielles représentant une classe entière de surfaces, dont la caractéristique est représentée par deux équations finies de forme quelconque.

IIe Partie. — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles. Méthode pour éliminer d'une équation primitive à trois variables x, y, z un nombre n de fonctions arbitraires d'un argument z, exprimé en fonction de x, y, z au

moyen d'une équation donnée. Équations qui déterminent les dérivées des fonctions arbitraires. Examen du cas où les dérivées des équations primitives par rapport à α coexistent avec ces mêmes équations. Application des méthodes exposées à la recherche de l'équation aux dérivées partielles qui représentent toutes les surfaces engendrées par le mouvement d'une courbe d'espèce donnée, et en particulier de l'équation du troisième ordre représentant toute surface à caractéristique rectiligne. Détermination de quelques classes subordonnées de surfaces gauches. Détermination de l'équation aux dérivées partielles du cinquième ordre représentant la classe des surfaces à caractéristique circulaire. Cas où les cercles générateurs ont une enveloppe. Équation de quelques classes subordonnées de surfaces engendrées par un cercle.

L'auteur a fait précéder son Mémoire par une Note historique sur ses propres travaux relatifs aux équations différentielles.

Favaro (*A.*). — Miscellanea galilæiana inedita. (701-1035).

Tome XXIII, 1890.

Ne contient aucun Mémoire de Mathématiques.

SITZUNGSBERICHTE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN [1].

Tome LXXXIII; 1881.

Weyr (*Emil*). — Sur la position involutive de coniques tangentes. (63-68).

On dit que deux coniques sont en *position involutive* s'il existe un triangle inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre. Lorsque de telles coniques sont tangentes, leurs courbures, au point de contact, sont entre elles comme 1 et 4.

Vaněček (*J.-S.*). — Épicycloïdes gauches. (69-91).

Contient des développements sur les épicycloïdes, situées sur des tores, déjà étudiées par Hachette (Développements de Géométrie descriptive).

Lauermann (*Carl*). — Sur les normales de l'ellipse. (92-95).

On construit l'hyperbole qui passe par les quatre pieds des normales issues d'un point à une ellipse.

---

(1) Voir *Bulletin*, XV, p. 123.

Finger (*Josef*). — Sur les relations entre les déformations homogènes des corps solides et la surface de réaction. (234-261).

On montre que la surface du second degré que Thomson et Tait ont désigné dans leur *Natural Philosophy,* sous le nom de *Surface de réaction* (*voir* aussi KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mathem. physik. Mechanik,* Leipzig, p. 114 et 115; 1874) permet de représenter graphiquement, d'une manière relativement simple, non seulement les réactions et leurs composantes, en grandeur et en direction, mais encore les déformations produites par les réactions (que celles-ci proviennent d'élongations longitudinales ou de torsions). On suppose que les déplacements, dans le corps élastique isotrope donné, soient suffisamment petits pour qu'on puisse négliger les puissances élevées de ces déplacements vis-à-vis de la première puissance.

Weyr (*Emil*). — Sur des involutions biquadratiques de première espèce (Stufe). (300-320).

On considère des involutions biquadratiques de tangentes à des coniques. Les courbes d'involution correspondantes, engendrées par les sommets de ces quadrilatères tangents, sont les courbes générales du troisième ordre de genre 1.

Une involution biquadratique est déterminée sans ambiguïté par deux quadruples ou par un quadruple et trois couples d'éléments ou encore par trois triples.

Gegenbauer (*Leopold*). — Une généralisation de la règle des signes de Descartes. (321-331).

L'auteur cherche un développement de la fonction $F(x)$ de la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda \psi_\lambda(x),$$

où A_λ désigne une constante et $\psi_\lambda(x)$ une fonction entière de degré λ qui dépend, d'une certaine façon, de deux constantes positives a et b. Il montre alors que le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$, qui sont égales ou supérieures à b, ne peut dépasser le nombre des variations de la suite $A_0, A_1, \ldots$, et que le nombre des racines réelles négatives, qui sont, en valeur absolue, égales ou supérieures à a, ne peut dépasser le nombre des variations de la suite formée par les quantités $(-1)^\lambda A_\lambda$.

Weyr (*Emil*). — Sur des involutions de seconde espèce. (349-350).

Lorsqu'on inscrit dans une conique trois polygones quelconques de n côtés, tous les côtés de deux d'entre eux sont tangents à une courbe déterminée de classe $(n-1)$. Les trois courbes de classe $(n-1)$, ainsi obtenues, ont $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ tangentes communes. Ces dernières coupent la conique suivant

les couples de points neutres de l'involution d'ordre n de seconde espèce (Stufe) qui est définie par les trois groupes de sommets des trois polygones de n côtés.

Le Paige (*C.*). — Remarques sur des involutions cubiques. (351-356).

On donne la signification géométrique de certains combinants de formes cubiques et leurs rapports avec la théorie des involutions cubiques.

Wittenbauer (*Ferdinand*). — Sur des moments d'ordre supérieur. (357-374).

Soit r la distance d'un point quelconque d'une aire plane F, sur laquelle sont distribués uniformément des points matériels, à un axe fixe situé dans le plan de cette aire : on désigne par *moment d'ordre n*, relatif à cet axe, l'intégrale $\int r^n d\mu$, où $d\mu$ désigne un élément de l'aire. On montre : 1° que l'enveloppe des axes par rapport auxquels une aire donnée a le même moment d'ordre n est une courbe de classe $2n$; 2° que les axes qui ont même moment d'ordre n, par rapport à deux aires planes situées dans le même plan enveloppent une courbe de classe $2n$; 3° qu'il existe, en général, $4n^2$ *droites* par rapport auxquelles les moments d'ordre n de trois aires sont égaux. Pour terminer, l'auteur fait des applications aux moments du premier et du second ordre.

Pelz (*Carl*). — Sur l'étude scientifique de l'axonométrie orthogonale. (375-384).

Ce travail est la suite d'un Mémoire du même auteur paru sous le même titre dans le tome LXXXI. On résout les problèmes fondamentaux les plus importants en ne se servant que du plan des images (Bildebene) et de l'ensemble des axes (Axenkreuz).

Ameseder (*Adolf*). — Sur un système du second ordre. (385-401).

Lorsque l'on projette, des trois sommets d'un triangle, un point p sur les côtés opposés et que l'on construit sur chacun des trois côtés un quatrième point de manière que les rapports anharmoniques des trois quadruples ainsi formés, sur les côtés, soient égaux aux trois valeurs fondamentales h, $\frac{h-1}{h}$, $\frac{1}{1-h}$ d'un rapport anharmonique, les trois quatrièmes points sont situés sur une même droite g qui passe par le point p. Pour une valeur donnée de h, il correspond à chaque point p une droite g, passant en ce point, et réciproquement. Lorsque g enveloppe une courbe de classe n, le point p décrit une courbe d'ordre $2n$ qui admet les sommets du triangle comme points multiples d'ordre n, etc.

Stefan (*J.*). — Sur l'équilibre d'un corps solide élastique dans lequel la température n'est pas uniforme ou est variable. (549-575).

On recherche, par une méthode différente de celle de Duhamel, Neumann et Borchardt, l'influence d'une température non uniforme ou variable sur l'équilibre d'un corps élastique. Cette méthode, qui conduit au résultat par une voie beaucoup plus simple, est indépendante des considérations sur les relations de variation entre l'élasticité et la chaleur. On cherche, en particulier, la tension dans un prisme indéfini et dans des calottes sphériques.

Boltzmann (*Ludwig*). — Étude d'une formule servant à la détermination de la constante diamagnétique (576-587).

On donne des formules : 1° pour la force répulsive d'une spirale à plusieurs tours; 2° pour le moment d'inertie d'une spirale sur un cylindre, ayant environ même axe et voisin de son extrémité.

Margules (*Max.*). — Sur la détermination des coefficients de frottement et de glissement dans des mouvements plans d'un fluide. (588-602).

Pour mesurer ces deux coefficients, on détermine le moment d'inertie exercé par le fluide sur un cylindre qui tourne avec une vitesse constante dans l'intérieur de ce fluide.

Binder (*Wilh.*). — Le problème des quatre points, au point de vue de la Géométrie moderne. (659-666).

Étude du problème de Pothenot en se servant des propositions simples des figures projectives.

Ungar (*Max.*). — Sur la réduction d'intégrales abéliennes à des intégrales elliptiques. (759-789).

On cherche les conditions pour qu'une intégrale abélienne, qui appartient au domaine de rationalité des équations binômes, puisse être réduite à une intégrale elliptique par une substitution algébrique.

Peschka (*Gustav.-Ad.*). — Surface des normales à une développable le long de la courbe d'intersection de cette développable avec une surface gauche. (790-799).

Au moyen du principe de correspondance de Chasles et des formules de Plücker, on déduit, des nombres caractéristiques des deux surfaces, ceux de la surface des normales.

Weyr (*Emil*). — Sur des singularités d'involutions biquadratiques et sur les sept systèmes de coniques quadruplement tangentes à une courbe plane rationnelle du quatrième ordre. (807-828).

On considère des involutions biquadratiques : 1° qui possèdent deux éléments doubles formant un quadruple; 2° qui ont un élément quadruple; 3° qui pos-

sèdent deux quadruples se composant uniquement d'éléments doubles; 4° qui possèdent trois quadruples contenant uniquement des éléments doubles. D'autre part, on étudie les involutions biquadratiques conjuguées par rapport à trois couples et les involutions qui sont conjuguées à elles-mêmes. Ces dernières fournissent les coniques quadruplement tangentes à une courbe plane du quatrième ordre à trois points doubles.

Ameseder (*Adolf*). — Sur les coniques, quadruplement tangentes à une courbe plane rationnelle, du quatrième ordre; qui forment un système isolé. (829-884).

Les sept systèmes de coniques quadruplement tangentes, forment deux groupes de trois (correspondants aux points doubles de la courbe) constituant deux triples. Outre ces deux triples il reste un septième système *isolé*. Chaque conique de ce dernier système porte une involution quadratique de tangentes qui engendre, avec un faisceau de droites qui lui correspond projectivement, la courbe donnée. Deux coniques quelconques de ce système portent deux systèmes projectifs de tangentes qui engendrent la courbe. On étudie, dans ce travail, le système isolé de plus près.

Bobek (*Karl*). — Sur les relations métriques qui existent dans une congruence de complexes linéaires. (885-901).

On établit les relations données par M. Kummer dans le tome 57 du *Journal de Crelle* pour des faisceaux de droites infiniment minces.

Wittenbauer (*Ferdinand*). — Sur les moments de dérivation. (972-1017).

Étant donnée une aire plane sur laquelle des masses μ sont distribuées uniformément, on appelle *moment de dérivation* d'ordre $m+n$ ($m>0$, $n>0$) relatif aux axes rectangulaires ox, oy, l'expression $D = \int y^m x^n \, d\mu$.

On étudie les moments de dérivation du second et du troisième ordre.

Haluschka (*Franz*). — Contribution à la théorie des maxima et des minima des fonctions. (1092-1109).

On établit une correspondance entre les propriétés d'un certain déterminant et les conditions pour qu'une fonction de n variables soit maximum ou minimum.

Durège (*H.*). — Sur des corps à quatre dimensions. (1110-1125).

La relation d'*Euler* $n_0 - n_1 + n_2 = 2$ est remplacée dans les corps à quatre dimensions par la relation $n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 = 0$.

Tome LXXXIV.

Lippich (*F.*). — Sur la théorie des polyèdres. (20-29).

Ce travail contient, d'après *Riemann,* une démonstration de la formule d'Euler généralisée $e - k + f = 2 + q' - q$, où q désigne le nombre des coupures qui transforment la surface polyédrale tout entière en une surface simplement connexe et q' le nombre des coupures nécessaires pour rendre toutes les surfaces polyédrales simplement connexes.

Peschka (*Gustav.-Ad.*). — Surface des normales d'une surface gauche le long de son intersection avec une autre surface gauche. (30-35).

On déduit des caractères des deux surfaces ceux de la surface des normales.

Boltzmann (*Ludwig*). — Sur la théorie du frottement des gaz; deuxième Partie. (40-135).

(*Voir* le compte rendu du tome LXXXI).

Boltzmann (*Ludwig*). — Sur quelques théorèmes concernant l'équilibre calorifique. (136-145).

Tesar (*Josef*). — Étude synthétique des faisceaux mixtes de coniques S ($3l$, $1p$) ayant un couple de tangentes communes imaginaires. (194-227).

On étudie le système des coniques ayant un point réel, une tangente réelle et deux tangentes imaginaires, en commun. On se sert, à cet effet, des principes de la collinéation dans l'espace.

Gruss (*Gustav*). — Sur les contacts multiples d'un système de courbes avec des droites. (228-232).

On dit que l'*indice* d'un système de courbes planes d'ordre n est N lorsqu'il passe N courbes du système par un point arbitraire du plan; on dit qu'un système est *de la puissance* r (stufe) lorsqu'il passe un système d'indice N par $r - 1$ points arbitraires du plan.

« Un système de courbes d'ordre n, d'indice N et de puissance r contient $(r+1)\,N(n-r)$ courbes qui touchent une droite arbitraire en $(r+1)$ points. » On se sert de cette proposition pour discuter les contacts multiples des courbes d'un système avec des droites.

Le Paige (*C.*). — Sur des involutions conjuguées. (233-236).

Deux involutions sont conjuguées quand elles ont des éléments doubles

communs. Lorsque l'une d'elles possède un élément triple, sa conjuguée se décompose en un élément fixe et une involution quadratique.

Simony (*Oskar*). — Sur les figures que l'on obtient en réunissant deux à deux les extrémités de surfaces ayant la forme de croix et en y faisant ensuite certaines coupures fermées. (237-257).

Margules (*Max.*). — Sur le mouvement des fluides visqueux et sur des figures de mouvement. (491-510).

On étudie, d'abord, le mouvement stationnaire d'un fluide incompressible rapporté à un système de coordonnées rectilignes rectangulaires. Soit G la vitesse et n la normale à une surface de courant fermé, le signe de la dérivée $\frac{\partial G}{\partial n}$ reste constant sur la surface fermée. S'il existe un volume, rempli par le fluide, à la surface duquel la vitesse est nulle, en tous les points, le fluide est en repos à l'intérieur de ce volume. On montre, que le travail fourni par les forces extérieures est égal au travail effectué par la résistance due au frottement, etc.

Franke (*Joh.*). — Sur des propriétés géométriques de systèmes de forces et de rotations qui sont en relation avec des complexes de droites. (570-594).

Soient X, Y, Z les composantes suivant trois axes rectangulaires et L, M, N les moments d'une force P, on a

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Étant donné un système de forces P_i, les quantités $X = \Sigma X_i$, $Y = \Sigma Y_i$, ..., $N = \Sigma N_i$ sont appelées les six coordonnées de ce système et la quantité

$$LX + MY + NZ = K,$$

l'invariant de ce système. Les axes qui ont même moment par rapport à un système donné de forces forment un complexe du second ordre. Chaque système de forces, dont l'invariant est différent de zéro, détermine un complexe linéaire de droites et un complexe linéaire de forces. Les deux complexes n'ont aucun rayon commun. Les mêmes propositions existent dans les systèmes de rotations. Les droites d'un système rigide qui, dans un déplacement infiniment petit, engendrent des éléments de surfaces ayant même courbure centrale, forment un complexe du quatrième ordre.

Weyr (*Emil*). — Note sur des surfaces réglées qui ont des courbes doubles rationnelles. (691-692).

Lorsqu'une surface F possède une courbe double d'ordre n, qui est touchée deux fois par chaque génératrice, cette surface est d'ordre $2(n-1)$. Ces surfaces F se distinguent en trois groupes suivant que le système de points déterminé par les génératrices sur la courbe double (arête de rebroussement) est un

système symétrique général du second ordre, une involution cubique ou un système projectif.

Weyr (*Emil*). — Sur des systèmes de courbes et de surfaces d'espèces supérieures. (884-907).

On étudie les involutions d'ordre n et d'espèce k (Stufe) qui sont déterminées sur des droites et des coniques par des systèmes linéaires de courbes et de surfaces.

Schmid (*Theodor*). — Sur la ligne de striction de l'hyperboloïde. (908-914).

Chacun des deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde possède une ligne de striction qui est une courbe gauche rationnelle du quatrième ordre. Les deux lignes de striction se coupent aux six sommets de l'hyperboloïde et en quatre points imaginaires à l'infini.

Kantor (*S.*). — Sur les configurations (3,3) d'indices 8,9 et leurs rapports avec les courbes du troisième ordre. (915-932).

Une configuration (3,3) est une figure plane composée de points et de droites tels que sur chaque droite il y ait trois points et par chaque point il passe trois droites.

Pour $x = 8$, il n'y a qu'une configuratiou (3,3) possible; pour $x = 9$ on obtient trois configurations (3,3). On construit ces figures et on donne la signification de la configuration pour des courbes du troisième ordre.

Winckler (*Anton*). — Sur les intégrales transcendantes des équations différentielles du premier ordre dont les coefficients sont du second degré. (940-964).

On étudie les cas où l'équation différentielle

$$(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Hx + 2Ky + L)\,dx + (A'x^2 + 2B'xy + \ldots + L')\,dy = 0$$

se ramène à une équation différentielle linéaire du premier ordre au moyen de deux substitutions linéaires, possède une intégrale générale transcendante et où il existe trois équations de condition entre les coefficients.

Gegenbauer (*Leopold*). — Sur le symbole généralisé de Legendre. (1089-1101).

Dans ce travail, qui fait suite à un travail précédent (*voir* le compte rendu du tome LXXXII), on démontre quelques règles nouvelles pour déterminer le symbole de Legendre en particulier, au moyen des signes des termes de certaines suites de nombres (développements en fractions continues).

Gegenbauer (*Leopold*). — Sur des équations algébriques qui n'ont que des racines réelles. (1102-1107).

On expose un théorème qui comprend comme cas particuliers les théorèmes d'Hermite [*Sur l'indice des fractions rationnelles* (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, t. VII, p. 131)] et de Biehler [*Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles* (*Journal de Borchardt*, t. 82, p. 350 et suiv.)] sur de telles équations.

Boltzmann (*Ludwig*). — Sur la théorie du frottement des gaz; Troisième Partie. (1230-1263).

(*Voir* compte rendu du tome LXXXI). Contient principalement des développements en séries des quantités qui se présentent dans la théorie.

Weyr (*Emil*). — Sur l'application du système nul dans l'espace aux involutions cubiques des deux premières espèces (Stufen). (1265-1290).

On étudie la relation entre les involutions cubiques de première espèce, conjuguées à elles-mêmes et les courbes gauches du troisième ordre. On détermine sur la courbe deux involutions de ce genre au moyen de faisceaux de plans dont les axes sont des droites conjuguées dans le système nul de la courbe gauche. On étudie ensuite de plus près les involutions cubiques de seconde espèce sur de telles courbes.

Kantor (*S.*). — Les configurations $(3,3)_{10}$. (1291-1314).

On montre qu'il existe dix configurations différentes de dix points et de dix droites telles que, sur chaque droite, il y ait trois points, et que par chaque point il passe trois droites; jusqu'ici on ne connaissait qu'une seule de ces configurations. On étudie la position de ces configurations sur des courbes du second et du troisième ordre et on donne une méthode originale pour déduire *topologiquement* toutes les formes $(3,3)_{10}$ de l'une d'entre elles.

ANNALES DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR DE GRENOBLE.

Tome I, 1889.

Collet (*J.*). — Sur l'intégration des équations simultanées linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. (1-20).

Sous ce titre, l'auteur a réuni quelques exemples d'intégration de systèmes linéaires, en les accompagnant de diverses observations pratiques sur l'emploi des différentes méthodes d'intégration.

Celle de Mayer est la plus concise et la plus parfaite. Mais son emploi est subordonné à certaines conditions.

Soit un système *jacobien*

$$(1)\qquad \begin{cases} X^\alpha \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \sum\limits_i X_i^\alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \\ (\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ i = m+1, m+2, \ldots, n). \end{cases}$$

La méthode de Mayer consiste à chercher un système d'intégrales communes distinctes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-m}$ jouissant de cette propriété spéciale de se réduire respectivement à $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ quand on donne aux m premières variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des valeurs particulières $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Un tel système intégral existera, sous la condition que les coefficients X_i^α soient finis et bien déterminés quand on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_m$ respectivement par $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Alors, par un changement de variables

$$(2)\qquad x_\alpha = c_\alpha + (y_1 - c_1) y_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

le système (1) devient

$$(3)\qquad \begin{cases} Y^\alpha \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha} + \sum\limits_i Y_i^\alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, \\ (\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ i = m+1, \ldots, n); \end{cases}$$

et, par l'intégration complète d'*une seule* de ces équations, on obtiendra le système des intégrales communes cherché.

Si nous représentons par

$$\varphi_h(y_1, y_2, \ldots, y_m; x_{m+1}, \ldots, x_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m)$$

les $n-m$ intégrales distinctes de la première des équations (3) par exemple, les intégrales $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-m}$ résulteront de la résolution des équations

$$(4)\quad \varphi_h(y_1, y_2, \ldots, y_m; x_{m+1}, \ldots, x_n) = \varphi_h(c_1, y_2, \ldots, y_m; \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-m}).$$

Si les fonctions X_i^α sont holomorphes pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, on posera $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, et les formules de transformation deviendront

$$x_\alpha = y_1 y_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

Exemple I.

$$f_1 = p_3 + (x_1 x_3 + x_3 x_4 + x_2) p_4 + (x_1 + x_4 - 3x_3) p_2 = 0,$$
$$f_2 = p_1 + (x_2 x_3 x_4 - x_1 x_3 + x_4) p_4 + (x_3 x_4 - \quad x_4) p_2 = 0,$$

où l'on a posé $p_h = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_h}$.

Le système, *complété* par

$$f_3 = x_3 p_4 + p_2 = 0,$$

donne un *jacobien* qui, transformé, devient, en posant $q_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i}$,

$$F_1 = q_1 + (2y_1^3 + 2y_1 y_2 y_3 + 3y_1^2 y_3^2) p_4 = 0,$$
$$F_2 = q_2 + y_1^2 y_3 p_4 = 0,$$
$$F_3 = q_3 + y_1^2 (y_2 + 3y_1 y_3^2) p_4 = 0.$$

En appliquant la règle de Mayer, on trouve la solution

$$\psi = -\left(\frac{1}{2}y_1^4 + y_1^2 y_2 y_3 + y_1^3 y_3^3 - x_4\right) = -\left(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2 x_3 + x_3^3 - x_4\right),$$

qui se réduit bien à x_4 pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Exemple II.

$$X^1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{x_1 x_4 x_5}{x_2 x_4^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} + \frac{x_1 x_4 x_5}{x_2 x_4^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_5} = 0,$$

$$X^2\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{x_4}{2x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} + \frac{x_5}{2x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_5} = 0,$$

$$X^3\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{x_1^2}{2x_2 x_4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} + \frac{x_1^2 x_5}{2x_2 x_4^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_5} = 0.$$

Tous les coefficients de ce *jacobien* cessent d'être holomorphes pour

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

On ne pourra donc pas appliquer la méthode de Mayer en supposant nulles les constantes c_1, c_2, c_3; autrement dit, la méthode ne fournit pas de solution dans laquelle les variables x_1, x_2, x_3 puissent tendre vers zéro. Il en serait encore de même si l'on remplaçait x_1, x_2, x_3 par trois quelconques des variables x_1, x_2, ..., x_5, en permutant les opérations. C'est ce qu'on a vérifié; et, dans chaque cas, il est impossible de terminer les calculs.

Exemple III.

$$X^1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{x_2 x_4}{x_8^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} + \frac{x_3}{x_8}\frac{\partial\varphi}{\partial x_6} + \frac{x_2}{x_8}\frac{\partial\varphi}{\partial x_7} = 0,$$

$$X^2\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{x_1}{x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} - \frac{x_1 x_4}{x_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_6} + \frac{x_3}{x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_8} = 0,$$

$$X^3\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{x_1 x_2}{x_8^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} + \frac{x_2}{x_8}\frac{\partial\varphi}{\partial x_5} + \frac{x_1}{x_8}\frac{\partial\varphi}{\partial x_6} = 0.$$

Ce jacobien à huit variables est dans le même cas que le précédent. La méthode de Mayer, qui donnerait des solutions en supposant c_1, c_2, c_3 différents de zéro, n'en fournit plus quand ces quantités s'annulent.

Or ces deux systèmes s'intègrent très simplement par la méthode de Boole [1]. Cette méthode procède de celle de Jacobi pour l'intégration des systèmes auxiliaires auxquels il ramène l'intégration d'une équation quelconque aux dérivées partielles du premier ordre [2].

Quant à la méthode de Jacobi, elle a pour point de départ le théorème de Poisson, à savoir, que si ψ_1, ψ_2 sont deux solutions de l'équation

$$(f, \psi) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right) = 0,$$

---

(1) *Philosophical Transactions*; 1863.

(2) *Nova Methodus pro integratione, etc.* (*Crelle*, t. 60).

où f est une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$, l'expression $\psi_3 = (\psi_1, \psi_2)$, si elle n'est pas identiquement nulle ou constante, sera une nouvelle solution de l'équation $(f, \psi) = 0$.

La méthode de Jacobi en résulte immédiatement.

Soient $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$ des équations formant un système *jacobien*, c'est-à-dire satisfaisant, deux à deux, aux conditions

$$(5) \qquad (f_\alpha, f_\beta) = 0;$$

on doit chercher une solution commune aux équations

$$(6) \qquad (f_1, \varphi) = 0, \quad (f_2, \varphi) = 0, \quad \ldots, \quad (f_\alpha, \varphi) = 0, \quad \ldots, \quad (f_m, \varphi) = 0$$

Or, d'après les conditions (5), toutes les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ satisfont identiquement à l'une quelconque des équations (6).

Si donc φ_1 est une solution de l'équation $(f_\alpha, \varphi) = 0$, le résultat de la substitution de φ_1 à φ, dans le premier membre de l'une quelconque des autres équations (6), *s'il n'est identiquement nul ou constant, satisfera encore à l'équation considérée.*

Boole a montré que ce théorème ne s'appliquait pas seulement à des équations de la forme (6), qui est très particulière, mais encore à tout système linéaire jacobien. Quant à la méthode qu'il en déduit, elle n'est autre que celle que l'on suit habituellement pour établir qu'un système jacobien, tel que (1), admet $n - m$ intégrales communes distinctes, et qu'un tel groupe d'intégrales permet d'exprimer toutes les autres.

Soit le système linéaire jacobien

$$(7) \qquad X^\alpha \varphi = X_1^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + X_n^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

et soient $y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ les $n - 1$ intégrales distinctes de la première de ces équations. En prenant pour variables $x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, le système (7) se transforme dans le suivant

$$Y^\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} X^\alpha x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} X^\alpha y_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} X^\alpha y_n = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

dont la première équation se réduira à $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, puisque l'on a, par hypothèse,

$$X^1 y_h = 0, \qquad X^1 x_1 = X_1^1.$$

La variable x_1 n'entrant plus dans φ, le premier terme de chacune des équations suivantes disparaît. En outre, ces équations ne contiennent pas la variable x_1 dans leurs coefficients; car $X^\alpha y_h$ est une solution de $X^1 \varphi = 0$, et, par suite, doit s'exprimer en fonction des seules solutions $y_2, y_3, \ldots, y_n$ de cette équation.

Le nouveau système est donc formé de $m - 1$ équations à $n - 1$ variables. On le traitera comme le précédent; et, en continuant ainsi, on arrivera à une équation linéaire unique, renfermant $n - m + 1$ variables, qui admettra $n - m$ solutions distinctes, qui seront en même temps les solutions communes cherchées pour le système proposé.

On voit combien cette méthode est plus compliquée que celle de Mayer qui n'exige l'intégration complète que d'une seule équation; mais, ne supposant

rien *a priori* sur la forme des intégrales ni sur celle des équations, elle pourra fournir la solution cherchée dans des cas où celle de Mayer n'est pas applicable.

C'est ce qu'on vérifie immédiatement sur les exemples II et III ci-dessus proposés.

Exemple II. — L'équation $X^1\varphi = 0$ admet le système intégral suivant

$$y_2 = x_2, \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_1^2 x_3 - x_4^2 x_2, \qquad y_5 = \frac{x_3}{x_2};$$

le système transformé devient

$$Y^1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 0,$$

$$Y^2\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + \frac{y_3}{y_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_5} = 0,$$

$$Y^3\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y_3} = 0.$$

Il suffit d'intégrer $Y^2\varphi = 0$ qui ne contient ni x_1, ni y_3, et l'on trouve les solutions y_4 et $\frac{y_5}{y_2}$ qui fournissent

$$\varphi_1 = x_1^2 x_3 - x_4^2 x_2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = \frac{x_3}{x_2 x_4}$$

pour les solutions communes cherchées.

Exemple III. — Les solutions de $X^1\varphi = 0$ sont

$$y_2 = x_2, \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = x_1 x_2 x_3 - x_4 x_8^2, \qquad y_5 = x_5,$$
$$y_6 = x_1 x_2 - x_6 x_8, \qquad y_7 = x_1 x_2 - x_7 x_8, \qquad y_8 = x_8.$$

Le système transformé est

$$Y^1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 0,$$

$$Y^2\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + \frac{y_4}{y_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_4} + \frac{y_2 y_6 - y_4}{y_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_6} + \frac{y_7}{y_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_7} + \frac{y_8}{y_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_8} = 0,$$

$$Y^3\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y_3} + \frac{y_5}{y_8}\frac{\partial\varphi}{\partial y_5} = 0.$$

Les solutions de $Y^3\varphi = 0$ sont

$$z_3 = y_3, \qquad z_4 = \frac{y_4}{y_2}, \qquad z_5 = y_5, \qquad z_6 = \frac{y_2 y_6 - y_4}{y_2^2},$$
$$z_7 = \frac{y_7}{y_2}, \qquad z_8 = \frac{y_8}{y_2}.$$

Par une nouvelle transformation, le système devient

$$Z^1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} = 0,$$

$$Z^2\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} + \frac{1}{z_2}\frac{\partial\varphi}{\partial z_3} = 0.$$

Les solutions de cette dernière équation sont les solutions communes cherchées. On a ainsi le système

$$z_1, \quad \frac{z_5 z_8}{z_6}, \quad z_6, \quad z_7, \quad z_8,$$

qui fournit les expressions

$$\varphi_1 = \frac{x_1 x_2 x_5 - x_3 x_8^2}{x_2}, \qquad \varphi_2 = \frac{x_5 x_7}{x_2 x_3}, \qquad \varphi_3 = \frac{x_5 (x_1 x_5 - x_2 x_6)}{x_2^2},$$

$$\varphi_4 = \frac{x_1 x_2 - x_7 x_8}{x_2}, \qquad \varphi_5 = \frac{x_5}{x_2},$$

qui forment un système complet de solutions communes pour les équations proposées.

On voit, par ce qui précède, que la méthode de Mayer, malgré son élégante concision, est d'un emploi moins général que celle de Boole; elle comporte des intégrations, en général, plus compliquées que cette dernière, et elle suppose, en outre, une résolution d'équations qui peut n'être pas sans difficulté.

Si la méthode de Boole est plus compliquée que celle de Mayer, on peut remarquer que, en compensation, les équations qu'elle conduit à intégrer successivement sont de plus en plus simples; et, pour la première même, l'intégration en est généralement plus facile que pour l'équation de Mayer, qui s'en déduit par un changement de variables qui en complique toujours beaucoup la forme.

On pourrait d'ailleurs conduire les calculs de façon à n'avoir à intégrer complètement aucune équation.

Pour cela, il suffirait d'appliquer aux équations linéaires la méthode générale relative à des équations simultanées quelconques formant un système complet [1]. A la vérité, cette marche semble devoir compliquer notablement les calculs, puisqu'on sera alors amené à intégrer plusieurs systèmes analogues au proposé. Mais, pour chacun d'eux, il suffira de déterminer, non plus un système intégral complet, mais une seule et unique solution commune. Tout au moins est-ce une marche à tenter quand, par les autres méthodes, on n'aura pu parvenir à une solution. On y arrivera habituellement, sans difficulté, par la méthode donnée par Jacobi. Cette méthode a reçu depuis d'importants développements théoriques [2]; mais, pour les applications, on peut s'en tenir à la règle donnée par cet illustre géomètre.

L'auteur a donné ailleurs des applications de cette méthode dans un travail depuis longtemps publié sur la question [3].

Astor (*A.*). — Sur quelques propriétés du mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une surface du second degré. (231-262).

L'auteur a déjà donné, dans le *Bulletin des Sciences mathematiques* de

---

(1) J. Collet, *Annales de l'École Normale supereure*, t. VII.

(2) Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 65, p. 257. — Weiler, *Schlömilch's Zeitschrift*, t. VIII, p. 264.

(3) J. Collet, *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VII, p. 43 et 52.

2nd Part.

décembre 1889, un exposé des principaux résultats contenus dans ce travail. Mais, comme cet exposé est un peu rapide, il nous a semblé utile de donner une analyse un peu plus détaillée de l'article.

Il comprend deux Parties; la première contient une démonstration pour ainsi dire mécanique de la possibilité de l'intégration algébrique de l'équation d'Euler, démonstration qui fournit à la fois la forme de l'intégrale et une sorte de représentation géométrique de la variation des variables; la seconde Partie est une contribution à l'étude de la polhodie et de l'herpolhodie.

Première Partie. — On sait que l'équation d'Euler a donné lieu à de nombreux travaux de la part de géomètres éminents, tant au point de vue analytique qu'au point de vue géométrique, et il suffit à cet égard de renvoyer au Chapitre que le regretté Halphen a consacré à cette équation dans le Tome I de sa *Théorie des fonctions elliptiques*. Mais il n'existait pas, à notre connaissance, de démonstration du théorème tirée de considérations mécaniques, et cependant il en est une qui se présente assez naturellement à l'esprit quand on étudie le mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface du second degré à centre et sollicité par une force attractive émanant du centre et proportionnelle à la distance. Jacobi, par l'application de son beau théorème sur les équations canoniques, a trouvé en termes finis l'équation de la trajectoire; mais la réaction se trouvant éliminée par le procédé même du calcul, il n'est pas facile de voir ce que devient le résultat quand cette réaction est nulle, c'est-à-dire quand, comme cela doit pouvoir arriver en choisissant convenablement les conditions initiales, le point décrit librement la conique que détermine, dans la surface, le plan central qui contient la vitesse du point de départ. Il n'en est plus de même quand on écrit les équations du mouvement en tenant compte de la réaction de la surface; celle-ci se calcule aisément et permet de trouver l'équation du mouvement dans le cas particulier indiqué.

En appelant a, b, c les carrés des demi-axes de la surface que, pour préciser, on peut supposer être un ellipsoïde, N la réaction considérée comme positive quand elle est dirigée vers le centre, R la force centrale considérée comme positive quand elle est attractive, Δ l'inverse de la distance de l'origine au plan tangent, et posant

$$U = \frac{1}{a}\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{1}{b}\frac{dy^2}{dt^2} + \frac{1}{c}\frac{dz^2}{dt^2},$$

on trouve immédiatement les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{R}{r} + N\Delta, \\ dU + 2N\,d\Delta = 0, \end{cases}$$

et ces formules conviennent à toutes les formes de la force centrale, ce qui, remarquons-le en passant, suggère tout naturellement l'idée de voir si l'on ne pourrait pas déterminer la loi de la force de façon que Δ demeure constant, c'est-à-dire que la trajectoire soit une polhodie. Nous reviendrons bientôt sur ce point.

Dans le cas particulier où la force est proportionnelle à la distance ($R = Kr$), les deux équations (1) fournissent immédiatement la relation

$$N\Delta^3 = H,$$

où H est une constante, c'est-à-dire que la réaction varie proportionnellement au cube de la distance du centre au plan tangent à la surface en chaque point de la trajectoire.

La première équation (1) devient une intégrale du problème; en la combinant avec l'intégrale des forces vives, $v^2 = C - Kr^2$, on obtient l'équation différentielle de la trajectoire

$$\frac{\frac{dx^2}{a} + \frac{dy^2}{b} + \frac{dz^2}{c}}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{K + \frac{H}{\Delta^2}}{C - Kr^2}.$$

Si l'on prend pour variables indépendantes les coordonnées elliptiques du point sur la surface, λ et μ, et si l'on pose

$$C' = a + b + c - \frac{C}{K}, \qquad H' = \frac{Habc}{K},$$

l'équation de la trajectoire s'écrit, après une réduction simple,

$$\frac{\lambda\, d\lambda^2}{(\lambda^2 - C'\lambda - H')(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)} = \frac{\mu\, d\mu^2}{(\mu^2 - C'\mu - H')(a-\mu)(b-\mu)(c-\mu)}.$$

On obtient, de plus, aisément l'expression du rayon de courbure de la trajectoire sous la forme

$$\rho = \frac{(\lambda\mu)^{\frac{3}{2}}(\lambda + \mu - C')}{\sqrt{abc}\,(H' + \lambda\mu)}.$$

On voit immédiatement que, si $U_0 = K$, ou si les composantes α, δ, γ de la vitesse initiale satisfont à la relation

$$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\delta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} = K,$$

N est nul, H et H' également, et l'équation de la trajectoire devient

$$\frac{d\lambda^2}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)(C'-\lambda)} = \frac{d\mu^2}{(a-\mu)(b-\mu)(c-\mu)(C'-\mu)}.$$

C'est justement la forme de l'équation d'Euler. Ceci suffit pour montrer la liaison étroite de la question de l'intégration de cette équation avec le problème de Mécanique qui nous occupe. Au point de vue géométrique, on en déduit que, si l'on construit la surface de l'onde par rapport à un ellipsoïde par exemple, et qu'on en considère une section centrale, les deux rayons situés sur chaque demi-droite, partant du centre, fournissent, par la variation de leurs carrés, une sorte d'image de la variation des variables satisfaisant à une équation d'Euler, dans laquelle les racines du polynôme F sont les carrés des trois demi-axes et une quatrième grandeur positive convenablement choisie.

Au point de vue analytique, le résultat trouvé montre que les coordonnées λ et μ d'un point de l'ellipsoïde le long d'une section centrale doivent satisfaire à une équation d'Euler. C'est ce qu'on vérifie aisément et l'on trouve que l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}} = 0,$$

où

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

peut se mettre sous la forme

$$(2) \quad \sqrt{A(a-\lambda)(a-\mu)} + \sqrt{B(b-\lambda)(b-\mu)} + \sqrt{C(c-\lambda)(c-\mu)} = 0,$$

A, B, C étant des constantes liées par la relation symétrique et aisée à retenir,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(a-b)(a-c)(a-d) \\ + B(b-a)(b-c)(b-d) \\ + C(c-a)(c-b)(c-d) = 0. \end{array} \right.$$

Le procédé d'intégration présente encore l'avantage qu'il n'y a pas lieu de faire un nouveau calcul ni un changement de variable quand F devient du troisième degré; car, si

$$F = (x-a)(x-b)(x-c),$$

la même formule (2) fournira l'intégrale, à condition de faire d infini dans la relation (3), ce qui la réduit à la suivante

$$A(a-b)(a-c) + B(b-a)(b-c) + C(c-a)(c-b) = 0.$$

On voit, en résumé, comment l'intégration algébrique de l'équation d'Euler peut être déduite de considérations mécaniques.

Deuxième Partie. — Nous avons déjà dit que la seconde équation (1), savoir

$$dU + 2N\,d\Delta = 0.$$

amène tout naturellement à se demander si l'on ne peut pas déterminer la loi de la force de manière à avoir une polhodie; pour cela Δ doit être constant et, par suite, U doit l'être également, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{1}{a}\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{1}{b}\frac{dy^2}{dt^2} + \frac{1}{c}\frac{dz^2}{dt^2} = K.$$

Partant de là je démontre que, si l'on pose

$$p^2 = \lambda + \mu = a + b + c - r^2, \qquad \frac{\lambda\mu}{abc} = \frac{1}{l^2} = l'^2,$$

où l est la distance constante du centre au plan tangent, l'expression de la force doit être de la forme

$$R = Kr\left\{1 - \frac{abc\,l'^2(al'^2-1)(bl'^2-1)(cl'^2-1)}{[p^2-(ab+ac+bc)l'^2+abc\,l'^4]^2}\right\},$$

et que, réciproquement, si un point est placé sur la surface en un point avec une vitesse initiale dirigée suivant la tangente à la polhodie du point et dont les composantes α, δ, γ satisfont à l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\delta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} = K,$$

ce point, sous l'influence de la force ci-dessus décrira cette polhodie.

Le calcul de la réaction se fait aisément et donne

$$N = \frac{K abc l'(al'^2 - 1)(bl'^2 - 1)(cl'^2 - 1)}{[p^2 - (ab + ac + bc)l'^2 + abcl'^4]^2}.$$

Cette formule permet de voir comment est dirigée la réaction suivant que la polhodie est située dans un des fuseaux de Poinsot qui contiennent le grand ou le petit axe; dans le premier cas, N est < 0, et R est toujours attractive; dans le second, N est > 0, alors R peut s'annuler; aux points où ce fait se produira, la polhodie aura même rayon de courbure que la ligne géodésique qui lui est tangente en ce point. Ces points peuvent, pour la polhodie, être comparés aux points d'inflexion des courbes planes, et l'équation

$$[p^2 - (ab + ac + bc)l'^2 + abcl'^4)^2 - abcl'^2(al'^2 - 1)(bl'^2 - 1)(cl'^2 - 1) = 0,$$

où l'on remplacera p^2 et l'^2 par leurs valeurs en λ et μ, représente, en coordonnées elliptiques, le lieu de ces points sur l'ellipsoïde.

De la polhodie on passe aisément à l'herpolhodie. M. Darboux, dans une analyse des plus élégantes, a donné des expressions de la vitesse aréolaire et de la vitesse linéaire du point qui parcourt l'herpolhodie d'un mouvement tel qu'il résulte du mouvement de Poinsot correspondant; partant de la description de la polhodie sous l'influence de la force R plus haut déterminée, par une application très simple de la théorie des mouvements relatifs, je trouve les expressions des vitesses susdites dans un tout autre mouvement : c'est celui qui résulte du roulement du cône correspondant à la polhodie sur le cône fixe ayant pour base l'herpolhodie, roulement réglé de façon qu'à chaque instant le contact ait lieu suivant la génératrice sur laquelle le mouvement déterminé par la force R amène le mobile qui parcourt la polhodie. En appelant ρ et θ les coordonnées d'un point de l'herpolhodie, posant

$$h = (al'^2 - 1)(bl'^2 - 1)(cl'^2 - 1) \quad \text{et} \quad u = \rho^2 - \frac{h}{l'^2},$$

on trouve facilement

$$\frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2\frac{d\theta^2}{dt^2} = K\left(a + b + c - \frac{1}{l'^2} - \rho^2 + \frac{abcl'^2\rho^2}{\frac{p}{l'^2} - \rho^2}\right),$$

$$\rho^4\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{K}{l'^2}u.$$

On en déduit, en divisant membre à membre,

$$\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\theta}\right)^2 = \frac{abcl'^4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2l'^2\right)}{u} - \frac{abcl'^4 h}{u^2} - l'^2.$$

Différentiant en remarquant que $du = 2\rho\, d\rho$, il vient

$$\frac{1}{\rho^3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}\right) = abcl'^4\left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2l'^2\right)u - 2h\right].$$

Cette formule fournit immédiatement les points pour lesquels il peut y avoir inflexion, et l'on est tout naturellement amené à les considérer. On en déduit

le résultat indiqué par M. de Sparre pour l'herpolhodie proprement dite de Poinsot, à savoir qu'elle ne peut présenter des inflexions.

De plus, la formule ci-dessus donne l'expression d'une force centrale sous l'influence de laquelle le point supposé libre décrirait l'herpolhodie pourvu qu'il fût placé dans des conditions initiales convenables. Cette expression est, en désignant par C la constante des aires,

$$R = \frac{C^2 abc\, l'^4 \rho}{\left(\rho^2 - \frac{h}{l'^2}\right)^2} \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 2l'^2\right)\left(\rho^2 - \frac{h}{l'^2}\right) - 2h\right].$$

Cette expression est de la forme

$$R = \frac{N\rho}{(\rho^2 + n)^2} + \frac{2P\rho}{(\rho^2 + n)^3},$$

ρ étant le rayon vecteur, n, N et P trois constantes.

Réciproquement, si un point est sollicité par une force centrale de cette forme, sa trajectoire pourra, dans des conditions particulières, être une herpolhodie. Et d'abord il faudra que la constante des forces vives soit négative. Ceci étant et conservant toujours les mêmes notations, on pourra former deux équations du troisième degré ayant pour racines, la première al'^2, bl'^2, cl'^2, la seconde $al'^2 - 1$, $bl'^2 - 1$, $cl'^2 - 1$, et si a, b, c et l' déterminent une herpolhodie, la trajectoire coïncidera avec cette courbe. Dans le cas particulier où n est négatif et P positif, on a toujours une herpolhodie tracée, sur un hyperboloïde à une nappe, autour du sommet du grand axe de l'ellipse de gorge. C'est le cas singulier, indiqué par M. Darboux, où le rayon vecteur, après avoir tourné dans un sens, rétrograde à partir d'une certaine position. Il est à remarquer que, au point de rétrogradation, la force deviendrait infinie.

Un cas particulier est intéressant à examiner, c'est celui où $n = 0$, c'est-à-dire $(al'^2 - 1)(bl'^2 - 1)(cl'^2 - 1) = 0$.

Ceci peut se produire dans deux circonstances, si la surface est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe et si l'on a, dans les deux cas,

$$l'^2 = \frac{1}{b},$$

b étant le carré de l'axe moyen de l'ellipsoïde ou du petit axe de l'ellipse de gorge dans l'hyperboloïde. L'herpolhodie correspond alors à la polhodie plane singulière de Poinsot, qui est toujours une ellipse dont le plan contient l'axe b.

L'expression de la force est alors

$$R = \frac{N}{\rho^3},$$

et l'on peut obtenir une infinité d'ellipsoïdes ou d'hyperboloïdes à une nappe admettant la même polhodie plane, l'herpolhodie correspondante étant la trajectoire d'un point matériel soumis à la force représentée par la formule ci-dessus, ce qui amène à ce théorème :

« Un point matériel étant sollicité vers un centre fixe en raison inverse du cube de la distance, si la constante des forces vives est négative, c'est-à-dire si

$$v_0^2 - \frac{N}{\rho_0^2} < 0,$$

la trajectoire peut être obtenue par le roulement d'une ellipse sur un plan tangent, l'ellipse tournant autour de son centre.

Enfin, si la force a pour expression

$$\frac{N\rho}{(\rho^2+n)^2},$$

où n a une valeur négative, et si

$$\rho_0^2 - \frac{N}{\rho_0^2+n} < 0,$$

la trajectoire pourra être engendrée par le roulement d'une ellipse, si la force est attractive, par celui d'une hyperbole si elle est répulsive.

Tome II; 1890.

Janet (*P.*). — Étude théorique et expérimentale sur l'aimantation transversale des conducteurs magnétiques. (1-93).

Les champs magnétiques créés par un système quelconque de courants peuvent être de deux espèces essentiellement différentes, au point de vue mathématique : à l'extérieur des conducteurs la force magnétique dérive d'un potentiel; à l'intérieur, elle n'en dérive pas. C'est l'aimantation des substances magnétiques et, en particulier, du fer sous l'influence de ces champs ne dépendant pas d'un potentiel (champs non conservatifs), que l'auteur s'est proposé d'étudier; en d'autres termes, c'est l'aimantation de ces substances sous l'influence d'un courant qui les traverse; il la désigne sous le nom général d'*aimantation transversale*. Le Mémoire comprend deux parties, l'une théorique, l'autre expérimentale. Nous insisterons surtout sur la première.

Un premier Chapitre est destiné à étendre aux champs non conservatifs quelques théorèmes démontrés pour les champs ordinaires. Le plus général est le suivant : *le flux d'induction magnétique se conserve dans tout l'espace, y compris les conducteurs magnétiques ou non parcourus par des courants quelconques.*

Le Chapitre II est consacré à la mise en équation du problème général du magnétisme transversal induit.

On démontre que, dans le cas d'un coefficient d'aimantation constant, ce magnétisme transversal est entièrement superficiel (comme dans l'aimantation de première espèce).

Soit alors Ω le potentiel du magnétisme induit, F_n la composante normale en un point de la surface de la force électromagnétique donnée; la densité superficielle est

$$\sigma = k\frac{d\Omega}{dn} - kF_n.$$

D'où, pour définir Ω, l'équation intégrale

$$(1) \qquad \Omega = k\int_S \frac{1}{r}\frac{d\Omega}{dn}\,dS - k\int_S \frac{1}{r}F_n\,dS.$$

C. Neumann a donné une méthode générale pour trouver la fonction Ω, dans

le cas de l'aimantation de première espèce, c'est-à-dire dans le cas où F_n est de la forme $-\frac{dV}{dn}$. Il est aisé de ramener l'équation (1) à ce cas. Posons successivement

$$V = -k\int \frac{1}{r} F_n \, dS,$$

$$\Omega - V = \Omega',$$

et remarquons que V est un potentiel. L'équation (1) devient alors

$$\Omega' = k\int \frac{1}{r} \frac{d\Omega'}{dn} dS + k\int \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} dS.$$

et la méthode de C. Neumann s'applique directement.

Après avoir étendu à l'ellipsoïde aimanté transversalement un théorème de F. Neumann qui donne le moment magnétique d'un tel ellipsoïde, l'auteur montre comment on peut mettre le problème en équation dans le cas d'un coefficient d'aimantation variable : il suffit, pour cela, d'écrire les deux équations solénoïdales qui expriment la conservation du flux d'induction.

Il est important de soumettre la théorie au contrôle de l'expérience. L'auteur est donc amené à rechercher les cas simples dans lesquels l'expérience est possible et à appliquer les équations générales à ces cas. Le Chapitre III contient donc l'étude des cylindres à section quelconque parcourus par un courant homogène; l'une des intégrations peut alors s'effectuer dans le terme tout connu, et l'équation générale devient

$$(2) \qquad \Omega = k\int \frac{1}{r} \frac{d\Omega}{dn} dS + 2k\int \log r \, F_n \, ds,$$

ds étant l'élément d'arc de la section droite; d'ailleurs on démontre que F_n est égale et perpendiculaire à la force qu'exercerait au même point le cylindre supposé plein, homogène, et agissant suivant la loi de Newton.

La fonction Ω étant obtenue par la méthode de C. Neumann ou par toute autre, on devra, pour avoir une idée plus complète de la distribution du magnétisme, rechercher les lignes d'aimantation. Cette recherche se ramène à une simple quadrature. En effet, si l'on appelle H le potentiel vecteur (parallèle à l'axe du cylindre), Ψ la fonction conjuguée de Ω, l'équation des lignes d'aimantation est

$$H = \Psi + C.$$

Enfin il faut spécifier la forme du cylindre. L'auteur choisit le cylindre circulaire et le cylindre elliptique (Chap. IV). Le premier est très simple : il n'y a pas de densité superficielle apparente, par suite, pas d'action extérieure; les lignes d'aimantation sont des cercles concentriques en cylindre. Le deuxième est plus compliqué. Pour l'étudier, il faut appliquer l'équation (2). La théorie générale donne, pour les composantes α, β de l'action électromagnétique

$$\alpha = \frac{4\pi a y}{a+b}, \qquad \beta = -\frac{4\pi b x}{a+b}.$$

Il s'agit de calculer l'intégrale

$$J = \int \log r \, F_n \, ds = \frac{2\pi}{a+b} \int \log r (a y \cos nx - b x \cos ny) \, ds.$$

On trouve

$$J = -\frac{\gamma\pi a b(a-b)}{a+b}\int_0^{2\pi}\log r \sin\theta\cos\theta\, d\theta = -2\lambda L.$$

Soit $x_0 y_0$ le point pour lequel il faut calculer l'intégrale

$$L = \int_0^{2\pi}\log\sqrt{(x_0 - a\cos\theta)^2 + (y_0 - b\sin\theta)^2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

En prenant la dérivée par rapport à x_0, on débarrasse cette intégrale de tout signe logarithmique, puis, posant

$$\cos\theta + i\sin\theta = z,$$

on trouve

$$M = \frac{\partial L}{\partial x_0} = \frac{1}{2}\int\frac{(az^2 - 2x_0 z + a)(z^2-1)}{z^2\{[2x_0 z - a(z^2+1)]^2 - [2iy_0 z - b(z^2-1)]^2\}}dz.$$

L'intégrale doit maintenant être prise le long du cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine. Décomposant la quantité sous le signe $\int$ en fractions rationnelles, on peut écrire

$$2c^2 M = \int\left(A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z-z_1} + \frac{E}{z-z_2} + \frac{F}{z-z_3} + \frac{G}{z-z_4}\right)dz,$$

z_0 étant l'affixe du point $x_0 y_0$, z'_0 la quantité conjuguée, on a

$$z_1 = \frac{z_0 + \sqrt{z_0^2 - c^2}}{a+b}, \qquad z_2 = \frac{z_0 - \sqrt{z_0^2 - c^2}}{a+b}.$$

$$z_3 = \frac{z'_0 - \sqrt{z_0^2 - c^2}}{a-b}, \qquad z_4 = \frac{z'_0 - \sqrt{z_0^2 - c^2}}{a-b}.$$

Tout revient à discuter la position de ces points par rapport au cercle : pour cela l'auteur emploie le raisonnement suivant; L est un potentiel dû à une certaine couche superficielle; M est une force qui est continue tant que $x_0 y_0$ reste à l'intérieur de l'ellipse : donc, tant que $x_0 y_0$ est intérieur à l'ellipse, aucun des points z ne peut franchir le cercle, car il en résulterait une discontinuité pour M. Il suffit donc de trouver la disposition de ces points pour une valeur particulière de $x_0 y_0$, par exemple $x_0 = y_0 = 0$. On trouve ainsi que les points 1 et 2 sont intérieurs, 3 et 4 extérieurs au cercle. Donc

$$2c^2 M = 2M = 2i\pi(B + D + E)$$

On en déduit L, puis J; tout calcul fait,

$$J = \frac{16\pi^2(a-b)ab}{(a+b)^2}xy = \mu xy.$$

L'équation fondamentale devient

$$\Omega = k\int\frac{1}{r}\frac{d\Omega}{dn}dS - k\mu xy.$$

On pourrait appliquer la méthode de C. Neumann. Il est plus simple de

poser

$$\Omega = \Omega_1 + \varphi xy.$$

Il vient

$$\Omega_1 + \varphi xy = k \int \frac{1}{r} \frac{d\Omega_1}{dn} dS - k\varphi(a^2 + b^2) \frac{\mu}{\lambda} xy - k\mu xy.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$\Omega_1 = 0, \qquad \varphi = -\frac{1}{a+b} \frac{16\pi^2(a-b)abk}{(a^2+b^2)(1+\frac{4}{3}\pi k) + 2ab},$$

d'où

$$\Omega = \varphi xy.$$

On en déduit pour la densité superficielle

$$\sigma = -\frac{\frac{4}{3}\pi kabc^2}{(a^2+b^2)(1+\frac{4}{3}\pi k) + 2ab} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}.$$

Tout ceci se rapporte à un courant de densité 1. Pour un courant d'intensité I, on aurait

$$\Sigma = \sigma \frac{I}{\pi ab}.$$

On peut écrire, par des considérations géométriques très simples,

$$\sigma = -Cpxy,$$

C étant une constante positive et p la longueur de la perpendiculaire abaissee du centre sur la tangente au point x, y. D'autre part, supposons que le cylindre soit chargé d'une couche d'électricité négative en équilibre; la densité de cette couche serait

$$\sigma_1 = -Cp,$$

d'où le théorème suivant :

La densité superficielle du magnétisme libre en un point de la surface d'un cylindre elliptique aimanté transversalement est égale à la densite qu'aurait en ce point une couche d'électricité négative en équilibre, multipliée par le produit des coordonnées de ce point.

Les lignes d'aimantation sont obtenues par la méthode générale indiquée plus haut : on trouve que ce sont des ellipses semblables, moins aplaties que le cylindre. La couche superficielle étudiée plus haut est due aux extrémités libres de ces filets solénoïdaux.

Le Chapitre V montre enfin que l'on peut résoudre entièrement, par une marche analogue, le problème de la distribution du magnétisme transversal dans un tube cylindrique à sections elliptiques homofocales; les expressions auxquelles on arrive sont plus compliquées que les précédentes : nous renverrons au Mémoire original.

La seconde Partie du travail est plus spécialement consacrée aux expériences [1] : nous serons donc beaucoup plus bref dans son analyse. Le premier

---

[1] Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Grenoble.

Chapitre renferme les vérifications expérimentales, portant sur les cylindres circulaires et elliptiques. Dans le premier cas, l'aimantation non apparente est révélée par l'artifice suivant : le cylindre d'acier, préalablement fendu, est, après l'aimantation, séparé en deux parties qui présentent chacune, conformément à la théorie, deux lignes polaires apparentes. Pour le cylindre elliptique, il n'est besoin d'aucun artifice : le spectre magnétique révèle la présence d'une couche superficielle; le signe du magnétisme en chaque point, étudié à l'aide d'une petite aiguille aimantée, est celui que prévoit la théorie. Les Chapitres suivants sont consacrés à l'exposé d'une méthode permettant d'appliquer l'aimantation transversale d'un tube cylindrique à l'étude du coefficient d'aimantation du fer. Nous renverrons le lecteur au Mémoire original pour la théorie de cette méthode, son application expérimentale et les résultats qu'elle fournit.

Stouff (*X.*). — Sur le lieu des centres de courbure d'une surface minima. (165-184).

Ce travail appartient à un domaine de recherches qui ont pour point de départ le travail de M. Weingarten *Ueber eine Klasse auf einander abwickelbaren Flächen* (*Journal de Crelle*, t. 59). On sait que les normales élevées le long d'une ligne de courbure d'une surface touchent l'une des nappes de la surface des centres de courbure aux points d'une ligne géodésique de cette dernière. Cette propriété devait faire pressentir un lien entre la théorie des surfaces des centres, et celle des surfaces applicables les unes sur les autres. M. Weingarten a reconnu que les surfaces de centres des surfaces dont un rayon de courbure est la même fonction de l'autre sont toutes applicables les unes sur les autres et en particulier sur une surface de révolution. La démonstration de ce théorème s'obtient facilement en rapportant la surface primitive à un système de lignes de courbure et à un système de lignes pour lesquelles un des rayons de courbure est constant. Gauss, dans ses *Disquisitiones supra superficies curvas,* avait déjà remarqué qu'à ce système correspond sur la surface des centres un système orthogonal.

Réciproquement, M. Weingarten reconnaît que les surfaces dont l'élément linéaire est $ds = \sqrt{dp^2 + \varphi(p)\,dq^2}$, c'est-à-dire les surfaces applicables sur une surface de révolution, peuvent toujours être considérées comme les surfaces des centres de surface dont un rayon de courbure est fonction de l'autre. M. Weingarten examine le cas des surfaces minima : la surface de révolution en question est alors engendrée par la développée d'une chaînette. A ces recherches se rapporte un autre travail de M. Weingarten (*Journal de Crelle,* 1863) *Ueber die Oberflächen für welche einer der Halbkrümmungsmeser eine Function des anderen ist.* Il se propose de trouver toutes les surfaces pour lesquelles il y a entre les deux rayons de courbure une relation donnée. On est ramené à un problème de Monge : trouver les surfaces dont les normales touchent une surface donnée, et M. Weingarten donne la solution suivante : « Si l'on tend sur la surface donnée, à partir d'une courbe arbitraire et perpendiculairement à cette courbe, des fils flexibles d'égale longueur, les extrémités de ces fils décrivent la surface demandée. »

Dans un Mémoire publié en 1882, dans les *Mathematische Annalen,* M. Lie a été conduit à s'occuper de cette question (*Untersuchungen über geodätische Curven*). Il cherche la forme de l'élément linéaire des surfaces qui possèdent en elles-mêmes une transformation infinitésimale, telle que chaque ligne géo-

désique soit transformée en une ligne géodésique infiniment voisine. Plus particulièrement, quelles sont celles qui permettent cette transformation, sans extension de l'élément superficiel? Parmi celles-ci les plus remarquables sont les surfaces des centres des surfaces, dont un rayon de courbure est fonction de l'autre. En particulier, les surfaces dont les lignes géodésiques permettent *deux* transformations infinitésimales, sont les surfaces de centre des surfaces dont le rapport des rayons de courbure est constant (p. 389).

Dans plusieurs Notes (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie,* 14 décembre 1882; *Acta mathematica,* t. X; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1883), M. Lipschitz a traité de nouveau la recherche des surfaces dont un rayon de courbure est fonction de l'autre.

Par une méthode qui lui est particulière, M. von Lilienthal est revenu sur ces questions (*Mathematische Annalen,* t. XXX). L'auteur rapporte la surface primitive à un système de courbes coordonnées quelconques, et fait intervenir dans ses formules les angles que fait la représentation sphérique d'une courbe de la surface avec les représentations sphériques des deux courbes coordonnées. Cette méthode, d'une extrême élégance, lui permet de démontrer les théorèmes déjà connus sur les surfaces de centres.

Si les rayons de courbures sont fonction l'un de l'autre, le produit des courbures totales des deux nappes de la surface des centres est $\frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^4}$ (Halphen). Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes (Ribeaucour). M. von Lilienthal trouve des résultats nouveaux. La courbure totale de la surface des centres d'une surface minima est -4 fois celle de la surface primitive. Il indique également la manière d'obtenir les arêtes de rebroussement de la surface focale.

Dans le tome XI des *Acta mathematica,* M. von Lilienthal a donné une nouvelle démonstration du théorème de M. Weingarten à l'aide des formules qui lui sont propres.

M. Stouff s'est proposé l'étude de la surface des centres, en partant des formules bien connues de M. Weierstrass relatives aux surfaces minima. La méthode géométrique qu'il emploie se présente naturellement et avait été utilisée dans d'autres cas par certains auteurs, M. Curtis, par exemple. Elle lui permet de retrouver le théorème de M. von Lilienthal, relatif à la courbure totale de la surface des centres. Dans les calculs s'introduisent deux angles qui paraissent devoir jouer dans les questions de ce genre un rôle assez important : ce sont les angles que fait la ligne géodésique de la surface des centres, développée d'une ligne de courbure de la surface primitive, avec les deux lignes asymptotiques de la surface des centres. Les équations des lignes de courbure de la surface des centres se présentent sous une forme particulièrement élégante; quant aux lignes asymptotiques, elles correspondent aux lignes de longueur nulle de la surface minima. L'auteur obtient ensuite l'expression du rayon de courbure d'une ligne de courbure de la surface des centres. Il applique ses formules à la surface des centres de la surface d'Enneper; il se trouve que l'intégration de l'équation des lignes de courbure de cette surface se ramène à la formule d'addition des fonctions circulaires. On est naturellement conduit à se demander si la formule d'addition des fonctions elliptiques n'interviendrait pas dans une théorie voisine. Le rayon de courbure des lignes de courbure de cette surface donne également lieu à des conséquences intéressantes. La caténoïde et l'hélicoïde gauche sont ensuite traités.

La surface des centres d'une surface minima présente normalement une arête de rebroussement. Les surfaces pour lesquelles la fonction de M. Weierstrass est

$$F(u) = \frac{1}{(\gamma u + k)^k (u - \gamma)^{4-k}}$$

présentent une arête de rebroussement coupée à angle droit par les normales à la surface primitive. Cette arête de rebroussement a un rayon de courbure invariable.

Le reste du Mémoire est consacré à démontrer que la surface des centres d'une surface minima est applicable sur la surface focale d'une caténoïde et que, réciproquement, toute surface applicable sur la surface focale d'une caténoïde est la surface des centres d'une certaine surface minima, par une méthode qui puisse être présentée dans un cours élémentaire.

Lyon. — Sur les courbes à torsion constante. (353-422).

Ce Mémoire important a pour objet l'étude des courbes à torsion constante, et principalement la recherche de celles qui sont algébriques et unicursales. Aucune courbe algébrique à torsion constante n'ayant encore été signalée, il était particulièrement intéressant de montrer que de pareilles courbes existent.

Le Chapitre I est consacré à la formation des équations générales des courbes à torsion constante, et spécialement de celles de ces courbes qui sont unicursales. Les formules de Fresnel permettent d'abord de représenter ces courbes par les équations (1)

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \tau \int (c' dc'' - c'' dc'), \\ y = \tau \int (c'' dc - c dc''), \\ z = \tau \int (c dc' - c' dc), \end{cases}$$

dans lesquelles τ est le rayon de torsion, et c, c', c'' trois fonctions arbitraires, assujetties à rester sur une sphère de rayon 1, d'où

$$(2) \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

A l'aide des formules de M. O. Bonnet, $c = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}$, $c' = i\frac{1 + \alpha\beta}{\alpha - \beta}$, $c'' = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$, on peut remplacer ces fonctions par deux autres, α et β, qui sont les paramètres des génératrices rectilignes de la sphère (2), et qui ne sont assujetties à aucune condition. De plus, les deux fonctions α et $-\frac{1}{\beta}$ devront être imaginaires conjuguées pour les courbes réelles, algébriques pour les courbes algébriques, et rationnelles pour les courbes unicursales.

Si l'on pose alors

$$-i(\alpha - \beta) = \frac{\partial}{\partial u_1}, \qquad -i\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial u},$$

les équations des courbes à torsion constante deviennent

$$(3)\qquad \begin{cases} x + iy = \tau \int \dfrac{du}{1 + uu_1}, \\ x - iy = \tau \int \dfrac{du_1}{1 + uu_1}, \\ iz = \dfrac{\tau}{2} \int \dfrac{u\,du_1 - u_1\,du}{1 + uu_1}, \end{cases}$$

résultat qu'on pouvait déduire directement des formules (1), en y faisant

$$\frac{c' - ic}{c''} = u, \qquad \frac{c' + ic}{c''} = u_1.$$

Les fonctions u, u_1 doivent être imaginaires conjuguées pour les courbes réelles, algébriques pour les courbes algébriques, rationnelles pour les courbes unicursales. Entre les deux fonctions u, u_1 on établira une relation quelconque

$$(4)\qquad f(u, u_1) = 0,$$

et les équations (3) définiront une courbe correspondante.

Si, pour les courbes, on suppose que u et u_1 soient imaginaires conjugués, l'équation (4) fournira, en général, deux relations entre les quantités réelles : la forme de f devra donc être telle que ces deux relations se réduisent à une seule. Il en est ainsi pour $uu_1 = c^2 = a$, qui fournit alors la courbe

$$x + iy = \frac{\tau}{1 + a} u,$$

$$x - iy = \frac{a\tau}{1 + a} \frac{1}{u},$$

$$z = i \frac{a\tau}{1 + a} \log u,$$

qui n'est autre qu'une hélice tracée sur un cylindre circulaire.

Les équations (3) peuvent être transformées de façon à ne dépendre que d'une seule quadrature, en supposant que la relation (4) soit mise sous la forme

$$\frac{u^2}{1 + uu_1} + \varphi'''\left(\frac{1}{u}\right) = 0,$$

φ''' étant une fonction arbitraire. On a alors

$$x + iy = \tau\,\varphi''(v),$$

$$x - iy = \tau[v^2\varphi''(v) - 2v\varphi'(v) + 2\varphi(v) - v] - \tau \int v\,d\log\varphi'''(v),$$

$$z = \frac{1}{2} i\tau[\log\varphi'''(v) + 2\varphi'(v) - 2v\varphi''(v)].$$

Si l'on prend pour $\varphi(v)$ diverses fonctions rationnelles de v, on obtiendra des courbes à torsion constante, dont les coordonnées seront des fonctions algébriques et logarithmiques de v.

Ainsi $\varphi''(v) = A$ donne la cubique gauche rectifiable

$$x + iy = \tau(Av + K_1),$$
$$x - iy = \tau\left(\frac{A}{3}v^3 - v + K_2\right),$$
$$z = \frac{i\tau}{2}(-Av^2 + K_3).$$

En posant $\varphi'''(v) = Av^{-2}$, on obtient une hélice ordinaire.

Ces deux courbes ont leurs deux courbures constantes. La démonstration que l'on donne ordinairement pour prouver que l'hélice ordinaire est la seule courbe jouissant de cette propriété ne tient pas compte du cas où l'indicatrice sphérique est une parabole, et c'est précisément le cas de la cubique que l'on a obtenue, comme cela est établi dans la Note additionnelle qui termine le Mémoire.

En remplaçant dans les formules générales les fonctions u, u_1 par deux expressions imaginaires conjuguées, on obtient des formules spéciales pour les courbes réelles, et l'auteur en donne quelques applications.

Abordant alors l'objet principal de ses recherches, qui est la détermination des courbes unicursales à torsion constante, en posant

$$u = \frac{A}{B}, \qquad u_1 = -\frac{C}{B},$$
$$A = \sum_{p=0}^{p=n} a_p t^p, \qquad B = \sum_{p=0}^{p=n} b_p t^p, \qquad C = \sum_{p=0}^{p=n} c_p t^p,$$

l'auteur obtient, pour définir ces courbes, les formules

$$x + iy = -\tau\int\frac{\varphi(a, b, t)}{\psi(a, b, c, t)}dt,$$
$$x - iy = -\tau\int\frac{\varphi(b, c, t)}{\psi(a, b, c, t)}dt,$$
$$z = -\frac{i\tau}{2}\int\frac{\varphi(c, a, t)}{\psi(a, b, c, t)}dt,$$

les fonctions φ, ψ étant définies de la manière suivante :

$$\varphi(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i-1} \sum_{p=0}^{p=i} (i - 2p)\alpha_p\beta_{i-p},$$
$$\psi(\alpha, \beta, \gamma, t) = \sum_{i=0}^{i=2n} t^i \sum_{p=0}^{p=i} (\beta_p\beta_{i-p} - \alpha_p\gamma_{i-p}).$$

Les coordonnées x, y, z des points d'une courbe unicursale à torsion constante dépendent donc de trois intégrales de la forme $\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt$, qui ont le même dénominateur $\psi(t)$ de degré $2n$, et dont les numérateurs sont d'un degré au plus égal à $(2n - 2)$. Les coefficients de ces polynômes dépendent de $(3n + 2)$ indéterminées, qui doivent être déterminées de telle sorte que les trois intégrales soient algébriques.

L'auteur est donc conduit à chercher en général les conditions que doivent remplir les coefficients a_i, b_k de deux polynômes $f(x)$, $F(x)$, de degrés n et m, pour que l'intégrale $\int \frac{F(x)}{f(x)} dx$ soit algébrique : cela fait l'objet du second Chapitre.

En supposant $\frac{F(x)}{f(x)}$ décomposée en une partie entière et en fractions simples, on reconnaît immédiatement que tous les résidus relatifs aux racines du dénominateur doivent être nuls, ce qui implique la condition que $f(x)$ n'admette que des racines multiples. On déduit facilement de là que m doit être au plus égal à $(n-2)$, et que le nombre h des racines distinctes de $f(x)$ est au plus égal à $(m+1)$. Si ces conditions sont satisfaites, les coefficients de $f(x)$, $F(x)$ devront encore satisfaire à $(n-1)$ conditions que l'on obtiendra en exprimant que les racines de $f(x)$ sont toutes multiples, et que les résidus sont tous nuls. Mais, pour exprimer ces conditions, il faudrait connaître les racines de $f(x)$. On peut obtenir directement ces $(n-1)$ relations par une voie qui n'exige nullement la connaissance des racines de $f(x)$ et fait connaître en même temps la valeur de l'intégrale.

Il est facile de voir que l'intégrale, supposée algébrique, pourra se mettre sous la forme

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

$\varphi(x)$ admettant comme racines simples celles de $f(x)$. Le degré de $\varphi(x)$ est $(m+1)$, comme cela résulte de l'égalité

$$f(x)\,F(x) = f(x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\,f'(x).$$

Si donc on a

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=n} a_p x^{n-p}, \qquad F(x) = \sum_{p=0}^{p=m} b_p x^{m-p}, \qquad \varphi(x) = \sum_{p=0}^{p=m+1} c_p x^{m+1-p},$$

en posant

$$S_i = -\sum_{p=0}^{p=i} a_p b_{i-p}, \qquad n-m-1 = k \geqq 1,$$

les $(m-1)$ conditions que doivent remplir les coefficients de $f(x)$, $F(x)$, pour que l'intégrale soit algébrique, seront les suivantes

$$\sum_{p=0}^{p=i} \left[b_p + \frac{k-i+2p}{k(k+1)\ldots(k+p)\,a_0^{p+1}} \sum_{q=0}^{q=p} A_q S_q \right] a_{i-p} = 0$$
$$(i = m+2,\ m+3,\ \ldots,\ m+n),$$

dans lesquelles $A_0, A_1, \ldots, A_q$ désignent les mineurs des éléments de la dernière colonne dans le déterminant Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (k-1)a_1 & (k+1)a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ (k-q)a_q & (k-q+2)a_{q-1} & (k-q+4)a_{q-2} & \ldots & (k+q)a_0 \end{vmatrix} = k(k+1)\ldots(k+q)\,a_0^{q+1}.$$

Alors les coefficients de $\varphi(x)$ seront donnés par

$$c_q = \frac{A_0 S_0 + A_1 S_1 + \ldots + A_q S_q}{k(k-1)\ldots(k+q)\,a_0^{q+1}},$$

ce qui fera connaître la valeur de l'intégrale cherchée.

En appliquant ce qui précède au cas particulier où l'on a $m = 0$, on trouve que $f(x)$ doit être de la forme

$$a_0(x-\alpha)^n.$$

Le cas où $f(x)$ est donné décomposé en facteurs est aussi spécialement étudié.

Les résultats que l'on vient d'obtenir sont appliqués, dans le Chapitre III, aux trois intégrales dont dépend la détermination des courbes unicursales à torsion constante. On arrive à $(2n+2h-3)$ conditions entre les $(3n+2)$ arbitraires dont dépendent ces intégrales, h étant le nombre des racines distinctes de ψ.

L'examen de ces formules générales, pour $n = 2$, conduit à des cubiques gauches rectifiables dont les équations réduites

$$x + iy = pmu,$$

$$x - iy = \frac{pu}{m}\left(\frac{u^2}{3} + n\right),$$

$$iz = \frac{pu^2}{2},$$

$$s = pu\sqrt{n},$$

renfermant deux paramètres m, n, en dehors du rapport d'homothétie p, comprennent la cubique précédemment obtenue.

En donnant à ψ des formes particulières, on obtient des courbes correspondantes. C'est ainsi qu'en posant $\psi = \alpha(t-p)^{2n}$, on obtient une infinité de courbes de différents degrés, à torsion constante, unicursales et à coordonnées entières, définies par les équations suivantes

$$x + iy = \frac{\tau}{a_0 c_0 - b_0^2} \sum_{r=1}^{r=2n-1} \frac{1}{r} t^r \sum_{p=0}^{p=r} (r-2p)\, a_p b_{r-p},$$

$$x - iy = \frac{\tau}{a_0 c_0 - b_0^2} \sum_{r=1}^{r=2n-1} \frac{1}{r} t^r \sum_{p=0}^{p=r} (r-2p)\, b_p c_{r-p},$$

$$z = \frac{i\tau}{2(a_0 c_0 - b_0^2)} \sum_{r=1}^{r=2n-1} \frac{1}{r} t^r \sum_{p=0}^{p=r} (r-2p)\, c_p a_{r-p},$$

les $(3n+2)$ paramètres a, b, c étant assujettis à satisfaire aux $2n$ conditions (11)

$$\sum_{p=0}^{p=i} (b_p b_{i-p} - a_p c_{i-p}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

ce qui laisse un nombre d'arbitraires égal à $(n+2)$.

Par exemple, pour $n = 3$, on obtient une courbe du cinquième ordre dépendant de cinq paramètres arbitraires.

Pour la recherche des courbes réelles, on posera, dans les formules (3),

$$u = \frac{A - iC}{B}, \qquad u_1 = \frac{A + iC}{B},$$

A, B, C étant, comme précédemment, des polynômes d'ordre n, et l'on obtient alors, pour les courbes réelles, les équations

$$x = -\tau \int \frac{\varphi(a, b, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt,$$
$$y = -\tau \int \frac{\varphi(b, c, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt,$$
$$z = -\tau \int \frac{\varphi(c, a, t)}{\psi(a, b, c, t)}\, dt,$$

où l'on a désigné par φ, ψ des polynômes de degrés $2n - 2$ et $2n$, définis par

$$\varphi(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i-1} \sum_{p=0}^{p=i} (i - 2p)\alpha_p \beta_{i-p},$$
$$\psi(\alpha, \beta, \gamma, t) = \sum_{i=1}^{i=2n-1} t^{i} \sum_{p=0}^{p=i} (\alpha_p \alpha_{i-p} + \beta_p \beta_{i-p} + \gamma_p \gamma_{i-p}).$$

Le polynôme ψ, de degré $2n$, devra avoir toutes ses racines imaginaires conjuguées. Donc, si les courbes réelles et unicursales à torsion constante existent, leurs équations seront nécessairement de la forme

$$x - x_0 = \tau \frac{\lambda[\gamma^{(1)}, t]}{\psi(a, b, c, t)},$$
$$y - y_0 = \tau \frac{\lambda[\gamma^{(2)}, t]}{\psi(a, b, c, t)},$$
$$z - z_0 = \tau \frac{\lambda[\gamma^{(3)}, t]}{\psi(a, b, c, t)},$$

en désignant par λ un polynôme de degré $(2n - 1)$ de la forme

$$\lambda(\gamma, t) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} \gamma_p t^p.$$

On voit que ces courbes, si elles existent, seront nécessairement de degré pair, et qu'elles seront fermées, puisque, pour $t = \pm\infty$, les coordonnées x, y, z reprennent les mêmes valeurs x_0, y_0, z_0.

Quant à l'existence même de ces courbes réelles, rien n'est actuellement décidé. Dans le cas particulier le plus favorable, celui où la fonction ψ n'admet que deux racines distinctes, le problème est ramené à la recherche des solutions réelles d'un système de $(2n + 3)$ équations quadratiques entre $(3n + 3)$ arbitraires. Mais il n'est pas établi que ces solutions réelles existent. Ainsi, notamment, pour $n = 3$, on peut établir que les neuf équations n'admettent aucun système de solutions réelles.

Ainsi, bien qu'il existe en nombre infini des courbes unicursales imaginaires à torsion constante, l'existence de courbes unicursales réelles, à torsion constante, n'est pas actuellement démontrée.

Tome III; 1891.

Collet (*J.*). — La méthode des coïncidences. (191-214).

On sait quelle importance ont acquise, dans ces dernières années, les observations du pendule, et à quel degré de précision extrême elles ont été poussées par le commandant Defforges. La détermination du rapport des durées d'oscillation du pendule et du balancier d'une horloge est l'élément fondamental de la question.

Ce rapport, supposé très voisin de l'unité, s'obtient par la *méthode des coïncidences.*

La notion de coïncidence est très précise dans l'hypothèse où le balancier et le pendule passent en même temps par la verticale. Mais cette coïncidence rigoureuse au passage ne se produit jamais; ou même, se produirait-elle une fois que, par suite de l'incommensurabilité des durées d'oscillation du pendule et du balancier, elle ne serait plus suivie d'aucune autre. Cependant, en dehors de cette supposition, la notion de coïncidence est restée vague et indéterminée.

L'auteur s'est d'abord proposé de préciser cette notion. Pour lui, *il y a coïncidence, dans les mouvements simultanés du pendule et du balancier, quand, à un même moment, les mouvements étant de même sens, le balancier et le pendule ont effectué une même fraction de l'oscillation commencée par chacun d'eux.* Puis, pour faciliter l'examen de la question, il use de la représentation, bien connue et si commode, du mouvement du pendule, à l'aide d'un point décrivant uniformément, et dans la durée d'une oscillation, un cercle dont le diamètre est l'amplitude du mouvement d'un point du pendule ou du balancier; la projection, faite sur le diamètre, du point décrivant la circonférence, aura un mouvement identique à celui du point considéré sur le pendule ou sur le balancier.

Les coïncidences *exactes,* mathématiquement définies, ne peuvent être observées. Mais il est facile de déterminer les passages consécutifs du pendule ou du balancier, pour la verticale, entre lesquels se produit une coïncidence.

En prenant pour l'heure de cette coïncidence la moyenne des heures des deux passages consécutifs du balancier qui la comprennent, ce qu'on appelle *une coïncidence moyenne,* on commettra une erreur inférieure à la durée d'une demi-oscillation du balancier. Si α est la différence, très petite d'ailleurs, entre les durées d'une oscillation du pendule et du balancier, en prenant l'heure de la coïncidence moyenne pour celle de la coïncidence exacte, *on commet, sur l'heure où commencera l'oscillation du pendule, une erreur inférieure à* $\frac{\alpha}{2}$ *en valeur absolue.*

L'influence de cette erreur peut être rendue négligeable, soit en rendant α plus petit, soit en augmentant la durée de l'expérience, c'est-à-dire en considérant une suite plus longue de coïncidences successives. *L'erreur totale sur l'évaluation de l'intervalle de temps compris entre les coïncidences extrêmes sera inférieure à* α *en valeur absolue.*

La méthode d'observation n'a ainsi à remplir qu'une condition bien déter-

minée, à savoir, de déterminer sûrement les passages consécutifs qui comprennent la coïncidence. La méthode sera parfaite, si cette condition est remplie.

Pour atteindre ce but, différentes dispositions ont été adoptées, soit pour le pendule à fil ou *quasi-simple*, soit pour le pendule réversible.

L'auteur les étudie successivement en ramenant à deux formes principales les méthodes d'observation, celle des *coïncidences linéaires* et celle des *eclipses*.

La première, déjà employée par La Condamine, à Saint-Domingue (1735), a été complètement décrite, pour la première fois, par Boscowich (1785). Elle a été suivie depuis par Borda (1792), par Bessel (1826). Mais la méthode des éclipses a dû lui être substituée du jour où l'emploi du pendule réversible s'est généralisé.

Elle repose sur l'observation des éclipses partielles ou totales d'un champ lumineux ou d'un disque éclairé qui se produisent aux passages du pendule qui précèdent ou suivent une coïncidence.

L'auteur étudie minutieusement cette méthode. Il montre comment la coïncidence moyenne est toujours déterminée. Il recherche l'influence que peut avoir sur la sûreté des observations une plus ou moins grande largeur de l'ouverture du diaphragme; il détermine les erreurs qui peuvent résulter des imperfections du réglage des appareils, et il donne la marche à suivre pour les écarter.

Quant à la détermination sûre des passages où commence et où finit l'éclipse, au milieu de laquelle a lieu la coïncidence moyenne, c'est le point essentiel sur lequel doit porter l'effort des observateurs. Facile d'abord, au début d'une expérience, alors que le pendule a des amplitudes d'oscillations assez étendues, cette détermination devient de plus en plus délicate quand les oscillations deviennent plus petites; de sorte que la plus grande exactitude qu'on tente d'obtenir en prolongeant l'expérience peut être compromise par la netteté de moins en moins grande des phénomènes à observer.

A ce point de vue, l'auteur décrit tout spécialement les derniers et très heureux perfectionnements apportés à la méthode par le commandant Defforges, et qui donnent une sûreté parfaite aux observations.

Astor (*A.*). — Sur le principe d'Hamilton.

Cet article se compose de deux Parties. La première comprend quelques considérations sur le principe d'Hamilton, la seconde donne une méthode simple, aisée à retenir sans aucun effort de mémoire, pour mettre sous la forme canonique les équations du mouvement relatif d'un système matériel. Dans le célèbre Mémoire qu'il a publié, en 1863, dans le *Journal de Liouville*, Edmond Bour suppose d'abord les points du système indépendants les uns des autres; le regretté Émile Mathieu, dans sa *Dynamique analytique*, reproduit la méthode de Bour; elle exige, sous une forme assez délicate, le calcul de l'accélération absolue, et n'établit les équations sous la forme canonique qu'après des transformations assez laborieuses; la méthode que j'emploie n'exige que le calcul de la vitesse absolue et donne immédiatement, comme conséquence de l'application du principe de d'Alembert, les équations sous la forme canonique.

Première Partie. — On sait que, pour démontrer son principe, Hamilton suppose que les variations des variables en nombre minimum sont des fonctions

arbitraires du temps et que ces fonctions s'annulent pour $t = t_0$ et $t = t_1$, les intégrales étant prises de t_0 à t_1.

Or, la variation δy de l'une des variables étant choisie, la variation de sa dérivée $\delta q'$ est par là même déterminée, puisqu'elle est la dérivée de δq par rapport au temps. Dans les applications du principe et, en général, dans les applications de la méthode canonique, on considère les δq et les $\delta q'$ comme indépendantes les unes des autres. Il y a là une contradiction apparente qui peut dérouter les commençants; on peut définir les variations δq et $\delta q'$ de la façon suivante, qui supprime tout doute à l'égard de leur indépendance mutuelle et qui, du reste, est implicitement celle que l'on adopte et qui est vraiment utile dans les applications du principe.

Supposons les variables en nombre minimum $q_1, q_2, \ldots, q_k$ exprimées en fonction du temps t, et de $2k$ constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$ telles que, pour une valeur quelconque de t, on puisse se donner arbitrairement les q et les q'. Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} q_i = f_i(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2k}), \\ q'_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial t} \end{cases}$$

les types des équations qui donnent les q et les q'. Donnons à $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$ des variations arbitraires indépendantes du temps $\delta c_1, \delta c_2, \delta c_{2k}$; il en résultera pour les δq et les $\delta q'$ des variations données par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta q_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial c_1}\delta c_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial c_{2k}}\delta c_{2k}, \\ \delta q'_i = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial c_1}\delta c_1 + \ldots + \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial c_{2k}}\delta c_{2k}. \end{cases}$$

Alors, pour des valeurs données de $\delta c_1, \delta c_2, \ldots, \delta c_{2k}$, δq_i et $\delta q'_i$ sont des fonctions du temps et on voit que $\delta q'_i = \dfrac{d}{dt}\delta q_i$.

D'autre part, à un instant quelconque on peut supposer les δq et $\delta q'$ arbitraires, car puisque les équations (1) permettent de déterminer par hypothèse $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$, leur déterminant fonctionnel, qui est le dénominateur des valeurs de $\delta c_1, \ldots, \delta c_{2k}$ déterminées par les équations (2), n'est pas nul.

Il est vrai qu'on ne peut plus supposer les δq nuls pour $t = t_0$ et $t = t_1$, car il faudrait pour cela que les δc fussent nuls, et, par suite, il n'y aurait, à une époque quelconque, aucun déplacement virtuel, mais il n'y a pas à le regretter beaucoup, car, si l'on n'obtient pas l'équation qui exprime le principe d'Hamilton sous sa forme ordinaire, on l'obtient, en somme, sous sa forme vraiment utile.

Si l'on appelle $x, y, z, \ldots$ les coordonnées rectangulaires des points $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots; \delta x', \delta y', \delta z', \ldots$ seront à leur tour des fonctions de t et des δc satisfaisant aux relations $\dfrac{d}{dt}\delta x = \delta x'$; mais on ne pourra plus, à une époque quelconque, se les donner arbitrairement; elles devront satisfaire aux équations fournies par les liaisons.

Il est à remarquer que, si l'on prenait pour les δq des fonctions arbitraires du temps, les δc seraient aussi fonctions du temps; mais on aurait, comme

lorsqu'elles en sont indépendantes, les relations

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_1}\frac{d}{dt}\partial c_1 + \frac{\partial f_i}{\partial c_2}\frac{d}{dt}\delta c_2 + \ldots = 0,$$

puisque $\delta q'_i$ doit être égal à $\frac{d}{dt}\delta q_i$ (¹).

L'équation générale de la Dynamique

$$\sum\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z = 0$$

fournit immédiatement l'équation

$$\delta T + \delta U = \frac{d}{dt}\Sigma m(x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z),$$

et par suite

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \delta U)\,dt = \left[\sum m(x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z)\right]_{t_0}^{t_1};$$

pour avoir les équations de Lagrange, il suffit de remarquer que

$$\delta T = \sum\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i + \sum\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i = \frac{d}{dt}\sum\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q_i - \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\delta q_i;$$

donc

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \delta U)\,dt = \left(\sum\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q_i\right)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\delta q_i\,dt.$$

En vertu de la relation due à Lagrange

$$\frac{\partial x'}{\partial q'_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i},$$

on a

$$\Sigma m(x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z) = \sum\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q_i,$$

de sorte que l'équation trouvée équivaut à

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\delta q_i\,dt = 0,$$

et elle fournit les équations de Lagrange.

Si les liaisons sont indépendantes du temps, nous aurons

$$2T = \sum\frac{\partial T}{\partial q'_i}q'_i,$$

(¹) Ces définitions des variations δq, $\delta q'$, δx, $\delta x'$, ... paraissent rendre les théories bien plus claires, et il semble qu'il y aurait avantage à les placer au début d'un exposé de la méthode canonique, quel que soit le procédé employé, c'est-à-dire quand on en arrive à considérer non seulement les variations virtuelles des variables, mais celles de leurs dérivées.

et si nous posons $\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i$, de sorte que les δp_i seront indépendants des δp comme les $\delta q'_i$ et ont comme eux une signification bien précise, nous aurons

$$\delta T = \sum p_i \delta q'_i + \sum q'_i \delta p_i - \delta T = \frac{d}{dt} \sum p_i \delta q_i - \sum \left(\frac{dp_i}{dt} \delta q_i - \frac{dq_i}{dt} \delta p_i \right) - \delta T,$$

$$\delta T + \delta U = \frac{d}{dt} \sum p_i \delta q_i - \left[\sum \left(\frac{dp_i}{dt} \delta q_i - \frac{dq_i}{dt} \delta p_i \right) + \delta (T - U) \right].$$

De sorte que

$$\int_{t_0}^{t_0} (\delta T + \delta U)\, dt = \left(\sum p_i \delta q_i \right)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \left(\frac{dp_i}{dt} \delta q_i - \frac{dq_i}{dt} \delta p_i \right) + \delta (T - U) \right] dt.$$

Comme

$$\left(\sum p_i \delta q_i \right)_{t_0}^{t_1} = \left(\sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i \right)_{t_0}^{t_1} = \left[\sum m (x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) \right]_{t_0}^{t_1},$$

on a les équations canoniques du mouvement

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

où $H = T - U$, et l'on voit de plus que, en posant $S = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$, les intégrales du problème sont

$$p_i = \frac{\partial \rho}{\partial q_i},$$

$$(p_i)_0 = -\frac{\partial \rho}{\partial (q_i)_0}.$$

Le principe paraît surtout avoir eu pour utilité de montrer cette forme de la solution qui a conduit Jacobi à son célèbre théorème. On sait comment Jacobi en a donné une démonstration synthétique; J.-A. Serret, dans son cours du Collège de France, en donnait une démonstration analytique dont l'idée est naturellement suggérée par la forme de la solution ci-dessus; cette démonstration, un peu longue, peut être abrégée en prenant pour point de départ l'équation générale de la Dynamique sous la forme dont s'est servi presque systématiquement Émile Mathieu, savoir

$$\delta \Sigma p_i p'_i - \frac{d}{dt} \Sigma p_i \delta q_i = \delta H.$$

Voici cette démonstration sous sa forme abrégée. Soit S une fonction quelconque de $t, q_1, q_2, \ldots, q_k$ et de n variables nouvelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; changeons de variables en prenant pour inconnues les α et k variables $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, les formules de transformation étant

$$p_i = \frac{\partial \rho}{\partial q}, \qquad \beta_i = -\frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i},$$

nous aurons

$$\sum p_i \delta q'_i = \sum \frac{\partial \rho}{\partial q_i} q'_i,$$

$$\sum p_i \delta q_i = \sum \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \delta q_i;$$

d'autre part

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial \rho}{\partial q_i} q'_i + \sum \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} \alpha'_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial \rho}{\partial q_i} q'_i - \sum \beta_i \alpha'_i,$$

$$\delta\rho = \sum \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial \rho}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = \sum \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \delta q_i - \sum \beta_i \delta \alpha_i;$$

donc

$$\Sigma p_i q'_i = \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Sigma \beta_i \alpha'_i,$$

$$\Sigma p_i \delta q_i = \delta\rho + \Sigma \beta_i \delta \alpha_i;$$

de sorte que, comme $\delta \frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} \delta\rho$, l'équation se transforme en la suivante

$$\delta \Sigma \beta_i \alpha'_i - \frac{d}{dt} \Sigma \beta_i \delta \alpha_i = \delta \left(\mathrm{H} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right);$$

les équations du mouvement conservent la forme canonique, et on déduit de là immédiatement le théorème de Jacobi.

Cette méthode qui, nous le répétons, était déjà donnée par J.-A. Serret, mais sous une forme plus compliquée, présente, de plus, l'avantage de se prêter aisément à la variation des arbitraires canoniques. Dans le Chapitre IX du Tome I de son *Traité de Mécanique céleste*, M. Tisserand établit les équations en se servant des relations extrêmement remarquables trouvées par Jacobi entre les dérivées partielles des variables p et q considérées comme fonctions des α et des β, et celles de ces dernières considérées comme fonctions de p et q...; ce sont là des calculs fort élégants, mais dont les détails sont peu aisés à retenir, tandis que la méthode ci-dessus résout immédiatement la question, sans avoir recours aux formules de Jacobi.

Il suffit de remarquer que, si l'on suppose que δU se compose de deux parties, dont l'une est une différentielle exacte que nous appellerons $\delta(U)$, et une seconde partie considérée comme perturbatrice qui peut être ou n'être pas une différentielle exacte, mais que nous continuerons à représenter par δR, en posant $(H) = T - (U)$, le même changement de variables conduira à l'équation

$$\delta \Sigma \beta_i \alpha'_i - \frac{d}{dt} \Sigma \beta_i \delta \alpha_i = \delta \left[(\mathrm{H}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] - \delta \mathrm{R}.$$

Si nous avons résolu, par la méthode de Jacobi, le problème relatif à la fonction des forces (U), nous aurons la solution du problème généralisé en considérant les α et les β non plus comme des constantes, mais comme des fonctions du temps satisfaisant aux équations différentielles

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \beta_i},$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_i}.$$

δR étant par définition égal à

$$\sum\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}\delta\alpha_i + \frac{\partial R}{\partial \beta_i}\delta\beta_i\right).$$

Si nous changeons β_i en $-\beta_i$, nous avons la forme ordinaire; c'est la transformation canonique.

Seconde Partie. — Voici comment les équations du mouvement relatif d'un système peuvent être obtenues sous la forme canonique quand les liaisons dans le système entraîné sont indépendantes du temps.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point matériel de masse m, x', y', z' leurs dérivées, p, q, r les composantes de la rotation instantanée, u, v, w les composantes de la vitesse absolue du point M, par rapport aux axes relatifs X, Y, Z ses coordonnées absolues, U la fonction absolue des forces, et T la demi-force vive absolue; l'équation générale de la Dynamique s'écrit pour le système sous la forme employée par Émile Mathieu

$$\delta\,\Sigma m\left(\frac{dX^2}{dt^2} + \frac{dY^2}{dt^2} + \frac{dZ^2}{dt^2}\right) - \frac{d}{dt}\,\Sigma m\left(\frac{dX}{dt}\delta X + \frac{dY}{dt}\delta Y + \frac{dZ}{dt}\delta Z\right) = \delta(T - U).$$

Or on a

$$\Sigma m\left(\frac{dX^2}{dt^2} + \frac{dY^2}{dt^2} + \frac{dZ^2}{dt^2}\right) = \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2)$$

et

$$\Sigma m\left(\frac{dX}{dt}\delta X + \frac{dY}{dt}\delta Y + \frac{dZ}{dt}\delta Z\right) = \Sigma m(u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z),$$

et, de plus, les dérivées par rapport au temps ou les différentielles avec la caractéristique δ de ces deux séries de fonctions sont égales, comme cela résulte de leurs significations géométriques, et comme, du reste, on peut le démontrer par un calcul des plus simples. Si nous faisons donc le changement de variables en passant des coordonnées absolues aux coordonnées relatives, et si nous continuons à appeler U la fonction relative des forces, en posant

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2),$$

nous aurons l'équation

$$\delta\,\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2) - \frac{d}{dt}\,\Sigma m(u\,\delta x + u\,\delta y + w\,\delta z) = \delta(T - U) = \delta H.$$

Or on a, u_0, v_0, w_0 étant les composantes de la vitesse de l'origine mobile

$$\begin{aligned} u &= x' + u_0 + qz - ry, \\ v &= y' + v_0 + rx - pz, \\ w &= z' + w_0 + py - qx, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation pourra s'écrire

$$\delta\,\Sigma(mux' + mvy' + mwz') - \frac{d}{dt}\,\Sigma(mu\,\delta x + mv\,\delta y + mw\,\delta z) = \delta\Omega,$$

en posant

$$\Omega = T - U - \Sigma[mu(u_0 + qz - ry) + mv(v_0 + rx - pz) + mw(w_0 + py - qx)],$$

2e Part.

Nous avons justement la forme canonique, en considérant x et mu, y et mv, z et mw comme les couples des variables conjuguées.

Deux cas peuvent se présenter :

1° Les points du système sont libres; alors δx, δy, δz; δu, δv, δw sont arbitraires, et nous aurons les équations du mouvement relatif sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial mu},$$
$$\frac{d\,mu}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x};$$

2° Il y a des liaisons, mais elles sont indépendantes du temps.

Remarquons que l'équation peut s'écrire

$$\delta \sum \left(\frac{\partial T}{\partial x'} x' + \frac{\partial T}{\partial y'} y' + \frac{\partial T}{\partial z'} z' \right) - \frac{d}{dt} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z'} \delta z \right) = \delta \Omega.$$

Soient q_1, q_2, q_3, ..., q_k des variables en nombre minimum et posons $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$; les liaisons étant indépendantes du temps, nous aurons

$$x' = \sum \frac{\partial x}{\partial q_i} q'_i = \sum \frac{\partial x'}{\partial q'_i} q'_i,$$

d'après la formule bien connue de Lagrange, de sorte que nous trouverons immédiatement

$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial x'} x' + \frac{\partial T}{\partial y'} y' + \frac{\partial T}{\partial z'} z' \right) = \sum p_i q'_i,$$
$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z'} \delta z \right) = \sum p_i \delta q_i,$$

et l'équation prend la forme ordinaire

$$\delta \Sigma p_i q'_i - \frac{d}{dt} \Sigma p_i \delta q_i = \delta \Omega;$$

les variations δp et δq étant arbitraires, on aura les équations du mouvement sous la forme canonique

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}.$$
$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial q_i}.$$

Nos équations ne sont pas les mêmes, dans la forme, que celles qui ont été données par Bour; mais elles s'y ramènent en posant

$$u = u_0 + \xi, \qquad v = v_0 + \eta, \qquad w = w_0 + \zeta.$$

Au surplus, elles sont aussi commodes dans la pratique et présentent l'avantage de ne pas exiger le calcul de l'accélération absolue par rapport aux axes mobiles.

Collet (*J.*). — Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Une équation aux dérivées partielles étant donnée,

$$F(z, x_i, p_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

les *éléments initiaux* (z^0, x_i^0, p_k^0) définissant les *caractéristiques* qui engendrent une de ses intégrales devront former une *multiplicité intégrale* $(M_{n-1})^0$ d'ordre $n-1$. Une telle multiplicité renferme toujours une *multiplicité ponctuelle* $(P_{n-q})^0$ d'ordre $n-q$ qui détermine d'ailleurs complètement la multiplicité $(M_{n-1})^0$. *L'ensemble de toutes les caractéristiques qu'on peut ainsi définir constitue une multiplicité intégrale d'ordre n, c'est-à-dire une intégrale,* dont l'auteur donne l'expression analytique.

Si $V = V(z, x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n) = 0$ est une solution complète, on devra éliminer les $2n+q+3$ paramètres $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_q; z^0, z_1^0, \ldots, x_n^0; a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre les $2n+q+4$ équations suivantes

$$(1) \qquad V = 0, \qquad V^0 = (z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0; a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_i} + \lambda \frac{\partial V_0}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(3) \qquad \varphi_h(x^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, q),$$

$$(4) \quad \begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial z^0} + \mu_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z^0} + \ldots + \mu_q \dfrac{\partial \varphi_q}{\partial z^0} = \dfrac{\partial V^0}{\partial z^0}, \\[2ex] \mu_0 \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_k^0} + \mu_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_k^0} + \ldots + \mu_q \dfrac{\partial \varphi_q}{\partial x_k^0} = \dfrac{\partial V^0}{\partial x_k^0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Les équations (3) définissent la multiplicité ponctuelle donnée $(P_{n-q})^0$.

Le résultat précédent peut être établi, soit par la considération des caractéristiques, soit en suivant la méthode de la variation des arbitraires de Lagrange.

Le cas d'une *équation linéaire* exige un examen particulier. Alors *l'intégrale considérée est définie,* non plus par une équation unique en général, *mais par un système de q équations entre les seules coordonnées z, x_1, x_2, ..., x_n.*

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (1).

1er semestre 1886.

Websky (*M.*). — Construction d'arcs à courbure très faible à l'aide de projections stéréographiques. (33-38).

Il s'agit de Constructions dont on fait usage en Cristallographie et que M. Grailich avait conseillé d'employer dans son Mémoire couronné en 1857 par l'Académie des Sciences de Vienne.

Weingarten (*J.*). — Sur les déformations infiniment petites d'une surface flexible et inextensible. (83-91).

Envisageons une surface S non développable dont la courbure ne soit nulle qu'en des points isolés ou en des lignes isolées. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de cette surface, données en fonction de deux variables indépendantes p, q. Désignons par X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à la surface au point x, y, z. On a, entre les différentielles de ces quantités, les trois relations

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= a_{11}\,dp^2 + 2a_{12}\,dp\,dq + a_{22}\,dq^2, \\ dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ &= c_{11}\,dp^2 + 2c_{12}\,dp\,dq + c_{22}\,dq^2, \\ dX^2 + dY^2 + dZ^2 &= b_{11}\,dp^2 + 2b_{12}\,dp\,dq + b_{22}\,dq^2, \end{aligned}$$

où les lettres a, b, c désignent des fonctions déterminées de p et de q qui dépendent de la surface S que l'on considère.

L'étude des trois formes quadratiques en dp et dq que nous venons d'écrire, et dont la troisième dépend des deux premières par une relation linéaire et homogène, a conduit M. Weingarten à des résultats intéressants concernant la déformation des surfaces S.

M. Weingarten montre d'abord qu'à tout déplacement de la surface S ayant lieu *sans extension* correspond une certaine fonction φ qu'il appelle *fonction de déplacement* et qui vérifie la même équation aux dérivées partielles quel que soit le déplacement considéré. Cette équation est *linéaire,* et ses coefficients sont formés assez simplement à l'aide des fonctions a et c des variables p et q et à l'aide de l'expression k de la courbure de S au point p, q.

Inversement à toute intégrale réelle φ de cette équation linéaire aux dérivées partielles correspond un déplacement sans extension de la surface S.

Ceci posé, M. Weingarten démontre que toute fonction linéaire et homogène, à coefficients constants

$$aX + bY + cZ,$$

des cosinus directeurs X, Y, Z représente une fonction de déplacement φ et que le déplacement sans extension de la surface S correspondant à cette fonction φ est une *rotation* infiniment petite de S *restant invariable* et tournant autour d'une droite dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux constantes a, b, c, jointe à une *translation* infiniment petite de cette surface S restant invariable.

Inversement à tout déplacement infiniment petit de la surface S *restant invariable* correspond une fonction de déplacement φ de la forme

$$aX + by + cZ,$$

où a, b, c sont des constantes.

Il en résulte qu'à toute intégrale réelle φ de l'équation linéaire aux dérivées partielles dont nous avons parlé correspond certainement une *déformation* infiniment petite de S, lorsque φ n'est pas de la forme

$$aX + bY + cZ.$$

Parmi ces déformations infiniment petites sans extension d'une surface donnée S, on peut se demander s'il y en a pour lesquelles les lignes de cour-

bure de S avant la déformation se transforment en lignes de courbure de S après la déformation.

M. Weingarten démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que de telles déformations soient possibles est que l'image sur la sphère de Gauss des lignes de courbure de S forme sur cette sphère un réseau de *carrés* infiniment petits. (L'image sur la sphère de Gauss d'un point x, y, z est le point X, Y, Z.)

Cette famille de surface S jouit, à l'exclusion de toute autre surface S, d'une propriété bien remarquable. L'expression différentielle

$$\frac{1}{(\rho-\rho')^2}\left\{-\rho\rho'\left[\frac{\partial(\rho+\rho')}{\partial x}dX+\frac{\partial(\rho+\rho')}{\partial y}dY+\frac{\partial(\rho+\rho')}{\partial z}dZ\right]+d(\rho\rho')\right\},$$

où ρ et ρ' sont les rayons de courbure principaux de S au point x, y, z peut être mise sous la forme d'une *différentielle totale* d'une fonction de p et de q.

Considérons une surface S′ de cette famille F de surfaces. Alors la fonction de déplacement φ correspondant à une déformation sans extension peut être déterminée à l'aide de *quadratures* seulement. Ces quadratures sont à effectuer sur des expressions données en fonction de p, q, dp, dq. La détermination des paramètres des lignes de courbure de S′ est également ramenée à des quadratures.

Parmi les surfaces S′, il en est pour lesquelles la même propriété de conserver leurs lignes de courbure a lieu non seulement pour des déformations infiniment petites, mais aussi pour des déformations finies. Ce sont les *surfaces de moulure* de Monge, qui comprennent entre autres toutes les surfaces de révolution. Et il n'y en a pas d'autres.

Les surfaces développables ayant été exclues des recherches précédentes, ce dernier résultat coïncide avec le théorème démontré par M. Codazzi dans les *Annales de Tortolini* de 1856.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des genres de fonctions rationnelles de plusieurs variables. (251-253).

Soit

$$\Theta(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}.$$

On a manifestement, quel que soit r,

$$\Theta(x_1+r, x_2+r, x_3+r, x_4+r) = \Theta(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

On s'assure, d'autre part, sans peine que

$$\Theta\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}\right) = \Theta(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Si donc a, b, c, d désignent des nombres quelconques et si l'on pose, pour $k = 1, 2, 3, 4$,

$$y_k = \frac{ax_k+b}{cx_k+d},$$

on aura

$$\Theta(y_1, y_2, y_3, y_4) = \Theta(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

On peut, par exemple, déterminer a, b, c, d, de manière que l'on ait

$$y_2 = -1, \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = +1;$$

alors y_1, y_2, y_3, y_4 sont donnés en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 par les relations

$$y_k = \frac{(x_k - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_k - x_2)(x_3 - x_4) + (x_k - x_4)(x_3 - x_2)},$$

et l'on a toujours

$$\Theta(y_1, y_2, y_3, y_4) = \Theta(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Ceci posé, désignons par x_0 une cinquième variable et par y_0 la fonction

$$y_0 = \frac{(x_0 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_0 - x_2)(x_3 - x_4) + (x_0 - x_4)(x_3 - x_2)}.$$

Convenons aussi d'entendre par les indices α, β, γ, δ quatre des cinq nombres 0, 1, 2, 3, 4 pris dans un ordre quelconque. Toutes les fonctions

$$\Theta(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, x_\delta)$$

sont alors manifestement fonctions de y_0 et y_1 seulement. Donc les coefficients de l'équation algébrique dont les racines sont toutes les fonctions conjuguées

$$\Theta(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, x_\delta)$$

ne dépendent que de *deux* fonctions rationnelles des cinq variables x.

Les fonctions conjuguées Θ que nous venons d'envisager permettent de former sans difficulté une fonction qui, si l'on effectue sur trois des variables x toutes les permutations cycliques, prend *cinq* valeurs différentes dont les fonctions symétriques ne dépendent que de *deux* fonctions des cinq variables x.

Voici, par exemple, la fonction

$$\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} + \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}\right)\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}\right)\left(\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} + \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2}\right),$$

qui n'est autre chose que le produit, changé de signe, des trois différences

$$\Theta(x_1, x_2, x_3, x_4) - \Theta(x_3, x_2, x_1, x_4),$$
$$\Theta(x_1, x_3, x_4, x_2) - \Theta(x_4, x_3, x_1, x_2),$$
$$\Theta(x_1, x_4, x_2, x_3) - \Theta(x_2, x_4, x_1, x_3),$$

et qui est bien une fonction comme celles dont nous venons de parler. Si l'on forme ses quatre fonctions conjuguées, on obtient cinq fonctions des cinq variables x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, qui sont racines d'une équation du cinquième degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles alternées (bivalentes) de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4; et ces fonctions alternées ne dépendent effectivement que de *deux* fonctions de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

Si l'on adjoint à l'équation du cinquième degré

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

successivement x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, on obtient cinq équations du quatrième degré. Si l'on divise le second invariant de chacune de ces cinq équations par la racine carrée de son discriminant, on obtient précisément les cinq fonctions conjuguées que nous venons de citer.

M. Kronecker se propose de continuer, dans des Notes ultérieures, à exposer ainsi à nouveau les résultats contenus dans la Communication qu'il a faite à l'Académie en 1861, en les complétant par des résultats nouveaux obtenus dans le courant des dernières années.

Fuchs. — Sur les valeurs que peuvent prendre les intégrales d'une équation différentielle du premier ordre, en des points singuliers. (279-300).

Dans un Mémoire bien connu, qui est contenu dans le XXXVIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, Briot et Bouquet ont examiné comment se comportent les fonctions y de z définies comme intégrales d'une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dz} = f(z, y),$$

aux environs des valeurs (z_0, y_0) pour lesquelles la fonction de deux variables $f(z, y)$ est infinie, ou plurivoque, ou finie et indéterminée.

Ce Mémoire justement célèbre, qui a servi de base et de point de départ à bien des recherches importantes sur la théorie des équations différentielles, contient plusieurs points qui demandaient à être précisés et complétés.

Déjà, dans la définition des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre, on rencontre une lacune. En effet, dans le cas où le second membre de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = f(z, y)$$

est de la forme

$$f(z, y) = (y - y_0)^m f_1(z, y), \qquad m > 0,$$

et où, par suite, la fonction $f(z, y)$ et toutes ses dérivées partielles par rapport à z s'annulent pour les valeurs initiales données $z = z_0$, $y = y_0$, la question de l'existence même d'une intégrale de l'équation différentielle n'est pas résolue d'une manière satisfaisante dans le Mémoire de Briot et Bouquet.

Elle serait résolue si l'on savait comment se comportent aux environs de $z = 0$ les intégrales d'une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dz} = z^{-k} F(z, y),$$

où k est un nombre positif et où la fonction $F(z, y)$ est définie pour toutes les valeurs des deux variables indépendantes z, y.

Mais elle ne peut être résolue, comme le proposent Briot et Bouquet, *indépendamment de l'étude de l'équation* (1), en transformant l'équation

$$\frac{dy}{dz} = f(z, y)$$

en l'un des trois types

$$t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + P(t, \zeta),$$

$$t\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta^m + bt + P(t, \zeta),$$

$$t^m\frac{d\zeta}{dt} = a\zeta + bt + P(t, \zeta),$$

où $P(t, \zeta)$ désigne une série entière en t et ζ dans laquelle les termes de moindre dimension sont ceux dont la dimension est égale à deux.

L'étude approfondie des équations de la forme (1) s'impose ainsi dès le début de la théorie des équations différentielles du premier ordre. Il se trouve, en outre, que de cette étude dépend aussi la solution de la question très importante que voici.

Lorsqu'une intégrale d'une équation différentielle du premier ordre est définie par un système de valeurs initiales z_0, y_0, cette intégrale est-elle *la seule* qui admette ces valeurs initiales ou y en a-t-il d'autres encore?

Pour démontrer *qu'il n'y en a pas d'autres*, Briot et Bouquet se basent sur ce que, si une intégrale y d'une équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = (y - y_0)^m f_1(z, y)$$

prend, pour $z = z_0$, la valeur $y = y_0$, cette intégrale y est égale à la constante y_0.

Mais M. Fuchs démontre aujourd'hui qu'en général l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = (y - y_0)^m f_1(z, y)$$

admet encore d'autres intégrales que $y = y_0$. Il peut donc, *en général*, y avoir plus d'une intégrale d'une équation différentielle du premier ordre donnée qui corresponde à un système de valeurs initiales données.

Après avoir ainsi orienté le lecteur en lui indiquant l'importance extrême de l'étude de l'équation (1), M. Fuchs, avant d'aborder cette étude, donne quelques définitions que nous allons tout d'abord reproduire ici.

Lorsque, en tendant vers un même point $z = a$ par des chemins différents, une fonction de z peut prendre des suites de valeurs qui dépendent des derniers éléments de chemin parcourus par z avant d'atteindre le point a, on dira que a est un *point d'indétermination* de la fonction.

Un point d'indétermination a d'une fonction peut aussi être point de ramification de cette fonction. Dans ce cas, la fonction peut se ramifier aux environs de ce point a de deux façons bien différentes :

Ou bien on peut entourer a par une courbe de dimensions finies telle que, à l'intérieur de cette courbe, il n'y ait pas d'autre point de ramification de la fonction. Dans ce cas on dira qu'au point a la *ramification* de la fonction est *déterminée*.

Ou bien, quelque petite que soit la courbe de dimension finie dont on entoure a, toujours elle contient dans son intérieur une infinité de points de ramification de la fonction. Dans ce cas, on dira que la *ramification* de la fonction est *indéterminée*.

Exemples. — Soit la fonction de z

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{z-a}} - b};$$

$z = a$ est un point d'indétermination sans ramification de cette fonction.

Soit ensuite m un entier positif; b une constante différente de zéro, et con-

sidérons la fonction de z

$$\sqrt[m]{e^{\frac{1}{z-a}} - b};$$

$z = a$ est un point d'indétermination avec ramification indéterminée de cette fonction.

Soit enfin $\varphi(z)$ une fonction de z qui, dans les environs de $z = a$, soit univoque, mais qui soit indéterminée en $z = a$; et soit λ un nombre réel quelconque. Envisageons la fonction de z

$$(z-a)^{\lambda}\varphi(z);$$

$z = a$ est un point d'indétermination avec ramification déterminée de cette fonction.

On voit déjà sur ces exemples qu'il n'est, en général, pas possible de fixer les environs d'un point a d'indétermination sans ramification ou d'indétermination avec ramification indéterminée, de telle manière qu'en tout point des environs de a, la fonction considérée de z soit représentée par une série ordonnée suivant des puissances de $z - a$, quelles que soient d'ailleurs ces puissances.

Voici une conséquence très importante de cette remarque. Lorsqu'on étudie une équation différentielle non linéaire, toutes les singularités dont nous venons de parler apparaissent en général. Il faut donc, en général, renoncer à étudier la nature des singularités des intégrales d'une équation différentielle non linéaire à l'aide seulement de développements en séries effectués autour des points singuliers.

Ces préliminaires posés, envisageons l'équation différentielle (1).

Si $z = 0$ est un point d'indétermination pour les intégrales y de l'équation différentielle, y peut prendre, pour $z = 0$, des valeurs pour lesquelles $F(z, y)$ considérée comme une fonction des deux variables z et y n'a pas de singularités.

Soit p une telle valeur de y. Si alors on développe, avec Briot et Bouquet,

$$\frac{1}{F(z, y)},$$

aux environs de $z = 0$ et de la valeur déterminée $y = p$, M. Fuchs montre que l'*on n'en peut rien conclure* concernant la relation qui lie y à z en vertu de l'équation différentielle (1) que l'on peut écrire

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z^k}{F(z, y)}.$$

Il est donc très important de savoir reconnaître si $z = 0$ est ou n'est pas un point d'indétermination pour les intégrales y d'une équation différentielle donnée (1).

Une première méthode consiste à introduire arbitrairement une fonction t de z ayant un point d'indétermination en $z = 0$, par exemple

$$(2) \qquad t = e^{\frac{1}{(k-1)z^{k-1}}},$$

d'où

$$t\,dt = z^k\,dz.$$

Alors l'équation différentielle (1) devient

$$t\frac{dy}{dt} = F(z, y),$$

où z est la fonction de t définie par l'équation (2), et la question est ramenée à l'étude des fonctions y de t définies par cette dernière équation différentielle.

Cette étude peut être faite de la manière suivante :

Écrivons l'équation

$$t\frac{\partial v}{\partial t} + z^k\frac{\partial v}{\partial z} + F(z, y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

soit

$$v = \Psi(t, z, y)$$

une solution de cette équation aux dérivées partielles; posons alors

$$\Psi(t, z, y) = \mu,$$

où μ est une constante; nous aurons ainsi une intégrale de l'équation différentielle considérée si nous supposons t et z liés par l'équation (2). Cette intégrale nous permet de voir comment varie y quand z tend vers zéro.

Si μ est une constante arbitraire, nous avons ainsi l'intégrale générale de l'équation proposée. Si μ a une valeur particulière nous avons une intégrale particulière.

On reconnaît ainsi que, pour l'intégrale générale de l'équation différentielle (1), $z = 0$ *est*, en général, *un point d'indétermination*. Mais on reconnaît aussi qu'il peut fort bien arriver que, pour une intégrale particulière de l'équation différentielle (1), $z = 0$ ne soit pas un point d'indétermination. Bien plus, il peut arriver pour certaines équations différentielles (1) que chaque intégrale soit *déterminée* en $z = 0$.

Une seconde méthode pour reconnaître si $z = 0$ est ou n'est pas un point d'indétermination d'une équation différentielle donnée (1), consiste à introduire au lieu de t une fonction auxiliaire η définie par l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{F(0, \eta)}{z^k}.$$

Alors l'équation donnée devient

$$(4) \qquad \frac{dy}{d\eta}F(0, \eta) = F(z, y),$$

où z est la fonction de η donnée par (3) et la question est ramenée à l'étude des fonctions y de η définies par l'équation différentielle (4).

Cette seconde méthode est, par exemple, avantageuse lorsque $F(z, y)$ est de la forme

$$F(z, y) = \frac{G(y) + zH(z, y)}{G_1(y) + zH_1(z, y)},$$

où G et G_1 sont des fonctions rationnelles de y et où H et H_1 sont des fonctions bien définies de z et y telles que ni $H(0, y)$ ni $H_1(0, y)$ ne soient infinies pour toute valeur de y.

Dans cet exemple, l'équation (3) qui définit la fonction auxiliaire η est

$$(3\ bis) \qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{z^k}\frac{G(\eta)}{G_1(\eta)},$$

et l'intégration de cette équation se ramène immédiatement à une quadrature.

L'étude de l'équation différentielle (4) peut de nouveau être faite à l'aide d'une équation aux dérivées partielles. Écrivons

$$F(0, \eta_1)\frac{\partial v}{\partial \eta_1} + z^k \frac{\partial v}{\partial z} + F(z, y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

et soit

$$v = \Psi(\eta_1, z, y)$$

une solution de cette équation. Alors, si μ est une constante,

$$\Psi(\eta_1, z, y) = \mu$$

sera une intégrale de l'équation proposée, en supposant η_1 et z liés par l'équation (3).

Cette intégrale nous permet de voir que, lorsque $z = 0$ est un point d'indétermination de la fonction η_1 de z définie par l'équation (3), l'intégrale générale y de l'équation proposée (1) est également indéterminée en $z = 0$; mais que des intégrales particulières de l'équation (1) peuvent fort bien ne pas être indéterminées en $z = 0$.

En employant cette méthode, il faut bien prendre garde à ce que $z = 0$ peut être un point d'indétermination pour les intégrales y de l'équation (1), quand même $z = 0$ *n'est pas* un point d'indétermination de la fonction η_1 de z définie par l'équation (3). On s'en rend de suite compte sur l'exemple cité tout à l'heure, si l'on prend pour k un entier plus grand que un.

Aux considérations générales qui précèdent il convient de joindre des exemples. M. Fuchs en donne deux.

Il envisage d'abord l'équation différentielle

$$z^k \frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2,$$

où p_0, p_1, p_2 sont des fonctions univoques et continues de z aux environs de $z = 0$, fonctions que l'on peut supposer ne pas s'annuler pour $z = 0$, et où k est un entier plus grand que l'unité.

En général, $z = 0$ est un point d'indétermination pour chaque intégrale y de cette équation différentielle. Mais il peut arriver que, pour une intégrale particulière, $z = 0$ ne soit pas un point d'indétermination; M. Fuchs montre comment, à l'aide de la théorie des équations différentielles linéaires, on peut reconnaître s'il en est ainsi. Il peut aussi arriver que l'intégrale générale ne soit pas indéterminée en $z = 0$; M. Fuchs montre également comment on peut reconnaître si l'on se trouve, ou non, dans ce cas pour des fonctions particulières données p_0, p_1, p_2.

Pour que toutes les intégrales de l'équation différentielle

$$z^k \frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2,$$

soient déterminées en $z = 0$, *il faut que*

$$p_0(0) + p_1(0)y + p_2(0)y^2$$

soit un carré parfait.

Mais cette condition nécessaire *n'est pas suffisante*, comme on le voit immé-

diatement sur l'exemple particulier

$$z^k \frac{dy}{dz} = \beta z + \alpha y^2,$$

où α et β sont des constantes.

Enfin on voit que l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$z^k \frac{dy}{dz} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2.$$

admet, aux environs de $z = 0$, une *ramification déterminée*.

Dans le cas que nous n'avons pas considéré où, dans l'équation différentielle précédente $k = 1$, les résultats obtenus par M. Fuchs coïncident avec ceux déjà obtenus par une autre méthode par MM. Picard et Poincaré dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de 1878 et dans le XLVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

On trouvera dans le Mémoire de M. Fuchs un second exemple d'une équation différentielle (1) où $z = 0$ est de nouveau, en général, un point d'indétermination des intégrales y, et où ces intégrales ont, en général, aux environs de $z = 0$, une *ramification indéterminée*.

Abordons maintenant la seconde question mentionnée dès le début : Y a-t-il une ou plusieurs intégrales y d'une équation différentielle donnée du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dy}{dz} = f(z, y),$$

qui prenne pour $z = z_0$ une valeur donnée $y = y_0$? et ne considérons que le cas où $f(z, y)$ n'admet pas de singularité en $z = z_0$, $y = y_0$.

Briot et Bouquet ont montré qu'il y avait alors une solution $y = u$ de l'équation différentielle (1) telle que pour $z = z_0$ on ait $u = y_0$, et que cette solution $y = u$ représentait, dans les environs de $z = z_0$, une fonction univoque et continue de z.

Pour reconnaître s'il y a d'autres solutions vérifiant les conditions initiales, posons

$$y = u + v.$$

L'équation différentielle (1) devient alors

$$\frac{dv}{dz} = f(z, u + v) - f(z, u).$$

Le second membre de cette dernière équation est de la forme

$$v^m \Psi(z, u, v),$$

où le nombre entier m est positif et où Ψ est une fonction développable en série entière en v. Mais l'équation

$$(5) \qquad \frac{dz}{dv} = \frac{1}{v^m} \frac{1}{\Psi(z, u, v)}$$

est une équation comme celle que nous avons considérées plus haut, où l'on a écrit v au lieu de z, z au lieu de y, et m au lieu de k. Donc il se peut que

$v = 0$ soit un point d'indétermination des intégrales z de l'équation (5). Mais, dans ce cas, il y a une infinité de fonctions z de v qui prennent, pour $v = 0$, la valeur $z = z_0$, et vérifient l'équation (5). Il y a donc alors aussi une infinité de fonctions v de z qui s'annulent pour $z = z_0$ et vérifient l'équation (5). Donc, contrairement à ce que démontrent Briot et Bouquet, il y a, dans ce cas, une infinité de fonctions $y = u + v$ qui, pour $z = z_0$, sont égales à y_0 et vérifient l'équation différentielle (1).

En résumé, le théorème de Briot et Bouquet qu'*il n'y a qu'une intégrale $y = u$ de l'équation différentielle* (1) *qui, pour $z = z_0$, soit égale à y_0, n'est exact que si $v = 0$ n'est pas un point d'indétermination de l'équation différentielle* (5).

M. Fuchs donne deux exemples de ce fait. Le premier qui concerne le cas particulier où $m > 1$ est le suivant

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\alpha(\alpha z + \beta y)^2 - \alpha(az + by)}{\beta(az + by) - b(\alpha z + \beta y)^2},$$

$$a\beta - b\alpha \neq 0,$$

avec les conditions initiales pour $z = z_0$

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} z_0.$$

Ici

$$u = -\frac{\alpha}{\beta} z,$$

et l'équation (5) se réduit à la suivante

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{\beta(a\beta - \alpha b)} \frac{(a\beta - \alpha b)z + b\beta v - b\beta^2 v^2}{v^2},$$

qui admet comme solution

$$(\alpha b - \beta a)z = b\beta v - \beta C e^{-\frac{1}{\beta v}}, \tag{6}$$

où C est une constante arbitraire.

Il y a donc une *infinité* de solutions de l'équation proposée, savoir

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} z + v,$$

où v est une solution quelconque de l'équation (6) dans laquelle on fait converger v vers $v = 0$, de telle manière que z prenne la valeur $z = z_0$.

Le second exemple donné par M. Fuchs est le suivant

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{4} \frac{1}{z(z-1)} - \frac{2z-1}{z(z-1)} y - y^2;$$

il concerne donc le cas où $m = 1$. Dans cet exemple z_0 est donné arbitrairement mais n'est ni nul, ni infini, ni égal à l'unité. Il y a alors de nouveau une infinité d'intégrales y qui, lorsque z tend vers z_0 par un chemin convenablement choisi, convergent vers la même valeur.

Dubois-Reymond (*P.*). — Sur l'intégration des séries. (359-371).

Dans les *Sitzungsberichte* de 1878, p. 54, M. Kronecker a donné une condition suffisante pour que l'on puisse intégrer, terme par terme, une série formée de fonctions continues d'une variable x. Cette condition suppose *moins* que la convergence uniforme de la série.

Dans le Mémoire actuel, M. Dubois-Reymond en établit une autre qui contient moins d'hypothèses encore sur la série que celles faites par M. Kronecker.

On peut d'abord en conclure que, à côté de la notion de convergence uniforme d'une série, on pourrait établir une autre notion correspondant précisément à cette condition suffisante pour l'intégration terme par terme. M. Dubois-Reymond précise cette notion. Il emploie le nom de *convergence continue* pour la caractériser et est amené à distinguer dans une série les *points de divergence x, les points continus de convergence x* et les points *discontinus de convergence x*.

La même condition suffisante amène aussi M. Dubois-Reymond à considérer la fonction de x et de ε, $\varphi(x, \varepsilon)$, définie par la série

$$\varphi(x, \varepsilon) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p \frac{\varepsilon \sin^2 p\pi x}{\varepsilon^2 + \sin^2 p\pi x},$$

où $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ sont les termes d'une série convergente de nombres, par exemple,

$$\mu_p = \frac{1}{2^p}.$$

La fonction $\varphi(x, \varepsilon)$ s'annule avec ε pour *chaque valeur de x*. Mais, si x est un nombre *incommensurable* et $\varepsilon = 0$, $\varphi(x, \varepsilon)$ est continue. Si, au contraire, x est un nombre *rationnel*, la valeur de la fonction $\varphi(X, \varepsilon)$ peut, lorsque $X - x$ et ε tendent vers zéro, se rapprocher d'une suite de nombres différents de zéro; ces nombres sont d'ailleurs situés au-dessous de limites d'autant plus petites que le dénominateur *réduit* de x est plus grand.

En appliquant le criterium de M. Dubois-Reymond, on parvient au résultat

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \varepsilon)\, dx = 0.$$

On obtiendrait d'ailleurs le même résultat en appliquant le criterium de M. Kronecker.

M. Dubois-Reymond construit ensuite une autre fonction très curieuse $\varphi(x, \varepsilon)$ dont la valeur peut dépasser tout nombre donné lorsque l'on tend vers un point quelconque x de la ligne $\varepsilon = 0$.

2e semestre 1886.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (701-780).

Dans le quatorzième Chapitre de son Introduction à l'Analyse infinitésimale, Euler donne deux relations très importantes pour les applications des fonctions trigonométriques à la théorie des nombres. On peut écrire ces relations, en

désignant par n un nombre premier impair,

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin(nu) \equiv (\sin u)^n \pmod{n}.$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tang}(nu) \equiv (\operatorname{tang} u)^n \pmod{n}.$$

L'objet principal du Mémoire actuel de M. Kronecker sur les fonctions elliptiques est de démontrer une formule toute semblable concernant la fonction sin am de Jacobi, formule qui, elle aussi, est susceptible d'applications très importantes dans la théorie des nombres.

On suppose ici le lecteur familiarisé avec la terminologie fixée par M. Kronecker dans son Mémoire fondamental *Festschrift zu Kummer's Doctorjubiläum*, Mémoire dont il a été rendu compte dans le *Bulletin* de 1884.

Soient n un nombre premier impair, μ le multiplicateur $\frac{1}{M}$ de Jacobi, u l'argument, k le module, K l'intégrale complète, λ le module transformé, et par suite

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\lambda} \sin\operatorname{am}(\mu u, \lambda) = \prod_{r=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k} \sin\operatorname{am}(u, k) - \sqrt{k} \sin\operatorname{am} \frac{4rK}{n}}{1 - k \sin\operatorname{am}(u, k) \sin\operatorname{am} \frac{4rK}{n}}$$

la formule de transformation de l'article 23 des *Fundamenta*. Alors l'expression

$$\frac{1}{\mu}\left\{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\lambda} \sin\operatorname{am}(\mu u, \lambda) - [\sqrt{k} \sin\operatorname{am}(u, k)]^n\right\},$$

est une *quantité algébrique entière du domaine de rationalité*

$$\left[k + \frac{1}{k}, \quad \sqrt{k} \sin\operatorname{am}(\mu u, \lambda)\right],$$

ce que l'on peut écrire en donnant au symbole de la congruence le sens général fixé par M. Kronecker

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\lambda} \sin\operatorname{am}(\mu u, \lambda) \equiv [\sqrt{k} \sin\operatorname{am}(u, k)]^n \pmod{\mu}.$$

Si l'on observe que la *norme* du multiplicateur μ, qui est aussi le module de la congruence, est précisément égale à l'exposant n du second membre, et que μ peut être envisagé comme un diviseur algébrique *premier* de n dans le domaine du genre représenté par μ, c'est-à-dire par le module de la congruence, on voit l'analogie parfaite entre la congruence précédente de M. Kronecker et la congruence d'Euler pour la fonction trigonométrique *sinus*.

Il est évident que dans toute autre notation que celle de Jacobi, cette grande analogie disparaît. La congruence démontrée par M. Kronecker fournit donc un argument de plus à ceux qui se refusent à abandonner les notations de Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques. Mais elle montre aussi, d'autre part, sur un exemple frappant, combien naturelle est l'extension *algébrique* donnée par M. Kronecker dans la *Festschrift* citée à la notion *arithmétique* de la *divisibilité*.

Enfin, l'analogie complète entre les deux congruences se rapportant : la première à la *multiplication* des fonctions trigonométriques, la seconde à la *transformation* des fonctions elliptiques, nous montre combien, au point de vue algébrique, la pensée de Jacobi était profonde lorsque, dès le début des *Fundamenta*, il envisageait simultanément les problèmes de la transformation et de la multiplication des fonctions elliptiques.

Les démonstrations de M. Kronecker sont souvent bien facilitées par l'emploi d'une nouvelle notation qui, au point de vue des applications à l'Arithmétique et à l'Algèbre, a de tels avantages qu'il semble fort probable qu'elle sera adoptée par tous les géomètres.

M. Kronecker désigne par

$$\mathrm{E}l(\zeta, w),$$

le quotient des deux fonctions $\vartheta_1(2\zeta, 2w)$ et $\vartheta_0(2\zeta, 2w)$, de sorte que l'on a, en posant

$$q = e^{w\pi i},$$

$$\mathrm{E}l\left(\frac{\zeta}{2}, \frac{w}{2}\right) = \frac{q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2+n} \sin(2n+1)\zeta\pi}{\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-q)^{n^2} \cos 2n\zeta\pi},$$

et que la fonction sinam de Jacobi s'exprime à l'aide de la fonction $\mathrm{E}l$ par la relation

$$\sin\mathrm{am}(4\mathrm{K}\zeta, w) = \frac{\mathrm{E}l(\zeta, w)}{\mathrm{E}l\left(\frac{1}{4}, w\right)};$$

on remarquera que

$$\sqrt{k} = \mathrm{E}l\left(\frac{1}{4}, w\right).$$

Si m et n sont des entiers quelconques, on a

$$\mathrm{E}l(\zeta + m + nw, w) = \mathrm{E}l(\zeta, w),$$

tandis que

$$\mathrm{E}l\left(\zeta + \frac{1}{2}, w\right) = -\mathrm{E}l(\zeta, w),$$

$$\mathrm{E}l\left(\zeta + \frac{w}{2}, w\right) = \frac{1}{\mathrm{E}l(\zeta, w)}.$$

Pour démontrer la congruence dont nous venons de parler, M. Kronecker établit d'abord une suite de formules et de théorèmes parmi lesquels la plupart offrent déjà par eux-mêmes un grand intérêt.

Il commence par la formule de multiplication de la fonction sinam u,

$$X = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varphi_{n0} x + \varphi_{n1} x^3 + \ldots + \varphi_{n\nu} x^{n^2-2} + x^{n^2}}{\varphi_{n0} x^{n^2-1} + \varphi_{n1} x^{n^2-3} + \ldots + \varphi_{n\nu} x^2 + 1},$$

où n est un entier impair quelconque, $\nu = \frac{1}{2}(n^2 - 3)$,

$$x = \sqrt{k}\,\sin\mathrm{am}(u, k), \qquad X = \sqrt{k}\,\sin\mathrm{am}(nu, k),$$

et où les coefficients $\varphi_{n0}, \varphi_{n1}, \ldots, \varphi_{n\nu}$ sont des fonctions entières à coefficients entiers de ρ,

$$\rho = k + \frac{1}{k}.$$

En particulier,

$$\varphi_{n0} = \prod \mathrm{E}l\left(\frac{h + h'\omega}{n}, \omega\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n,$$

où le produit est étendu à toutes les combinaisons h, h' des nombres $0, 1, \ldots, n-1$, excepté $h = h' = 0$.

En introduisant la fonction $\Phi_n(x)$ définie par l'équation

$$\Phi_n(x) = x^{n^2} + \sum_{r=0}^{r=\nu} \varphi_{nr} x^{2r+1},$$

on peut écrire la formule précédente de multiplication de $\sin\mathrm{am}\, u$

$$\Phi_n(x) - (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^{n^2} \mathrm{X} \Phi_n\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Si X est donnée, cette équation est vérifiée pour les n^2 valeurs de x

$$x = \sqrt{k} \sin\mathrm{am}\left(u + \frac{4hK + 2h'K'i}{n}\right),$$

qui sont des quantités algébriques entières du domaine (ρ, X). De sorte que, si l'on compare le produit des racines au terme indépendant de x, on a

$$\mathrm{X} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{(h,\, h')} \left[\sqrt{k} \sin\mathrm{am}\left(u + \frac{4hK + 2h'K'i}{n}\right)\right].$$

Envisageons d'abord le cas particulier où $\mathrm{X} = 0$. La formule de multiplication se réduit alors à

$$\Phi_n(x) = 0.$$

Cette équation admet les n^2 racines

$$x = \mathrm{E}l\left(\frac{h + h'\omega}{n}, \omega\right), \qquad (h, h' = 0, 1, \ldots, n-1),$$

qui sont toutes des quantités algébriques entières du domaine (ρ). Ces racines se partagent en groupes.

En effet, le premier membre $\Phi_n(x)$ de l'équation se décompose en autant de facteurs *irréductibles* dans le domaine de rationalité (ρ, x) que le nombre impair n admet de diviseurs. Soit $\mathrm{F}_d(x)$ le facteur de $\Phi_n(x)$ correspondant au diviseur d de n. Les racines de ce facteur égalé à zéro sont les quantités

$$\mathrm{E}l\left(\frac{h + h'\omega}{d}, \omega\right),$$

où h et h' prennent toutes les valeurs pour lesquelles la fraction

$$\frac{h + h'\omega}{d},$$

se présente sous sa forme réduite. Ces quantités

$$\mathrm{E}\ell\left(\frac{h+h'w}{d},\ w\right)$$

sont des quantités algébriques conjuguées du domaine (ρ). Chacune d'entre elles où d contient au moins deux facteurs premiers différents est une *unite algébrique* du domaine (ρ); il en résulte que le nombre $\mathrm{F}_d(0)$, qui est précisément le produit de ces unités algébriques conjuguées, est égal à $+1$ ou à -1. Chacune d'entre elles où d est une puissance d'un nombre premier p n'est pas une unité algébrique du domaine (ρ) et l'on obtient dans ce cas $\mathrm{F}_d(0)=\pm p$. De tout cela résulte que le produit, étendu à tous les diviseurs d du nombre impair n, autres que l'unité

$$\prod_{(d)}\mathrm{F}_d(0),$$

est égal, au signe près, au nombre impair n lui-même.

En posant $u=\mathrm{K}$ dans la formule de multiplication de $\sin\mathrm{am}\,u$, on voit sans peine que la fonction

$$\frac{x^{n^2}+\Sigma\varphi_{nr}x^{2r+1}-\sqrt{k}\,(1+\Sigma\varphi_{nr}x^{n^2-2r-1})}{x-\sqrt{k}}$$

est le carré d'une fonction entière de x, de degré $\frac{n^2-1}{2}$, dont le coefficient de la plus haute puissance de x est $+1$ et dont le terme indépendant de x est $+1$ ou -1. Soit $\Psi(x,\sqrt{k})$ cette fonction. Les racines de l'équation

$$\Psi(x,\sqrt{k})=0$$

sont des *unités algébriques* du domaine (ρ).

Ceci posé, considérons la fonction $\Psi_n(x^2)$ définie par l'égalité

$$\Psi_n(x^2)=\prod\left(x^2-k\sin^2\mathrm{co\,am}\,\frac{4h\mathrm{K}+2h'\mathrm{K}'i}{n}\right)$$
$$\times\left(x^2-\frac{1}{k\sin^2\mathrm{co\,am}\,\frac{4h\mathrm{K}+2h'\mathrm{K}'i}{n}}\right),$$

où le produit est étendu aux $\frac{n^2-1}{2}$ valeurs de h, h'

$$h=0,1,\ldots,n-1,\qquad h'=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$$

et

$$h=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2},\qquad h'=0.$$

On démontre d'abord que les coefficients de $\Psi_n(x^2)$ appartiennent au domaine (ρ). Mais on peut aussi mettre cette fonction $\Psi_n(x^2)$ sous la forme

$$\Psi_n(x^2)=\Psi(x,\sqrt{k})\,\Psi(-x,\sqrt{k})\,\Psi\left(x,\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\Psi\left(-x,\frac{1}{\sqrt{k}}\right);$$

donc les coefficients de $\Psi_n(x^2)$ sont des fonctions algébriques entières du domaine (ρ). En réunissant ces deux résultats on en conclut que *les coefficients de* $\Psi_n(x^2)$ *sont des grandeurs entières du domaine* (ρ).

On démontre aussi que le *discriminant* de la fonction $\Phi_n(x)$ est égal à

$$2^{\frac{n^2(n^2-1)}{3}}(\rho^2-4)^{\frac{(n^2-1)(n^2-3)}{12}}n^{n^2},$$

et de même que, m et n désignant deux nombres impairs quelconques sans diviseur commun, le produit

$$\prod_{(g,g',h,h')}\left[1-\mathrm{E}l\left(\frac{g+g'w}{m}\right)\mathrm{E}l\left(\frac{h+h'w}{n}\right)\right],$$

où $g, g' = 0, 1, \ldots, m-1$, $h, h' = 0, 1, \ldots, n-1$, est égal à

$$16(\rho^2-4)^{\frac{(m^2-1)(n^2-1)}{12}},$$

d'où l'on conclut que la quantité

$$16(\rho^2-4)^{\frac{(m^2-1)(n^2-1)}{12}}\mathrm{E}l\left(\frac{mh+mh'w}{n}\right)$$

est une grandeur entière du domaine

$$\left[\rho, \mathrm{E}l\left(\frac{h+h'w}{n}\right)\right].$$

Revenons maintenant aux équations $\mathrm{F}_n(x) = 0$ obtenues en égalant à zéro les facteurs, irréductibles dans le domaine (ρ, x), de la fonction $\Phi_n(x)$.

Les nombres algébriques du domaine (ρ),

$$\mathrm{E}l\left(\frac{h+h'w}{n}, w\right),$$

qui sont racines de l'équation $\mathrm{F}_n(x) = 0$ et qui sont au nombre de

$$n^2\prod\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

où le produit est étendu à tous les facteurs premiers p différents contenus dans n, se groupent en

$$n\prod\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

genres différents; chacun de ces genres en contient $n\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

De même une fonction symétrique des $n\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$ quantités

$$\mathrm{E}l\left(\frac{rh+rh'w}{n}\right),$$

où h et h' sont fixes et où r parcourt un système complet $r_1, r_2, \ldots$ de restes.

module n, de nombres premiers relatifs à n, représente un genre d'ordre $n\prod\left(1+\frac{1}{p}\right)$ du même domaine (ρ), genre qui est contenu dans le genre d'ordre

$$2\prod\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

représenté par le nombre

$$El\left(\frac{h+h'w}{n}\right).$$

Et si on fait varier h et h' on obtient

$$n\prod\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

genres différents.

En particulier, lorsque n est égal à une puissance d'un nombre premier impair p, si l'on représente, pour abréger, par $p_{hh'}$ le produit

$$p_{hh'}=\prod_{(r)} El\left(\frac{hr+h'rw}{n}\right) \qquad (r=r_1, r_2, \ldots),$$

on peut démontrer que toute grandeur entière du genre $(\rho, p_{hh'})$ qui est divisible par $El\left(\frac{h+h'w}{n}\right)$ est aussi divisible par $p_{hh'}$, et que, d'autre part, deux nombres $El\left(\frac{h+h'w}{n}\right)$, qui appartiennent à deux genres différents, n'ont aucun diviseur commun.

Appliquant les résultats précédents au cas où n est un nombre premier impair et tenant compte des formules de transformation de l'article 23 des *Fundamenta*, on obtient une suite de théorèmes parmi lesquels nous citerons les plus remarquables.

1. Chaque module λ tel que le rapport $\frac{\Lambda'}{\Lambda}$ des périodes qui correspondent à ce module soit un *multiple entier* du rapport $\frac{K'}{K}$ des périodes qui correspondent au module k est racine d'une équation dont les coefficients sont des fonctions entières à coefficients entiers de $\rho=k+\frac{1}{k}$; en particulier, les coefficients extrêmes sont égaux à $+1$ ou à -1. Il est d'ailleurs manifeste que, ρ restant fixe, le même résultat subsiste pour les modules conjugués à λ.

2. Le nombre

$$\left(\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{1}{4}}$$

est une grandeur algébrique *entière* d'ordre $(n+1)$ dans le domaine de rationalité

$$(\rho, \sqrt{k}).$$

3. Le multiplicateur μ et le nombre $\left(\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$ font partie du même *genre* dans le domaine de rationalité (k).

4. Dans le domaine de rationalité

$$\left[\rho, \mathrm{E}\,l\left(\frac{1}{n}\right), \mathrm{E}\,l\left(\frac{w}{n}\right)\right],$$

le nombre premier impair n est décomposable en n^2-1 *diviseurs premiers conjugués;* ces diviseurs premiers sont les n^2-1 nombres

$$\mathrm{E}\,l\left(\frac{h+h'w}{n}\right).$$

5. Chaque grandeur *entière* du domaine de rationalité

$$\left(\rho, \mu\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\right),$$

qui est divisible par $\mathrm{E}\,l\left(\frac{1}{n}\right)$, est aussi divisible par μ.

C'est en appliquant ce dernier théorème à la formule de transformation de Jacobi que l'on obtient la congruence fondamentale dont la démonstration est l'objet de ce beau Mémoire.

Mais M. Kronecker ne s'arrête pas là. C'est la formule de multiplication qui lui a servi de point de départ; en cherchant à la généraliser, il est amené à se poser le problème suivant :

η, w et $\mathrm{E}\,l(\eta, w)$ étant données, trouver tous les nombres v tels que

$$\mathrm{E}\,l(\xi, v),$$

où ξ ne diffère de η que par un facteur constant, soit une fonction rationnelle de $\mathrm{E}\,l(\eta, w)$.

On démontre que ce problème n'est possible que si w et v sont liés par une relation linéaire

$$w = \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta},$$

où α, β, γ, δ sont des nombres entiers. Ainsi, de même que le problème de la multiplication des fonctions elliptiques, ce problème plus général se résout à l'aide de la *transformation* des fonctions elliptiques.

Plus généralement encore, on peut se demander s'il est possible que les deux fonctions elliptiques

$$\mathrm{E}\,l(\xi, v), \qquad \mathrm{E}\,l(\eta, w),$$

ainsi que les arguments ξ et η, soient liés par des *relations algébriques.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que, a, b, c, d, r, s désignant des entiers quelconques, on ait

$$v = \frac{r}{s}\,\frac{aw+b}{cw+d}, \qquad \eta = \sigma\xi + \tau,$$

où

$$\sigma = \frac{cw+d}{r},$$

tandis que τ désigne une quantité arbitraire, indépendante de ξ. Le problème est donc de nouveau résolu par une *transformation.*

Si l'on considère le cas particulier du dernier problème où $v = w$, on voit

donc que, s les deux fonctions

$$\mathrm{E}\, l(\xi, w), \qquad \mathrm{E}\, l(\eta, \sigma),$$

ainsi que les arguments ξ, η, sont liés par des relations algébriques, *ou bien σ est un nombre entier, ou bien σ et w sont des nombres algébriques complexes appartenant au même genre.*

Dans ce dernier cas, w est nécessairement racine d'une équation algébrique

$$A + Bw + Cw^2 = 0,$$

où A, B, C sont des nombres entiers tels que l'on ait $B^2 < 4AC$; w est d'ailleurs celle des deux racines pour laquelle la partie réelle de wi est négative.

Une fonction elliptique $\mathrm{E}\, l(\zeta, w)$, formée avec une telle quantité w, est dite *fonction elliptique singulière* et son module

$$\mathrm{E}\, l^2\left(\frac{1}{4}, w\right)$$

est un *module singulier,* suivant la terminologie adoptée dès 1862 par M. Kronecker.

On déduit aussi du même théorème général cet autre corollaire. Si les arguments ξ et η sont liés par la relation

$$\xi[\vartheta_3(0, 2v)]^2 = \eta[\vartheta_3(0, 2w)]^2,$$

on a nécessairement

$$\mathrm{E}\, l(\xi, v) = \mathrm{E}\, l(\eta, w):$$

donc v et w sont liés par une relation linéaire

$$v = \frac{aw + b}{cw + d},$$

où a, b, c, d sont des entiers tels que $ad - bc = 1$.

Revenant à la formule de multiplication de $\sin\mathrm{am}\, u$ dans le cas où n est un nombre premier impair, M. Kronecker démontre encore que *le nombre n est contenu en facteur dans tous les coefficients des puissances de* $\sin\mathrm{am}\, u$ *dont l'exposant n'est pas divisible par n.*

Enfin il termine en indiquant comment le théorème fondamental de ce Mémoire peut être démontré en suivant une marche différente, due à Jacobi (*Journal de Crelle,* t. I), et reposant sur la détermination, par une formule de récursion, des coefficients qui paraissent dans la transformation des fonctions elliptiques. C'est en suivant cette voie que M. Kronecker a d'abord démontré la congruence dont nous avons parlé et l'illustre géomètre insiste beaucoup sur l'importance de cette formule de récursion de Jacobi dont il a fait souvent usage lui-même dans ses recherches sur les modules singuliers des fonctions elliptiques.

Fuchs. — Sur les figures algébriques qui admettent une involution. (797-804).

Voici d'abord ce que M. Fuchs entend par figure (*Gebilde*) algébrique admettant une involution.

Envisageons une transformation algébrique univoquement réversible d'une figure algébrique en elle-même. Soit P un point de la surface de Riemann représentant la figure algébrique ; soit P′ le point de la même surface de Riemann dans lequel se transforme P. Si alors le point de la même surface de Riemann dans lequel se transforme P′ coïncide avec P, on dira que les deux points P, P′ formant un couple en involution algébrique et que la figure algébrique considérée ou, si l'on veut, la surface de Riemann qui la représente, admet une involution.

Si donc

$$F(s, z) = 0$$

est une équation algébrique irréductible et s'il existe une transformation

$$\zeta = \varphi(s, z),$$
$$\sigma = \psi(s, z),$$

où φ et ψ sont des fonctions *rationnelles* de s et z telles que l'on ait

$$z = \varphi(\sigma, \zeta),$$
$$s = \psi(\sigma, \zeta)$$

et

$$F(\sigma, \zeta) = 0,$$

on dira que la figure algébrique $F(s, z) = 0$ admet une involution.

Soit p le *genre* (le *rang* dans la terminologie de M. Weierstrass) de la figure algébrique $F(s, z) = 0$. Nous désignerons par

$$f_1(s, z), \ldots, f_p(s, z),$$

les dérivées de p intégrales de première espèce linéairement indépendantes formées à l'aide de $F(s, z) = 0$. Alors p sera aussi le *genre* de la figure algébrique $F(\sigma, \zeta) = 0$ et

$$f_1(\sigma, \zeta), \quad \ldots, \quad f_p(\sigma, \zeta),$$

seront aussi les dérivées de p intégrales de première espèce linéairement indépendantes formées à l'aide de $F(\sigma, \zeta) = 0$.

On a donc, pour $k = 1, 2, \ldots, p$, les relations

$$f_k(s, z)\, dz = [c_{k1} f_1(\sigma, \zeta) + c_{k2} f_2(\sigma, \zeta) + \ldots + c_{kp} f_p(\sigma, \zeta)]\, d\zeta,$$
$$f_k(\sigma, \zeta)\, d\zeta = [c_{k1} f_1(s, z) + c_{k2} f_2(s, z) + \ldots + c_{kp} f_p(s, z)]\, dz,$$

où $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{pp}$ désignent des constantes déterminées.

Si l'on désigne par $G(s, z)$ l'expression

$$b_1 f_1(s, z) + b_2 f_2(s, z) + \ldots + b_p f_p(s, z),$$

où les constantes $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont choisies telles que l'on ait, en appelant w une constante,

$$G(s, z)\, dz = w\, G(\sigma, \zeta)\, d\zeta,$$

on voit que w est nécessairement racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} c_{11} - w & c_{21} & \ldots & c_{p1} \\ c_{12} & c_{22} - w & \ldots & c_{p2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1p} & c_{2p} & \ldots & c_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

Soient $w_1, w_2, \ldots, w_p$ les p racines de cette dernière équation. Qu'elles soient toutes inégales ou quelques-unes égales, M. Fuchs démontre que, dans tous les cas, à ces p racines correspondent p dérivées d'intégrales de première espèce linéairement indépendantes

$$G_1(s, z), \quad G_2(s, z), \quad \ldots, \quad G_p(s, z),$$

qui vérifient les relations

$$G_k(s, z)\, dz = w_k\, G_k(\sigma, \zeta)\, d\zeta$$

et

$$G_k(\sigma, \zeta)\, d\zeta = w_k\, G_k(s, z)\, dz,$$

pour $k = 1, 2, \ldots, p$. On peut donc prendre dès le début pour $f_1(s, z), \ldots, f_p(s, z)$ précisément les p fonctions $G_1(s, z), \ldots, G_p(s, z)$.

Les deux dernières équations, où w_k représente le même nombre, montrent d'ailleurs que w_k ne peut être égal qu'à $+1$ ou à -1. On peut donc les écrire

$$G_k(s, z)\, dz = \pm\, G_k(\sigma, \zeta)\, d\zeta$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

ou encore en prenant $G_1, G_2, \ldots, G_p$ dans un ordre convenable

$$G_k(s, z)\, dz = -\, G_k(\sigma, \zeta)\, d\zeta \qquad (k = \lambda + 1, \ldots, \lambda + \mu),$$
$$G_k(s, z)\, dz = \quad G_k(\sigma, \zeta)\, d\zeta \qquad (k = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

où $p = \lambda + \mu$.

En désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$; $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ des constantes, formons maintenant les deux fonctions

$$\Psi(s, z) = e_1\, G_{\lambda+1}(s, z) + e_2\, G_{\lambda+2}(s, z) + \ldots + c_\mu\, G_p(s, z),$$
$$\Phi(s, z) = c_1\, G_1(s, z) + c_2\, G_2(s, z) + \ldots + c_\lambda\, G_\lambda(s, z),$$

ainsi que leur quotient

$$R(s, z) = \frac{\Phi(s, z)}{\Psi(s, z)}.$$

M. Fuchs démontre que l'on peut déterminer les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$; $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ de manière que les deux équations

$$\Phi(s, z) = 0, \qquad \Psi(s, z) = 0$$

aient $2p - 4$ solutions communes formant deux à deux des couples en involution, l'involution étant caractérisée par les équations

$$\zeta = \varphi(s, z), \qquad z = \varphi(\sigma, \zeta),$$
$$\sigma = \psi(s, z), \qquad s = \psi(\sigma, \zeta),$$

d'où nous sommes partis. Une partie de la démonstration n'est effectuée que dans le cas particulier $p = 4$, $\lambda = 2$.

Il résulte de ce théorème que l'on peut toujours déterminer les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$; $e_1, \ldots, e_\mu$ de manière que la fonction

$$u = R(s, z)$$

ne soit infinie (du premier ordre) qu'en deux points de la surface de Riemann correspondante.

On peut donc représenter s et z par des fonctions rationnelles de u et de $\sqrt{S(u)}$, où $S(u)$ désigne une fonction rationnelle entière de u, et où u et $\sqrt{S(u)}$ sont des fonctions rationnelles de s et z.

Ainsi les seules surfaces algébriques de Riemann qui admettent une involution sont celles que l'on peut représenter sur une surface de Riemann à *deux* feuillets, c'est-à-dire sur une surface *hyperelliptique* de Riemann, à l'aide d'une substitution rationnelle univoquement réversible.

Si l'on suppose inversement que la surface algébrique de Riemann (s, z) correspondant à l'équation algébrique $F(s, z) = 0$ et une surface de Riemann à *deux* feuillets seulement puissent être représentées l'une sur l'autre par des substitutions rationnelles univoquement réversibles, on voit sans difficulté que $F(s, z) = 0$ admet une involution algébrique.

M. Fuchs a ainsi démontré que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface algébrique de Riemann* S *admette une involution algébrique est qu'il existe une surface* hyperelliptique *de Riemann* S_1, *telle que l'on puisse représenter* S *et* S_1 *l'une sur l'autre à l'aide de substitutions rationnelles.*

On trouvera une application de ce théorème à la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre, dans le t. 100 du *Journal de Crelle.*

1er semestre 1887

Fuchs. — Sur l'inversion de certaines fonctions de deux variables. (99-108).

Envisageons les équations différentielles simultanées

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{y_1} + \dfrac{dz_2}{y_2} = du_1, \\[2ex] \dfrac{dz_1}{w_1} + \dfrac{dz_2}{w_2} = du_2, \end{cases}$$

où z_1, z_2 sont des fonctions de u_1, u_2, et proposons-nous de déterminer ces fonctions z_1, z_2 de u_1, u_2 de manière que y_1 et w_1 ne soient fonctions que de z_1, tandis que y_2 et w_2 ne soient fonctions que de z_2 et que les équations (1) soient vérifiées.

En posant, pour abréger,

$$\lambda = \frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - \frac{\partial z_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1},$$

on déduit de (1) les identités

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y_1} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}, & \dfrac{1}{y_2} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}, \\[2ex] \dfrac{1}{w_1} = -\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1}, & \dfrac{1}{w_2} = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}. \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que y_1 et w_1 ne soient fonctions

que de z_1 est exprimée par les deux équations

$$\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_1}{\partial u_2} - \frac{\partial y_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = 0,$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial u_1}\frac{\partial z_1}{\partial u_2} - \frac{\partial w_1}{\partial u_2}\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = 0.$$

Elle peut être mise sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} (P+Q)\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} - R\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} - S\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} = 0, \\ (R+S)\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} - P\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} - Q\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$P = \frac{\partial^2 z_2}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial z_1}{\partial u_1} - \frac{\partial^2 z_2}{\partial u_1^2}\frac{\partial z_1}{\partial u_2},$$
$$Q = \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1^2}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1},$$
$$R = \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial z_2}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_2^2}\frac{\partial z_2}{\partial u_1},$$
$$S = \frac{\partial^2 z_2}{\partial u_2^2}\frac{\partial z_1}{\partial u_1} - \frac{\partial^2 z_2}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial z_1}{\partial u_2}.$$

On observera que P et Q d'une part, R et S d'autre part se permutent entre elles en changeant de signes, quand on permute z_1 et z_2. Les équations (3) expriment donc aussi la condition nécessaire et suffisante pour que y_2 et w_2 ne soient fonctions que de z_2.

Supposons donc que z_1 et z_2 vérifient les équations (3); déterminons alors y_1, y_2, w_1, w_2 à l'aide des équations (2) et posons

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{y_1}{w_1} = \dfrac{\varphi_1(z_1)}{f_1(z_1)} = \zeta_1, \\ \dfrac{y_2}{w_2} = \dfrac{\varphi_2(z_2)}{f_2(z_2)} = \zeta_2, \end{cases}$$

Ces équations (4) définissent deux fonctions ζ_1 de z_1, ζ_2 de z_2; si nous les envisageons comme fonctions de u_1, u_2, nous déduisons des équations (2) que ces fonctions ζ_1, ζ_2 vérifient les équations

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\zeta_1}{du_1} + \zeta_2\dfrac{d\zeta_1}{du_2} = 0, \\ \dfrac{d\zeta_2}{du_1} + \zeta_1\dfrac{d\zeta_2}{du_2} = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs des équations (4) nous déduisons que z_1 est une fonction déterminée ψ_1 de ζ_1 et que z_2 est une fonction déterminée ψ_2 de ζ_2.

M. Fuchs démontre qu'inversement, si l'on nous donne deux fonctions arbitraires

$$z_1 = \psi_1(\zeta_1), \qquad z_2 = \psi_2(\zeta_2),$$

où ζ_1, ζ_2 sont des fonctions de u_1, u_2 vérifiant les équations (5), et si l'on en-

visage les fonctions z_1 et z_2 de u_1, u_2 ainsi définies, les quantités y_1 et w_1 données par (2) seront des fonctions de z_1 seulement, et de même y_2 et w_2 données par (2) seront des fonctions de z_2 seulement.

Parmi ces fonctions z_1 et z_2 que nous venons de déterminer, n'envisageons plus dans ce qui suit que celles pour lesquelles $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ sont des fonctions univoques de u_1, u_2 dans des domaines déterminés Σ_1, Σ_2. Soient T_1 et T_2 les domaines correspondants de z_1 et z_2; S_1, S_2 les domaines correspondants de

$$\zeta_1 = \frac{\varphi_1(z_1)}{f_1(z_1)}, \qquad \zeta_2 = \frac{\varphi_2(z_2)}{f_2(z_2)},$$

S le domaine commun à S_1 et S_2.

Parmi ces fonctions z_1 et z_2 excluons encore celles pour lesquelles les fonctions y_1 et y_2 qui s'en déduisent s'annulent dans des parties des domaines T_1, T_2.

Alors tout système particulier (z_1, z_2) vérifiant l'équation

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_2) \\ \varphi_1(z_1) & \varphi_2(z_2) \end{vmatrix} = 0$$

vérifie aussi l'équation

$$F_1(z_1) f_2^3(z_2) + F_2(z_2) f_1^3(z_1) = 0,$$

où

$$F_1(z_1) = \varphi'_1(z_1) f_1(z_1) - \varphi_1(z_1) f'_1(z_1),$$
$$F_2(z_2) = \varphi'_2(z_2) f_2(z_2) - \varphi_2(z_2) f'_2(z_2);$$

il y a exception toutefois pour le système $z_1 = z_2$, $y_1 = y_2$ et les systèmes isolés z_1, z_2 pour lesquels y_1, w_1, y_2, w_2 s'annulent.

D'ailleurs si u_1, u_2 sont des variables *indépendantes*, les fonctions z_1, z_2 de u_1, u_2 ne forment pas un système (z_1, z_2) pour lequel le déterminant (6) est nul.

En comparant les résultats obtenus ici avec ceux déjà publiés par M. Fuchs dans les *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 8 janvier 1881, on voit que les fonctions z_1 de ζ_1 et z_2 de ζ_2 que nous envisageons sont nécessairement des fonctions *alternées* qui vérifient, dans le domaine (S) de ζ_1, ζ_2, les quatre relations

$$\left.\begin{aligned} \left[f(z_i)\frac{dz_i}{d\zeta_i}\right]^2 &= \Psi(\zeta_i) \\ \left[\varphi(z_i)\frac{dz_i}{d\zeta_i}\right]^2 &= \zeta_i^2\,\Psi(z_i) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2),$$

où $\Psi(\zeta)$ désigne une fonction *univoque* de ζ.

Fuchs. — Sur un théorème de la théorie des fonctions algébriques et sur une application de ce théorème à des équations différentielles linéaires du second ordre. (159-166).

Dans une Communication précédente (voir *plus haut*, p. 201), M. Fuchs a montré qu'une surface algébrique de Riemann qui admet une involution algébrique peut être transformée en une surface hyperelliptique de Riemann à l'aide d'une substitution rationnelle univoque et réversible.

Ce théorème n'est démontré que si les périodes πi et a_{kl} des intégrales normales de première espèce introduites par Riemann dans sa théorie des fonctions abéliennes (t. 54 du *Journal de Crelle*) ne sont liées par aucune relation à coefficients entiers.

Si l'on ne fait pas cette restriction et si l'on admet donc que les périodes πi et a_{kl} puissent être liées par des relations à coefficients entiers, on peut seulement démontrer qu'une surface algébrique de Riemann (s, z) admettant une involution algébrique (σ, ζ), (s, z) peut être transformée, par une substitution rationnelle univoque et réversible, soit en une surface hyperelliptique, soit en une surface de Riemann (t, u) telle que deux points analytiques (t, u) et $(-t, -u)$ correspondent aux points en involution (s, z) et (σ, ζ).

M. Fuchs démontre ce dernier théorème. Il reprend aussi, en la simplifiant, la démonstration du théorème dans le cas particulier où il n'y a aucune relation à coefficients entiers entre les périodes πi et a_{kl}. La simplification repose sur ce qu'il observe ici que, dans ce cas particulier, le signe est nécessairement le même dans chacune des p équations

$$G_k(s, z)\, dz = \pm G_k(\sigma, \zeta)\, d\zeta,$$

dont nous avons parlé (p. 203).

Il convient de faire observer que, dans ce cas, le théorème de M. Fuchs coïncide avec un théorème démontré par M. Hurwitz dans les *Comptes rendus de l'Académie royale de Saxe*, janvier 1886.

Pour donner un exemple des applications que comporte le théorème démontré, envisageons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + G(s, z)\frac{dy}{dz} + H(s, z)y = 0,$$

où $G(s, z)$ et $H(s, z)$ sont des fonctions rationnelles du point analytique (s, z) de la surface de Riemann correspondant à l'équation

$$F(s, z) = 0.$$

Soient $f(s, z)$ et $\varphi(s, z)$ un système fondamental d'intégrales de cette équation différentielle. Nous cherchons s'il est possible que les points analytiques (s_1, z_1), (s_2, z_2), qui vérifient la relation

$$(1) \qquad f(s_1, z_1)\,\varphi(s_2, z_2) - f(s_2, z_2)\,\varphi(s_1, z_1),$$

vérifient aussi les équations différentielles

$$(2) \qquad \begin{cases} f(s_1, z_1)\, dz_1 \pm f(s_2, z_2)\, dz_2 = 0, \\ \varphi(s_1, z_1)\, dz_1 \pm \varphi(s_2, z_2)\, dz_2 = 0. \end{cases}$$

Ce problème a déjà été résolu par M. Fuchs dans le tome 100 du *Journal de Crelle*, mais seulement dans le cas particulier où il n'y a aucune relation à coefficients entiers entre les périodes πi et a_{kl}. Le problème est alors possible lorsque les points analytiques

$$(s_1, z_1), \quad (s_2, z_2)$$

forment un couple en involution sur la surface de Riemann considérée et vérifient en outre une certaine équation algébrique déterminée.

Dans le cas général, où l'on ne sait pas si les périodes πi et a_{kl} sont ou ne sont pas liées par une relation à coefficients entiers, le problème est possible lorsqu'il existe une substitution rationnelle univoque et réversible

$$z = R(t, u),$$
$$s = S(t, u),$$

telle que t^2 et u^2 soient des fonctions univoques du quotient ζ d'un système fondamental de l'équation différentielle considérée.

Dans le Mémoire actuel M. Fuchs démontre ce théorème. Il montre, en outre, qu'en supposant l'existence de cette substitution

$$z = R(t, u),$$
$$s = S(t, u),$$

si l'on transforme l'équation différentielle proposée par la substitution

$$w = y\frac{dz}{du}$$

en

$$\frac{d^2 w}{du^2} + G_2(t, u)\frac{dw}{du} + H_2(t, u)w = 0,$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$P(t, u) = -3\frac{dG_2(t, u)}{du} + 9H_2(t, u) - 2G_2(t, u),$$
$$\Delta(t, u) = e^{-\int G_2(t, u)du},$$

les points analytiques (s_1, z_1), (s_2, z_2) qui vérifient la relation (1) vérifient aussi les équations différentielles (2), lorsque l'on a

$$(3)\qquad \begin{cases} \sqrt[3]{\Delta(-t_1, -u_1)} + \sqrt[3]{\Delta(t_1, u_1)} = 0, \\ \sqrt{P(-t_1, -u_1)} + \sqrt{P(t_1, u_1)} = 0. \end{cases}$$

L'ensemble de ces deux théorèmes nous montre que le même résultat a lieu dans le cas général actuel et dans le cas particulier où la surface de Riemann est transformée par une substitution rationnelle univoque et réversible en une surface hyperelliptique, comme on le suppose dans le tome 100 du *Journal de Crelle*.

Ce n'est donc pas, dans le cas particulier où l'on suppose qu'il n'y a pas de relations à coefficients constants entre les périodes, le fait de la possibilité de transformer la surface de Riemann considérée en une surface hyperelliptique de Riemann qui est la chose essentielle, comme on est tenté de le croire lorsqu'on n'envisage que ce cas particulier. Ce qui est essentiel, c'est que, en posant

$$\sqrt{S(u)} = t,$$

t^2 et u^2 soient des fonctions univoques de ζ et que les équations (3) soient vérifiées.

De Helmholtz. — Sur l'histoire du principe de la moindre action. (225-236).

Dans un premier paragraphe, M. Helmholtz, après avoir rappelé la définition de l'*action* donnée par Leibnitz, se demande dans quel but ce grand penseur a établi cette définition de l'action plutôt que toute autre. Il lui semble, pour diverses raisons exposées dans son Mémoire, que c'est dans le but d'aboutir à la proposition que nous nommons aujourd'hui *principe de la moindre action*. Les fragments de lettres de Leibnitz publiés par Samuel König concorderaient avec cette idée de M. Helmholtz qui est naturellement porté à les considérer comme authentiques. M. Helmholtz donne même, dans l'hypothèse de cette authenticité, une explication plausible de la non-publication par Leibnitz du principe de la moindre action. Dans un second paragraphe, M. Helmholtz montre les rapports intimes et les différences qui existent entre le principe de la moindre action de Lagrange, le principe d'Hamilton et le point de vue auquel Jacobi s'est placé dans sa *Dynamique*, en développant, lui aussi, le principe de la moindre action.

A cet effet, il envisage pour chaque mobile du système de points considérés, la longueur s_a de l'arc parcouru par le mobile de masse m_a, la vitesse tangentielle q_a de ce mobile, *et le temps t*, comme des fonctions d'une même variable indépendante $\mathfrak{T}$.

Le principe de Lagrange doit être énoncé comme il suit :

La *variation* de l'intégrale

$$\int \sum_{(a)} [m_a q_a \, ds_a],$$

où $ds_a = q_a \, dt$ est nulle si cette variation est effectuée de manière que l'énergie totale E du système considéré ne varie pas.

En d'autres termes on a, en désignant par F l'*énergie potentielle*,

$$\delta \int \sum_{(a)} [m_a q_a \, ds_a] = 0, \qquad ds_a = q_a \, dt,$$

avec la condition

$$\sum_{(a)} [m_a q_a \, \delta q_a] + \delta F = 0.$$

On en déduit, soit les équations différentielles du mouvement de Lagrange, soit l'équation d'Hamilton, suivant la manière dont on fait usage de l'équation de condition. Pour obtenir les équations de Lagrange, ce sont les δq_a que l'on élimine à l'aide de l'équation de condition; on parvient ainsi, en introduisant des coordonnées indépendantes $p_a (a = 1, 2, \ldots)$, aux équations

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial p_a} + \frac{\partial L}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right),$$

où $L = E - F$ est l'*énergie cinétique* du système. Ces équations répondent à la question, *quelle que soit la dépendance de t et de* $\mathfrak{T}$.

Pour obtenir l'équation d'Hamilton, c'est δt que l'on élimine à l'aide de l'équation de condition. L'énergie totale E et la variable indépendante $\mathfrak{T}$ disparaissent alors par elles-mêmes dans le résultat de l'élimination, et l'on voit que l'on peut prendre pour t une fonction arbitraire de $\mathfrak{T}$.

Jacobi n'envisage que le cas où F est indépendant de t. A l'aide de l'équation de condition, il élimine alors dt et, par suite, il élimine t de l'intégrale dont on doit considérer la variation.

Dans la méthode d'Hamilton et dans celle de Jacobi, on commence ainsi par ramener le problème de Lagrange à un problème de calcul des variations dans lequel il n'y a plus d'équations de condition.

Et les deux formes d'Hamilton et de Jacobi ont ainsi une source commune qui n'est autre que la forme de Lagrange du principe de la moindre action, telle que nous l'avons énoncée plus haut.

2e semestre 1887.

Fuchs. — Sur certaines relations entre les intégrales d'équations différentielles. (1077-1094).

Si l'on a une équation différentielle entre z, y, $\frac{dy}{dz}$, on entend, dans ce Mémoire, par *intégrale* de cette équation différentielle, tout système de valeurs

$$\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right),$$

qui vérifie l'équation différentielle. L'intégrale ainsi définie est entièrement déterminée si l'on donne *sa valeur initiale*

$$(\alpha, \beta, \gamma),$$

c'est-à-dire les valeurs simultanées $z = \alpha$, $y = \beta$, $\frac{dy}{dz} = \gamma$.

De même, si l'on a un système d'équations différentielles simultanées

$$\frac{dy_k}{dz} = f_k(z, y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

on entend, par *intégrale* de ce système d'équations différentielles simultanées, tout système de valeurs

$$\left(z, y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dz}, \ldots, \frac{dy_n}{dz}\right)$$

qui vérifie les équations simultanées. L'intégrale ainsi définie est entièrement déterminée si l'on donne sa valeur initiale

$$(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

L'avantage de la modification apportée à la définition des intégrales des équations différentielles apparaîtra clairement dans la suite de ce Mémoire et dans d'autres publications ultérieures; mais on voit *a priori* qu'elle est symétrique en y et z contrairement à la définition ordinaire; or ceci est manifestement un avantage puisque, d'après un théorème de M. Poincaré, les variables y et z peuvent être toutes deux exprimées par des fonctions univoques d'une même variable auxiliaire.

Si $R(z)$ est une fonction rationnelle entière de z de degré 3 ou 4, on sait, depuis Euler, que l'équation différentielle

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0$$

est intégrable *algébriquement;* c'est de ce théorème important qu'on a déduit le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

On peut énoncer le même théorème en disant : si $F(z)$ est la dérivée d'une intégrale elliptique de première espèce, l'équation différentielle

$$F(z)\,dz + F(y)\,dy = 0$$

est intégrable algébriquement. Demandons-nous s'il y a un théorème analogue dans le cas où $F(z)$ est la dérivée d'une intégrale abélienne de première espèce, de genre $p = 2$.

Si alors $F_1(z)$ est la dérivée d'une seconde intégrale de première espèce appartenant à la même surface de Riemann que $F(z)$, mais linéairement indépendante de $F(z)$, le théorème d'Abel nous dit que les deux équations

$$\int_\alpha^z F(z)\,dz + \int_{\alpha_1}^y F(y)\,dy = \int_\gamma^{z_1} F(z_1)\,dz_1 + \int_{\gamma_1}^{y_1} F(y_1)\,dy_1,$$

$$\int_\alpha^z F_1(z)\,dz + \int_{\alpha_1}^y F_1(y)\,dy = \int_\gamma^{z_1} F_1(z_1)\,dz_1 + \int_{\gamma_1}^{y_1} F_1(y_1)\,dy_1$$

dans lesquelles α, α_1, γ, γ_1 désignent des quantités arbitraires indépendantes de z, y, z_1, y_1, sont vérifiées par deux fonctions algébriques z_1, y_1 des variables z, y. Si l'on donne aux constantes α, α_1 des valeurs déterminées, on peut écrire les relations algébriques qui lient z_1, y_1, z, y,

$$(1)\qquad \begin{cases} \gamma = G(y, z, y_1, z_1), \\ \gamma_1 = H(y, z, y_1, z_1), \end{cases}$$

où G et H désignent des fonctions algébriques.

Il est facile d'en conclure que, si l'on fixe par sa valeur initiale

$$\left[\alpha,\ \alpha_1,\ -\frac{F(\alpha)}{F(\alpha_1)}\right]$$

une intégrale

$$\left(z,\ y,\ \frac{dy}{dz}\right)$$

de l'équation différentielle

$$F(z)\,dz + F(y)\,dy = 0,$$

les éléments de l'une quelconque des intégrales

$$\left(z_1,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dz_1}\right)$$

de cette équation différentielle sont des fonctions algébriques des éléments de l'intégrale fixée

$$\left(z,\ y,\ \frac{dy}{dz}\right).$$

Ce sont les équations (1) qui nous donnent ces relations algébriques, si l'on y entend par γ, γ_1 les valeurs initiales correspondant à l'intégrale que l'on veut considérer

$$\left(z_1,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dz_1}\right).$$

Ce théorème peut être envisagé comme une généralisation au genre $p = 2$ du théorème d'Euler relatif au genre $p = 1$.

Proposons-nous de généraliser encore ce théorème et envisageons, à cet effet, l'équation différentielle plus générale que la précédente

$$\frac{dy}{dz} = \varphi(z, y),$$

où φ désigne une fonction algébrique de z, y.

M. Weierstrass a démontré que si ξ_1, ξ_2, ξ_3 désignent trois fonctions univoques quatre fois périodiques de deux variables indépendantes u_1, u_2, ayant pour des valeurs finies de ces variables le caractère de fonctions rationnelles et telles que, parmi les systèmes de périodes de chacune de ces fonctions, se trouvent tous les systèmes de périodes des deux autres fonctions, les trois fonctions ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont nécessairement liées par une équation algébrique irréductible.

En s'appuyant sur cette proposition, M. Fuchs démontre les deux théorèmes suivants :

I. Si $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ et $\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right)$ sont deux intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = \varphi(z, y),$$

formons les équations aux dérivées partielles

$$A_1 + B_1\varphi(z, y) + C_1\varphi(z_2, y_2) + D_1\varphi(z, y)\ \varphi(z_2, y_2) = 0,$$
$$A_2 + B_2\varphi(z_1, y_1) + C_2\varphi(z_2, y_2) + D_2\varphi(z_1, y_1)\varphi(z_2, y_2) = 0,$$

où

$$A_1 = \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y_1}{\partial z_2} - \frac{\partial y}{\partial z_2}\frac{\partial y_1}{\partial z}, \qquad B_1 = -\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial z_2} - \frac{\partial y_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_2},$$
$$C_1 = \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y_1}{\partial y_2} - \frac{\partial y}{\partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial z}, \qquad D_1 = \frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y_2} - \frac{\partial y}{\partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial y},$$

et où A_2, B_2, C_2, D_2 s'obtiennent en effectuant dans A_1, B_1, C_1, D_1 les différentiations par rapport à x_1, y_1, z_1, au lieu de les effectuer par rapport à x, y, z.

Envisageons deux fonctions analytiques des six variables z, y, z_1, y_1, z_2, y_2,

$$\gamma_1 = G(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2),$$
$$\gamma_2 = H(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2),$$

vérifiant ces équations aux dérivées partielles.

Alors un systeme

$$\left(z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}\right),$$

dont les éléments sont liés aux éléments des deux intégrales considérées par les deux équations $\gamma_1 = G$, $\gamma_2 = H$, où γ_1, γ_2 ont des valeurs fixées, d'ailleurs arbitrairement, est aussi une intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = \varphi(z, y).$$

II. Si $\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)$ est une intégrale de l'équation différentielle $\frac{dy}{dz} = \varphi(z, y)$.

on peut former deux équations aux dérivées partielles

$$G_1 + H_1\varphi(z, y) + E_1\varphi(z_1, y_1) + F_1\varphi(z, y)\varphi(z_1, y_1) = 0,$$
$$G_2 + H_2\varphi(z, y) + E_2\varphi(z_2, y_2) + F_2\varphi(z, y)\varphi(z_2, y_2) = 0,$$

où E_1, F_1, G_1, H_1, E_2, F_2, G_2, H_2 sont, comme tout à l'heure, $A_1, \ldots$, formées d'une manière déterminée à l'aide des dérivées partielles de quatre fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ par rapport à six variables z, y, z_1, y_1, z_2, y_2.

Si l'on envisage alors quatre fonctions analytiques

$$\gamma_k = G_k(z, y, z_1, y_1, z_2, y_2)$$

de ces six variables, vérifiant les deux équations aux dérivées partielles, les systèmes

$$\left(z_1, y_1, \frac{dy_1}{dz_1}\right), \qquad \left(z_2, y_2, \frac{dy_2}{dz_2}\right),$$

dont les éléments sont liés aux éléments de l'intégrale considérée $\left(z, y, \frac{dz}{dy}\right)$, par les quatre équations $\gamma_k = G_k$, où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ont des valeurs fixées, d'ailleurs arbitrairement, sont aussi des intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dy} = \varphi(z, y).$$

On pourrait énoncer ainsi une suite de théorèmes fournissant des relations entre un nombre toujours plus grand d'intégrales de l'équation différentielle considérée.

Pour montrer comment on peut aussi étendre ces considérations à un système d'équations différentielles du premier ordre, envisageons le système formé par les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{dy}{dz} = \varphi(z, y, v),$$
$$\frac{dv}{dz} = \psi(z, y, v).$$

Soit

$$\left(z, y, v, \frac{dy}{dz}, \frac{dv}{dz}\right)$$

une intégrale de ce système. Formons alors les deux équations aux dérivées partielles

$$Q_1 + Q_2\mu + Q_3\nu - \mu_1(P_1 + P_2\mu + P_3\nu) = 0,$$
$$R_1 + R_2\mu + R_3\nu - \nu_1(P_1 + P_2\mu + P_3\nu) = 0,$$

où P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2, P_3, Q_3, R_3 sont formés d'une manière déterminée à l'aide des dérivées partielles de trois fonctions inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, par rapport à six variables z, y, v, z_1, y_1, v_1 (tout comme $A_1, \ldots$, dans le théorème I) et où

$$\mu = \varphi(z, y, v), \qquad \mu_1 = \varphi(z_1, y_1, v_1),$$
$$\nu = \psi(z, y, v), \qquad \nu_1 = \psi(z_1, y_1, v_1).$$

Envisageons trois fonctions analytiques

$$\gamma_k = G_k(z, y, v, z_1, y_1, v_1) \qquad (k = 1, 2, 3),$$

vérifiant ces deux équations aux dérivées partielles. Alors le système

$$\left(z_1, y_1, v_1, \frac{dy_1}{dz_1}, \frac{dv_1}{dz_1}\right),$$

dont les éléments sont liés aux éléments de l'intégrale considérée par les trois équations $G_k = \gamma_k$ où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ont des valeurs constantes, fixées d'ailleurs arbitrairement, est aussi une intégrale du système d'équations différentielles simultanées

$$\frac{dy}{dz} = \varphi(z, y, v),$$

$$\frac{dv}{dz} = \psi(z, y, v).$$

Comme application de ce dernier théorème, envisageons les équations simultanées

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi_1(z, \sigma)\,dz + \psi_1(y, \tau)\,dy + \psi_1(v, \chi)\,dv = 0 \\ \psi_2(z, \sigma)\,dz + \psi_2(y, \tau)\,dy + \psi_2(v, \chi)\,dv = 0, \end{cases}$$

où $F(\xi, \eta) = 0$ est une équation algébrique de genre $p = 3$ et où $\psi_1(\xi, \eta)$, $\psi_2(\xi, \eta)$ désignent les dérivées de deux intégrales abéliennes de première espèce correspondant à $F(\xi, \eta) = 0$ et linéairement indépendantes. Soit alors $\psi_3(\xi, \eta)$ la dérivée d'une troisième intégrale de première espèce correspondant à $F(\xi, \eta) = 0$ et linéairement indépendante des deux premières. Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ trois points analytiques déterminés de la surface de Riemann (ξ, η) correspondant à $F(\xi, \eta) = 0$ et par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ trois points analytiques arbitraires de la même surface de Riemann.

D'après le théorème d'Abel, le système des trois équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{(z,\sigma)} \psi_k(z, \sigma)\,dz + \int_{\varepsilon_2}^{(y,\tau)} \psi_k(y, \tau)\,dy + \int_{\varepsilon_3}^{(v,\chi)} \psi_k(v, \chi)\,dv \\ \displaystyle = \int_{\gamma_1}^{(z_1,\sigma_1)} \psi_k(z_1, \sigma_1)\,dz_1 + \int_{\gamma_2}^{(y_1,\tau_1)} \psi_k(y_1, \tau_1)\,dy + \int_{\gamma_3}^{(v_1,\chi_1)} \psi_k(v_1, \chi_1)\,dv, \\ \qquad (k = 1, 2, 3) \end{cases}$$

est vérifié par trois fonctions algébriques z_1, y_1, v_1 de $z, v, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Soient

$$\gamma_k = G_k(z, y, v, z_1, y_1, v_1) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

les trois équations qui donnent ces solutions z_1, y_1, v_1 du système d'équation (3). On a alors identiquement, pour des valeurs fixes données à $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$,

$$\psi_k(z_1, \sigma_1)\,dz_1 + \psi_k(y_1, \tau_1)\,dy_1 + \psi_k(v_1, \chi_1)\,dv_1$$
$$= \psi_k(z, \sigma)\,dz + \psi_k(y, \tau)\,dy + \psi_k(v, \chi)\,dv.$$

On a donc, dans l'exemple considéré, comme corollaire du dernier théorème général, le théorème suivant :

Si $\left(z, y, v, \dfrac{dy}{dz}, \dfrac{dv}{dz}\right)$ est une intégrale du système d'équations différen-

tielles (2),

$$\left(z_1, y_1, v_1, \frac{dy_1}{dz_1}, \frac{dv_1}{dz_1}\right)$$

sera l'intégrale du même système d'équations différentielles (2), à laquelle les constantes γ_1, γ_2, γ_3 correspondent comme valeurs initiales.

J. M.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XV.

216

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XV; 1891. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles; onzième année, 1886-1887. — 16-18.

Annales de l'École Normale supérieure; 3e série, T. VI, 1889. — 18-47.

Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble; T. I, 1889. — T. II, 1890. — T. III, 1891. — 151-182.

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; T. VII, 1888-1889. — 7e série, T. I, 1889-1890. — 134-136.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 56e année, 3e série. — T. XIII, 1887. — T. XIV, 5-10.

Bulletin de la Société mathématique de France; T. XVII, 1889. — 69-81.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; T. CVIII, CIX, 1889. — 57-69.

Journal de l'École Polytechnique; LVIe cahier, 1886. — LVIIe cahier, 1887. — LVIIIe cahier, 1889. — LIXe cahier, 1889. — 47-56, 101-106.

Mathematische Annalen; T. XXX, 1887. — T. XXXI, 1888. — 106-123.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des Écoles spéciales et des établissements d'instruction moderne; T. VII, 1887. — 11-15.

Memorie del Reale Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti; T. XIV, 1868-69-70. — T. XVI, 1872. — T. XVII, 1872-73. — T. XVIII, 1874-75. — T. XIX, 1876. — T. XX, 1877-78-79. — T. XXI, 1880-82. — T. XXII, 1884-85-87. — T. XXIII, 1890. — 140-143.

Monatshefte für Mathematik und Physik; première année, 1890. — 93-100.

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par M. Ch. Brisse et E. Rouché, T. IX, 1890. — 81-92.

Publications de l'Académie royale de Belgique. — 5.

Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna; 1876-77, 1883-84, 1885-86, 1886-87, 1887-88, 1888-89. — 136-140.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien; T. LXXXI, 1880. — T. LXXXII, 1880. — T. LXXXIII, 1881. — T. LXXXIV, 1881. — 123-134-143-151.

Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; 1er semestre 1886. — 2e semestre 1886. — 1er semestre 1887. — 2e semestre 1887. — 182-215.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abetti (A.). 135.
Ameseder (A.). 98, 125, 126, 145, 147.
Amigues (E.). 83.
Andrade. 33, 34.
Antomari (X.). 75.
Appell (P.). 32, 42, 108.
Arzelà (C.). 137, 138, 139.
Astor (A.). 156, 175.
Audibert. 88.
Auric. 91.
Balitrand. 89.
Barisien (E.). 85.
Bellavitis (G.). 140, 141, 142.
Beltrami, 40.
Berdellé. 72.
Bergmans (C.). 14.
Bertrand (J.). 81.
Biehler (Ch.). 89.
Biermann (O.). 94.
Binder (W.). 127, 146.
Bioche. 74.
Birkeland (K.). 98.
Blutel. 38.
Bobek (K.). 147.
Bois-Reymond (P. du). 192.
Boltzmann (L.). 123, 132, 133, 146, 148, 151.
Bolza (O.). 113.
Borel (E.). 84.
Bosi (L.). 91.
Boussinesq. 42, 44, 59, 61.
Brill (A.). 120.
Brioschi. 45, 61.
Brisse (Ch.). 50, 88.
Brocard (H.). 15, 84.
Bucchia (G.). 141.
Busche (E.). 114.
Callandreau. 102.
Cappelletto (A.-A.). 141.
Carvallo (E.). 92.
Casey (J.). 12.
Caspary (F.). 114.
Cassani (P.). 134.
Catalan (E.). 6, 81.
Cayley (A.). 107.
C. B. 88, 89.
Cesàro (E.). 12, 14, 84, 87, 88.
Chailan. 74.
Collet (J.). 151, 174, 182.
Dainelli (U.). 138.
Dantscher (v.). 95.
Darboux (G.). 26, 36, 57.
David. 53.
Delisle (A.). 107.
Deruyts (J.). 6, 8, 9, 14.
Dingeldey (F.). 116, 117.
Donati (L.). 139.
Drasch (H.). 124, 133.
Duporcq (E.). 92.
Durége (H.). 129, 147.
Emmerich (A.). 12.
Ettingshausen (A.). 126.
Fais (A.). 136, 137.
Fambri (P.). 134.
Favaro (A.). 134, 135, 142, 143.
Finger (J.). 128, 144.
Floquet. 43.
Folie (F.). 8.
Fontaneau (E.). 89.
Fontvioland (de). 57.
Fouret (G.). 50, 85, 86, 92.
Franke (John). 149.
Frebitscher (M.). 127.
Fricke (R.). 111, 118.
Frolov. 71.
Fuchs. 186, 201, 204, 206, 210.
Gall (V.). 119, 120.
Gambey. 84.
Gegenbauer (L.). 94, 126, 132, 144, 150
Gilbert (Ph.). 14, 29.
Gmeiner (J.). 96.
Gordan (P.). 122.
Goursat. 18, 35, 73.
Gruber (E.). 131.
Gruss (G.). 148.
Guber (E.). 100.

Guichard. 24.
Guyétand (A.). 18.
Hadamard. 44.
Halphen. 37.
Haluschka (F.). 147.
Haubner (J.). 97.
Heen (P. de). 8.
Helmholtz (v.). 208.
Henri (K.). 114.
Heun (K.). 120.
Hilbert (D.). 106, 112, 114, 121.
Hugoniot. 51, 101.
Humbert (G.). 54, 64, 67.
Hürwitz (A.). 23, 109.
Husquin de Réville. 84.
Igel (B.). 133, 134.
Ingrami (G.). 139.
Isenkrahe (C.). 118.
Issaly (l'abbé). 72, 85.
Jamet (V.). 6, 90.
Janet (P.). 162.
Jeffery. 80.
Jonquières (de). 77.
Jordan. 34.
Kallenberg van den Bosch (C.-R.-J.). 84, 85, 88.
Kantor (S.). 128, 129, 146, 150, 151.
Killing (W.). 118.
Klein. 30, 33.
Kneser (A.). 109, 122.
Kobb. 41.
Kœnigs (G.). 32, 57, 58, 62, 66, 79.
Kœnigsberger (L.). 110, 115, 117, 118.
Kohn (G.). 94, 131.
König (J.). 93, 114.
Krause (M.). 111, 113.
Kronecker (L.). 184, 193.
Kunerth (A.). 130.
Küpper (C.). 95, 99, 118.
Kürschák (J.). 114.
Laisant. 73, 80, 81.
Lang (V. v). 125.
Laquière. 80.
Lauermann (C.). 143.
Léauté. 57, 104.
Leinekugel (G.). 82.
Lelieuvre. 67.
Le Paige (C.). 6, 8, 9, 124, 127, 145, 148.
Lerch. 23, 31, 95.
Lévy (Lucien). 49.
Lichtenfels (O.). 97.
Lilienthal (R. v.). 106, 116.
Liouville (R.). 34, 38, 48, 55, 59, 105.
Lippich (F.). 148.
Lipschitz. 37.
Longchamps (G. de). 13, 85.
Lorenzoni (G.). 134.
Love (A.-E.-H). 110.
Lucas (E.). 12.
Lucas (F.). 69.
Lyon. 168.
Mandel (M.). 100.
Mannheim. 85.
Mansion (P.). 6, 7, 13, 15, 16.
Maisano (G.). 112, 122.
Maleyx (L.). 86, 90.
Marchand (E.). 83.
Margules (Max.). 146, 149.
Marie (M.). 82.
Markoff (A.). 68.
Maschke (H.). 113.
Maupin. 89.
Mayer. 35.
M' Cay. 14.
Méray (Ch.). 26, 82.
Mertens (F.). 93, 98, 125, 127.
Meyer (F.). 93, 106, 116.
Minich (R.-S.). 142.
Mister (J.). 11.
Mittag-Leffler. 65.
Motel (H.-P. du). 82.
Moutard. 47.
Nagel (C.-H.). 13.
Nekrassof (P.). 119.
Neovius (E.). 120.
Neuberg (G.). 12.
Ninni (A.-P.). 134.
Niewenglowski (B.). 85.
Nœther. 111.
Ocagne (M. d'). 14, 15, 17, 39, 68, 73, 80, 83, 86, 89.
Ossian Bonnet (G.). 50.
Padé. 25.
Padova (E.). 135, 136.
Papelier. 81, 82.
Pasch (M.). 108.
Peano. 69.
Pellegrin (E.). 88.
Pellet. 42, 79.
Pelz (Carl). 125, 133, 145.
Perott (J.). 79.
Peschka (G.-A.). 128, 146, 148.
Pesci (G.). 138.
Phillips. 66.
Picard. 30, 40, 43, 60, 75.
Pick (G.). 132.
Pincherle (S.). 20, 45, 137.
Pirondini (G.). 87.
Poincaré (H.). 28, 40, 49.
Pomey (J.-B.). 91.
Puchta (A.). 99, 130.
Pringsheim (A.). 121.
Quiquet. 67.
Raffy (L.). 19, 37, 63, 66.

Ravier. 85, 92.
Razzaboni (A.). 138.
Resal (H.). 29.
Retali (V.). 136, 137, 138.
Ribière. 41.
Riccardi (P.). 136
Riecke (E.). 110.
Riquier. 26, 82.
Robert (Ch.). 88.
Röllner (F.). 133.
Romieux. 35.
Ronkar (E.). 8.
Rouché. 51.
Ruffini (F.-P.). 136.
Saint-Germain (de). 83, 91.
Salvert (de). 16.
Sanctis (P. de). 91.
Santini (G.). 140.
Sauvage. 21, 31.
Schafheitlen (P.). 108, 116.
Schier (Otto). 125, 132.
Schlesinger (O.). 112, 117.
Schmid (T.). 150.
Schœntjes. 15.
Schönflies (A.). 115.
Schoute (P.-H.). 12.
Segre (C.). 109, 110.
Servais (Cl.). 114.
Simony (O.). 122, 126, 131, 149.
Sonin. 21, 22, 44.
Sonine (N.). 114.
Soulier (P.). 90.
Sparre (de). 17.
Spath (F.). 97.
Stefan (J.). 145.
Stéfan (S.). 93, 123.
Stickelberger (L.). 111.
Stieltjes. 41, 46, 90.
Stolz (O.). 99, 123.
Stouff (X.). 166.
Stroh (E.). 121.
Study (E.). 97, 108.
Sylvester. 43, 46.
Tano (J.). 92.
Teixeira. 75, 100.
Tesar (J.). 126, 148.
Thiry (Cl.). 12.
Tilly (J.-M. de). 9, 15.
Tucker. 12.
Turazza (D). 134, 140, 141, 142.
Turmlirz (O.). 132.
Ungar (Max). 132, 146.
Van der Mensbrugghe (G.). 5.
Van Dorsten. 12.
Vaněček (J.-S.). 143.
Vigarié (Em.). 11.
Vogt. 27.
Voss (A.). 109. 111.
Wassmuth (A.). 100.
Websky (M.). 182.
Weingarten (J.). 183.
Weltzien (C.). 113.
Weyer (Ed.) 97.
Weyer (Em.). 123, 124.
Weyr (Ed.). 128.
Weyr (Em.). 124, 127, 128, 143, 144, 146, 149, 150, 151.
Wiltheiss (E.). 116, 120.
Winckler (A.). 130, 150.
Wirtinger (W.). 94, 96, 98.
Wittenbauer (F.). 127, 133, 145, 147.
Zeuthen (H.-G.). 118.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XV.

0

16960 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 26
Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~
Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY